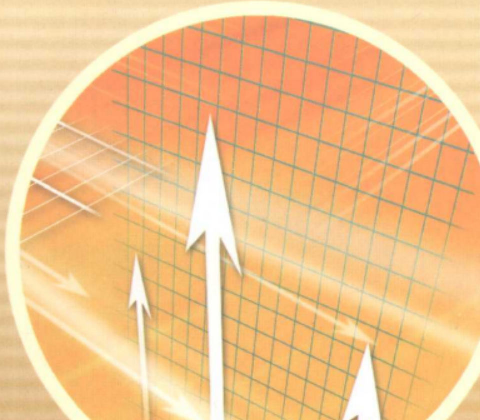
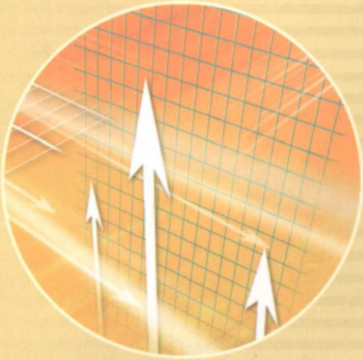
全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

李小平 主编



中国农业出版社



封面设计　贾利霞

ISBN 978-7-109-11951-2

9 787109 119512 >

定价：18.00元

全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

李小平 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/李小平主编．—北京：中国农业出版社，2007.10

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11951-2

Ⅰ．概…　Ⅱ．李…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 156656 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑　龙永志　段炼

北京智力达印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2007 年 12 月第 1 版　　2007 年 12 月北京第 1 次印刷

开本：720 mm×960 mm　1/16　　印张：12

字数：205 千字

定价：18.00 元

编写人员名单

主　　编：李小平

副 主 编：周建军　周玉元　刘月华　刘勉声

参编人员：周铁军　邹锐标　陈亚波　温芝元
彭振赟

前言

概率论与数理统计是近代数学的一个分支，它的任务就是揭示随机现象内在存在的统计规律性，它既有严密的数学基础，又与其他学科联系紧密，在自然科学、社会科学、管理科学、工农业生产等各学科和领域中有着广泛应用．所以本课程在高等学校中的重要性也就更加突出．目前，不仅高等学校许多专业都开设了这门课程，而且也是工学、经济学、管理学硕士研究生入学考试数学科目的考试内容．

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，是湖南农业大学精品课程建设立项项目的研究成果，我们按照该课程教学改革的要求，组织多年从事概率论与数理统计教学的教师，以我校教师为编写班子的主要成员，经过征求多方面意见，仔细推敲，反复修改，于 2007 年3 月定稿．

本书在编写过程中，努力做到通俗易懂，删除了一些繁琐的理论证明，突出基本内容的掌握和基本方法的训练；在选材和概念的引入上力求从实际问题出发，贴近实际，突出数理统计的应用性，注意学生运用概率统计方法分析和解决实际问题能力的培养，本书所选择的例题与习题，既有基本训练题，也有综合应用题，从而能满足不同层次学生的需求．

本书由湖南农业大学李小平教授担任主编，湖南农业大学周建军副教授、刘月华副教授、周玉元副教授、中南林业科技大学刘勉声副教授担任副主编．周建军副教授负责编写第一章和第二章，刘月华副教授负责编写第三章和第四章，刘勉声副教授负责编写第五

章，李小平教授负责编写第六章和第七章，周玉元副教授负责编写第八章、第九章和第十章．参与编写的人员还有湖南农业大学周铁军教授、邹锐标副教授、陈亚波副教授、温芝元副教授．本书由湖南科技大学彭振赟教授审稿．在编写过程中我们得到了湖南农业大学教务处、中南林业科技大学教务处、湖南科技大学教务处及中国农业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢．

限于编者的水平，书中可能存在错误和缺点，敬请读者批评指正．

目　录

第一章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．由于随机现象的普遍性，概率论与数理统计的理论与方法得到了越来越广泛的应用，其应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门，例如气象预报、水文、地震预报、寻求最佳生产条件的试验设计等等．概率论与数理统计还与其他学科相结合发展了许多边缘学科，如生物统计、数学地质、环境数学等．概率论与数理统计也是一些重要学科如可靠性理论、控制论、人工智能等的理论基础．

§1.1 随机试验与随机事件

1.1.1 随机试验

在自然界以及生产实践和科学实验中，会遇到两类现象：确定性现象与随机现象．

在一个标准大气压下，水加热到 100 ℃就会沸腾，这是确定性现象．

孵化中的一只鸡蛋，有孵得出小鸡或孵不出小鸡两种可能．这样，孵得出小鸡便是一种有可能出现，但未必一定出现的现象．在一定条件下有可能出现，但未必一定出现的现象称为随机现象．

观察某品种水稻的株高，若从中任抽一株，那么，抽得的株高小于90 cm，在 90 cm 到 100 cm 之间，大于 100 cm 便都是随机现象．

为了叙述方便，我们把对自然现象、社会现象进行的观察或一次科学试验，统称为一个试验，如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，就称它为一个随机试验，简称试验．

随机试验的所有可能结果的集合称为这个随机试验的样本空间，记作 Ω，其中的每个元素称为样本点，记作 ω.

例 1.1.1 上抛一枚硬币，可能是正面（有国徽的面）朝上，也可能是反面（有币值的面）朝上．因此，上抛一枚硬币是随机试验．若正面朝上记作 H，反面朝上记作 T，那么样本空间 $\Omega=\{H, T\}$．

将一枚硬币抛两次也是随机试验．我们用##表示试验的结果，其中#将以 H 或 T 代替，第一个#表示第一次抛硬币的结果，第二个#表示第二次抛硬币的结果，则这个随机试验的样本空间 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$．

例 1.1.2 将一粒骰子掷在桌面上，结果可能是 6 种不同点数中的某一种点数 i 朝上．因此，掷一粒骰子是随机试验．如果把点数 i 朝上的结果也记作 i，那么掷一粒骰子的样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．

掷两粒骰子或多粒骰子也是随机试验．掷两粒骰子的样本空间 $\Omega=\{(i, j)\mid i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，其中 (i, j) 表示第一粒骰子朝上的点数为 i，第二粒骰子朝上的点数为 j．

例 1.1.3 测量某品牌灯泡的使用寿命，可能出现的结果是时间 t（单位：h)，样本空间 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$．

1.1.2 随机事件

我们把由某些样本点 ω 构成的集合，即样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称为事件，通常用大写字母 A，B，C，…来表示．在一次试验中，事件 A 中的一个样本点出现时就称事件 A 发生．

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件．在例 1.1.2 中，随机试验有 6 个基本事件 $\{1\}$，$\{2\}$，…，$\{6\}$．Ω 的子集 $A=\{1, 3, 5\}$ 是一个随机事件，它表示事件{奇数点朝上}．

样本空间 Ω 是自身的子集，它包含所有样本点，在每次试验中必然发生，称为必然事件，空集 $\varnothing$ 是 Ω 的子集，但它不包含任何样本点，故每次试验中都不可能发生，称为不可能事件．

1.1.3 事件间的关系与运算

事件之间总是相互联系的，事件之间也存在着一定的关系．概率论的任务之一，是研究随机事件的规律，通过对比较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律，为此，需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算．

设 A，B 是样本空间 Ω 的两个随机事件：

1. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或事件 A 包含于事件 B，记作 $A\subset B$.

2. 如果 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等（或等价），记作 $A=B$.

3. 事件 A 与 B 至少有一个发生所构成的事件，称为事件 A 与 B 的并（或和），记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{\omega\mid \omega\in A 或 \omega\in B\}$．

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生所构成的事件称为

A_1，A_2，…，A_n 的并，记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 可列多个事件 A_1，A_2，…，A_n，…至少有一个发生所构成的事件称为 A_1，A_2，…，A_n，…的并事件，记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots$.

4. 事件 A 与事件 B 都发生所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的交（或积），记作 AB 或 $A\cap B$. 即 $AB=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 都发生所构成的事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的交，记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$. 可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…都发生所构成的事件称为可列个事件 A_1，A_2，…，A_n…的交，记作 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

5. 事件 A 发生而 B 不发生所构成的事件，称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$. 即

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A，且\ \omega\notin B\}.$$

6. 如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B 互不相容（或互斥）.

一般地，如果 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中的任意两个事件互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，则称这个事件组互不相容，此时，我们通常把 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 记为 $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$.

7. 事件 A 不发生所构成的事件称为事件 A 的对立事件（或逆事件），记作 $\overline{A}$. 显然，在每次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 有且仅有其中之一发生，即 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A+\overline{A}=\Omega$. 根据事件差的定义可以看出，$A-B=A\overline{B}$，$\Omega-A=\overline{A}$.

8. 事件的运算满足如下性质

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$

分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$

德莫根（De Morgan）定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 一般地，对 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 有：

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}，\quad\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$$

随机事件之间的关系及运算可以用文（venn）氏图直观地表示出来，如图1.1.1所示.

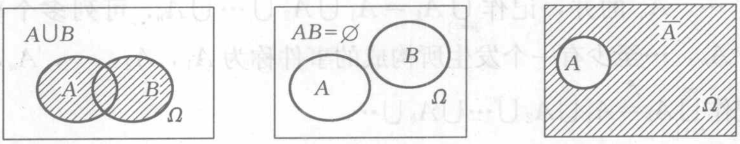


图 1.1.1

例 1.1.4 向指定目标连续射击 3 枪，设 $A_i=\{$第 i 枪击中目标$\}$ $(i=1, 2, 3)$，则

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3=\{$至少有一枪击中目标$\}$；

(2) $A_1A_2A_3=\{$三枪都击中目标$\}$；

(3) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\{$只有第一枪击中$\}$；

(4) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3=\{$恰有一枪击中目标$\}$；

(5) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\overline{A}_3=\{$三枪都没有击中目标$\}$；

(6) $\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3=\{$至少有一枪没有击中目标$\}$；

例 1.1.5 在某班学生中任选一名学生，$A=\{$选到男生$\}$，$B=\{$选到运动员$\}$，$C=\{$选到三好生$\}$．要求

(1) 叙述 $AB\overline{C}$的含义．

(2) $ABC=A$ 在什么条件下成立．

解 (1) $AB\overline{C}$的含义是选到不是三好生的男运动员．

(2) $ABC=AC$ 等价于 $AC\subset B$，即 AC 发生，必导致 B 发生，因此 $ABC=A$成立的条件是该班的男三好生都是运动员．

§1.2 概率的定义及性质

1.2.1 概率的直观意义

我们知道，在一个随机试验中，各种事件出现的可能性并非都相等，有些事件出现的可能性大，而有些事件出现的可能性小，例如，将一粒骰子掷在桌面上，设事件 $A=\{$出现的点数大于 2$\}$，事件 $B=\{$出现的点数大于 4$\}$，显然，A 出现的可能性比 B 出现的可能性大．

研究随机试验不仅要知道它可能出现哪些事件，更加重要的是研究每个事件出现的可能性大小，人们希望有一个数量指标对每个事件出现的可能性大小做出客观的描述，基本的想法是：

用一个数来度量事件发生的可能性的大小，这个数至少应该满足：(1) 它是事件本身所固有的，不随人们的主观意志而改变的一种客观的量度，而且可

以在相同条件下通过大量的重复试验予以识别和检验．(2) 它必须符合一般常情，事件出现可能性大的值就大，事件出现可能性小的值就小；必然事件的值最大，不可能事件的值最小而等于零．

简单说来，随机事件 A 发生的可能性大小的数量指标，称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$ ．

1.2.2　概率的统计定义

在相同的条件下，重复进行 n 次试验，随机事件 A 在 n 次试验中发生的次数 r 称为频数，比值 $\frac{r}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率，记作 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{r}{n}$.

不难证明，当试验次数 n 固定时，频率 $f_n(A)$ 有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{n}A_k)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_k)$.

当试验次数很大时，事件 A 发生的频率呈现出某种规律性，为此，先看下面的例子：

例 1.2.1　前人上势一枚均匀硬币的试验，结果如下：

试验者	上抛次数	正面朝上次数	正面朝上的频率
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

例 1.2.2　在相同条件下盲椿在某棉田危害情况的调查结果如下：

调查株数	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
受害株数	15	33	72	177	351	525	704
受害频率	0.30	0.33	0.36	0.354	0.351	0.350	0.352

由以上两例可以看出，随着试验次数增多，上抛一枚均匀硬币正面朝上的频率接近 0.5，某棉田受盲椿危害的频率接近 0.35，具有所谓的稳定性．下面给出概率的统计定义．

当试验次数很大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，它在某一个数值 p 的附近摆动．一般来说，随着试验次数的增多，这种摆动的幅度越来

越小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$，并称这样定义的概率为**统计概率**．

从统计概率的定义可以看出，当试验次数很大时，$P(A)\approx f_n(A)$，所以频率是度量概率的一个工具，这一点在实际应用中经常用到．

1.2.3　古典概率

如果随机试验的样本空间基本事件的总数为有限数 n，并且各个基本事件出现的可能性相同，而事件 A 包含了 r 个基本事件，则定义事件 A 发生概率为 $P(A)=\frac{r}{n}$，并且称这样定义的概率为**古典概率**．

一般而言，古典概率可以根据样本空间的组成情况来进行计算．当样本空间的元素难以列出时，可以借助排列、组合的知识来进行计算．

例 1.2.3　某个家庭有两个小孩，求至少有一个女孩的概率（设男女出生率相同）．

解　设 $A=\{$至少有一个女孩$\}$，按孩子的大小次序，样本空间可以表示成

$$\Omega=\{(男，男),(男，女),(女，男),(女，女)\}.$$

则 $A=\{(男，女),(女，男),(女，女)\}$，显然，基本事件总数 $n=4$，A 包含的基本事件数 $r=3$，因此，$P(A)=\frac{3}{4}=0.75$.

例 1.2.4　一批产品中有 8 件正品 2 件次品，从中任取两件，求取得一件正品一件次品的概率．

解　设 $A=\{$取得 1 件正品 1 件次品$\}$，我们容易看出，基本事件总数 $n=C_{10}^2=45$，并且各个基本事件出现的可能性相同，A 包含的基本事件数 $r=C_8^1C_2^1=8\times 2$，因此，

$$P(B)=\frac{16}{45}=0.355\,6.$$

例 1.2.5　一盒子中有 9 张卡片分别编号 1，…，9，采用取后放回的方式，连续取三张卡片，求前两次取到卡片编号为偶数最后取到卡片编号为奇数的概率．

解　设 $A=\{$前两次取到卡片编号为偶数最后取到卡片编号为奇数$\}$，采用取后放回的方式，连续取三张卡片，一共有 9^3 种取法，即基本事件总数为 $n=729$，前两次取到卡片编号为偶数最后取到卡片编号为奇数的取法有 $4\times 4\times 5$种，即 A 包含的基本事件数 $r=80$，因此，

$$P(A)=\frac{80}{729}\approx 0.109\,7.$$