

郑毓信 著

数学思维与小学数学

凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

郑毓信数学教育论丛(2)

数学思维与小学数学

郑毓信 著

凤凰出版传媒集团

 江苏教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思维与小学数学 / 郑毓信著. — 南京: 江苏教育出版社, 2008.8(2008.12 重印)

ISBN 978-7-5343-8463-9

I. 数... II. 郑... III. 数学课-教学理论-小学 IV. G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 120982 号

总序：我与数学教育

1965年,21岁的我从江苏师范学院(现苏州大学)数学系毕业,由于家庭背景与其他一些原因,未能如愿成为一名大学教师,而是来到南京市第二女子中学,成了一名中学数学教师,由此也开始了我与基础数学教育的长期情缘。记得刚刚分到中学时,我的一位大学同学曾不解地提及:“郑毓信原来一直在搞高等数学,现在居然又一头转向了中学数学!”这或许就是我的一个主要特点:比较本分,通常不会怨天尤人,不管做什么事就想认真做好。

在中学一呆就是13年,其间最难忘的当然是史无前例的文化大革命,学校也早已由原先的女子中学改成了普通中学(南京市梅园中学)。但即使是在教学秩序受到很大冲击的当时,除非根本上不了课,自己又总想上好每一节课。记得1968年“复课闹革命”,就发生过因自己的数学课在学生中有较强反响而将工宣队员吸引进了教室这样的“故事”;自己还曾上过全区的公开课;这并非当时十分流行的“组合式”,如由工宣队员首先忆苦思甜,再由教师组织学生一起算剥削账,而是用辩证思想指导具体数学知识内容教学的一次实践。有点幸运的是,这一课例得到了当时负责全区教育工作的军宣队长的肯定,尽管学校分管教改的负责人曾专门打电话提醒“此人家庭出身不好,不宜表扬”,但我还是在全区总结大会上听到了对自己的表扬。

在中学期间自己不仅教过完全由“差生”组成的慢班,恢复高考后也教过“快班”,还当过数学教研组长,总的讲可以算一个好教

师。其间还在《中学理科教学》(当时由《数学通报》等几家刊物合并而成)发表了自己的第一篇教研文章,主要是谈如何采取联系的观点从事三角形和四边形的教学。尽管只拿到了8元钱的稿费,但在当时的学校已经成为一件新闻,因为那时教学类刊物很少,要发表一篇教研文章并非一件易事。

1978年国家恢复招收研究生,尽管没有很多时间进行准备,在报考南京大学哲学系自然辩证法专业的60名考生中,自己却很幸运地名列前茅,并最终成为4名录取者之一。后来在很多场合自己都曾被问及这样一个问题:“您在当时为什么会由数学转向哲学?”一个主要的原因是:在文化大革命期间除去“经典著作”以外根本不允许看其他的书,又正是通过阅读恩格斯的《自然辩证法》、《反杜林论》等著作让自己产生了对于数学哲学的强烈兴趣。例如,上面所提及的那堂全区公开课与教研文章就都是这种兴趣的一个直接反应。另外,自己当时已经34岁了,觉得搞数学年龄偏大,搞哲学则似乎不存在这样的问题。

1981年,三年的硕士研究生学习结束后留在南京大学哲学系任教。1985年首次出国参加国际学术会议,1986年评为副教授,1987至1988年赴英国伦敦政治经济学院(LSE)学术访问,1988年底破格提升为教授。10年的生活非常紧张,但也十分充实;尽管现在回忆起来仿佛只是一刹那,但也有很多事情让我终身难忘。

第一,尽管我已经成了一名专业的哲学工作者,甚至还戴上了哲学教授这样一个“头衔”,但始终没有完全脱离数学教育。因为,在1983年以后我曾长期为南京大学哲学系的本科生开设高等数学课程。尽管为哲学系的学生开设数学课实非一件易事,却使我在南京大学初步站稳了脚跟:我由于学生反映良好获得了南京大学首次评选的“优秀教学奖”一等奖(系里为我申报的只是二等奖),一些同事并因此戏言道:“你不就是依靠数学教育起家的吗!”

第二,感谢朱梧楨教授的引荐,使我有机会追随我国著名数学

家徐利治先生，并因此而在自己的整个学术生涯中自始至终获得了极大教益。特别是，就当时而言，正是在数学方法论方面的具体工作使我获得了学术研究的直接切入点，并由此于1985年出版了我的第一本著作《数学方法论入门》（浙江教育出版社）。令我十分高兴的是，尽管在发行初期曾遇到一定的困难，但依靠母校《中学数学》编辑部、特别是唐复苏教授的支持，这一问题很快得到了解决：5000册书在1个月内就邮购一空（值得提及的是，2006年，该著作再版发行。一本著作在20年后仍有一定的价值当然是对作者的极大肯定）。1991年广西教育出版社出版的《数学方法论》则是我在数学方法论方面的第二本著作，此书发行量至今已接近4万，有点出乎我的意料。

第三，我的两位导师夏基松和林德宏教授不仅在哲学上给了我直接指导，而且也在各个方面给了我很大帮助。人民出版社于1986年出版了依据我的硕士论文改写而成的《西方数学哲学》，其后江苏教育出版社又于1990年出版了我的《数学哲学新论》，后者主要反映了我1987至1988年在英国访问期间的学术收获。

第四，正是对于数学哲学的巨大兴趣促使我在赴英期间选择了英国伦敦政治经济学院作为主要的访问学校，因为，那里曾是国际著名数学哲学家拉卡托斯（I. Lakatos）工作过的地方，自己还有幸获得了拉卡托斯研究基金。我以关于拉卡托斯的一篇论文（发表于 *The British Journal for Philosophy of Science*, 1990, 9月号）结束了这次访问，这或许就从一个侧面反映了我通过这次访问所获得的巨大收获。在英期间我还曾应邀到牛津大学作了专题讲演（University Lecture on Philosophy of Mathematics），自己也因此受到很大鼓励：能登上牛津的讲台，今后在世界上就没有什么讲台能吓倒我了！

由于先期的经历使自己结下了深深的数学教育情缘，也由于

认为数学哲学应当对实际的数学活动发挥积极的促进作用,从1989年开始自己又重新转向了数学教育;但由于现在有了新的不同的身份(哲学教授),能否为数学教育界所认同就成了一个新的问题。感谢钟善基、曹才翰等前辈为我敞开了大门:我被邀请参加在上海师范大学召开的全国高等师范院校数学教育研究会1990年年会并作大会报告,从而就有机会与各位数学教育界的同行进行了初步接触;又正是通过参与1990年在北京召开的“五国数学教育会议”,自己结识了国际著名的数学教育家戴维斯(Robert Davis),这对于我后来在数学教育方面的进一步工作具有十分重要的影响。

1991年,感谢南京大学又一次为我提供了外访的机会(1991~1992)。这次是由美国联合基金会资助,访问的对象则是美国罗格斯大学(新泽西州立大学)数学教育研究所。后者是美国最为著名的数学教育研究所之一,接待者就是戴维斯教授。因在北京与我有过接触,他认为我是少数几个能同时很好理解中国与西方数学教育的人士之一,他并因此对我的访问表现出了很大热忱。他邀请我住在他自己家中,更为我提供了良好的工作条件。戴维斯教授在送我的一本著作上写下了这样的题词:“感谢您来此访问,希望我们能在一起合作工作很多很多年!”事实上,戴维斯曾希望我留在美国攻读数学教育博士学位,但由于一些客观原因未能真正实现;另外,由于戴维斯在我返回中国后不久猝然长世,自己就失去了和这样一位大师、可亲长者长期合作的可能性。

对美国的学术访问为我在数学教育领域中的进一步工作打下了良好基础,特别是,正是通过这一访问自己才有机会更好地了解这一领域中的最新发展。这事实上也就是我在1990年代所从事的一项主要工作,即是对国际上数学教育的一些最新发展作出综合介绍与分析,主要包括《问题解决与数学教育》(江苏教育出版社,1994)、《认知科学、建构主义与数学教育》(与香港大学梁贯成

先生合作,上海教育出版社,1999)、《数学教育的现代发展》(江苏教育出版社,1999)等。应当指出,自己当时并曾对1989年前后在美国得到正式开展的新一轮数学课程改革进行了专门介绍(相关论文曾在《数学教育学报》组织的调查中被读者列为“最受欢迎的文章”),这也就清楚地表明了自己对于数学教育改革的积极性。当然,作为问题的另一方面,我也清楚地认识到了这样一点:我们不应盲目地追随国际上的潮流,而应坚持自己的独立分析与必要批判。例如,这事实上也就是自己为什么会在2001年于成都召开的一次大会上公开声称我不是建构主义者的主要原因,尽管正是自己在国内最早对建构主义进行了系统介绍。

与上述的工作相比较,1995年由四川教育出版社出版的《数学教育哲学》更可被看成一种原创性的研究,其主要目的就是哲学角度为数学教育奠定必要的理论基础。这一著作得到了普遍的肯定与好评,在1998年举行的第四届全国优秀教育类图书评选中获得一等奖,台湾的九章出版社也于同年出版了中文繁体字版。

就这一期间的工作而言,还应提及这样几件事:

第一,由于梁贯成先生的支持,自己得以先后3次对香港大学进行了学术访问,其间也曾应黄毅英先生的邀请到香港中文大学作学术讲演和短暂访问。这些访问不仅使我有机会更好地了解数学教育领域的最新进展,而且也能暂时摆脱日常教学的压力静下心来好好作一点总结与反思。较为可惜的是,由于语言的限制,自己未能利用这些机会对香港的数学教育多作一点可能的贡献;与此相对照,自己1997年对台湾为期两个月的访问似乎就没有任何特殊的困难[这是由台湾“中央研究院”数学研究所的李国伟教授安排的,这一访问的直接结果之一就是合作完成的《数学哲学中的革命》这样一本专著(九章出版社,1999)];特别是,自己利用这一机会作了十几场讲演,有在高等院校的,也有在基层学校的,甚至还有以中学生为直接对象的。在此应当特别感谢台湾九章出

版社的孙文先先生在这一期间为我提供的种种便利与帮助。

第二,由于英国学术院的资助,在1997年,即首次访问的10年以后,自己有机会再次对英国进行了为期半年的学术访问。在这一期间我曾应邀先后赴伦敦国王学院、意大利罗马大学、米兰大学、德国柏林自由大学、荷兰德尔夫脱大学等作学术访问和专题讲演。有点自豪的是:其中既有哲学系,也有数学系(所),甚至还包括计算机系,这种跨学科的现象应当说较为少见。

第三,自1992年以后,自己基本上每年都要参加由华东师范大学张奠宙先生等主持的“数学教育高级研讨班”,从而也就始终保持了与数学教育工作者的直接接触。总的来说,自己作为一个哲学工作者在数学教育领域中得到的“待遇”,可以说既有欢迎,也有排斥(如带着“笑脸”的拒绝:“老郑,你是搞哲学的,这次数学教育会议就不惊动你了。”);既有肯定,也有否定(如“数学哲学对于我国的数学教育基本上没有什么影响”)。但从反思的角度看,这些应当说都十分正常,还是“一笑了之,走自己的路”!

第四,这一期间还与王宪昌、蔡仲、肖柏荣、熊萍等教授先后合作完成了《数学文化学》(四川教育出版社,2000)、《数学思维与数学方法论》(四川教育出版社,2001)等两部著作。它们与先期出版的《数学教育哲学》一起合成了“数学·哲学·文化·教育系列”,这即可被看成我在这一领域中主要工作的一个集中展示。

自1999年正式启动的我国新一轮数学课程改革促使我将数学教育领域内的工作由主要集中于理论研究转到了更为关注实际的数学教学活动,而以下则就是自己在这方面的一个自觉定位,即是希望能从学术角度对课程改革的深入发展作出应有的贡献,包括深入的理论分析以及必要的批判。另外,如果说“放眼世界,立足本土;注重理念,聚焦改革”正是自己在这方面的一个基本立场,那么,坚持独立思考,坚持讲实话、真话就是这一时期中

各项工作的一个主要特点。尽管前些年自己曾在网上看到“郑毓信对于课程改革是假拥护、真反对”这样一条批评意见，但我相信任何有过深入思考的人都会赞同这样一个想法：为了促进课程改革的深入发展，仅仅看到成绩是不够的，更为重要的应是“发现问题、正视问题、解决问题、不断前进”。

在这一期间，自己不仅在《教育研究》、《课程·教材·教法》、《全球教育展望》等教育类核心刊物上发表了10多篇论文，更在《中学数学教学参考》、《小学青年教师》(现《小学教学》)等专门性的数学教学类杂志上发表了大量文章，一些主要的论文并以论文集的形式先后由上海教育出版社正式出版：《数学教育：从理论到实践》(2001)、《数学教育：动态与省思》(2005)。这一期间自己还曾多次应邀为多种类型的教师培训作专题讲演，我十分感谢诸多教研员同志与基层教师对自己的信任，以及为组织这些活动所作出的努力。

还应提及的是，如果说在先前自己所关注的主要是中学数学，那么，在这一时期中就对小学数学给予了更多关注。这同样也是自己的一种自觉选择，因为，在我看来，这是一种不应有的“两极分化”：中学的数学教育常常被认为附属于数学，小学的数学教育则更为明显地表现出了一般教育学与心理学的影响；进而，尽管上述的两种倾向就其表现形式而言似乎是互相对立的，但它们事实上又都是与数学教育的专业化直接相违背的。从而，就当前而言，所有具有数学背景的数学教育工作者就都应当给予小学数学更多的关注。当然，为了成为真正的“内行”，自己也作出了很大的努力：听一线教师的课，不仅听数学课，甚至还听语文课；看一线教师的文章，不仅看名教师的，也看普通教师的……由于时间和精力限制，我还因此而放弃了一项教育部重大科研项目(资助金额20万)，甚至还引起了哲学圈内一些同志的误会；但是，我却不仅因为关注小学数学更为切实地体会到了自己工作的意义，而且也在各

个方面获得了很大启示和教益。

具体地说,自己就正是由一线教师以及各级教研员的积极反应获得了最大支持和鼓励,而这事实上也就是促使笔者写作这一“论丛”的主要原因,即是希望能为一线小学数学教师做更多的事情。我也希望这一“论丛”能够得到他们的认同,因为,这正是一个哲学工作者数学教育情结的延伸与继续。

郑毓信

2007年8月17日于南京大学

引言：“做大气的小学数学教师”

曾经在杂志上看到这样一段关于一堂数学课的点评：“以其深厚的教学功底、灵活精湛的教学方法、较强的教学组织能力，创设了充满情趣的课堂氛围，使学生们在愉快中得到发展，在发展中获得愉快，显示出他独特的教学风格。”这位评论者显然是从一般教学的角度进行点评的；但是，作为数学课的评论，这是否还缺了点什么？

为了清楚地说明问题，在此引用张莫宙先生的一段话：“数学教育，自然是以‘数学’内容为核心。数学课堂教学的优劣，自然应该以学生是否能学好‘数学’为依据”；“数学教育啊，可否更多地关注‘数学’的特性！”

至此我想大多数读者一定明白我的意思了：数学教育应当防止“去数学化”！

由于这正是新一轮数学课程改革中普遍存在的一个问题，即是用“生活味”取代了数学课所应具有“数学味”，因此，作为上述问题的自然延伸，我们就应更为直接地去思考这样一个问题：究竟什么是数学课所应具有“数学味”？

由于自己的本行是哲学教授，因此就可首先提及这样一个事实，希望读者能由此产生一定的联想：科学技术哲学专业的博士研究生常常是由其他一些学科、特别是由理工科转行而来的，由于他们先前未接受过系统的哲学训练，因此就常常为这样一个问题感到苦恼，即如何才能使得自己的博士论文具有足够的“哲学味”。

为了解决后一问题,一些新入门者又常常采用这样一种做法,即在论文中大量地使用如“本体论”、“认识论”、“方法论”等专门的哲学词语,希望即能以此起到“装点门面”的作用。然而,经过了较长时间的学习,他们逐渐认识到这里的关键并不在于外部的“包装”,而是相应的研究是否达到了一定的理论深度,即是真正体现了哲学的思维方法、包括哲学的批判精神。

从同样的角度去分析,笔者以为,数学教学的“数学味”主要地也就是指相应的教学活动能否很好地体现数学的思维方法,包括数学的理性精神与文化价值。

针对小学数学教学的实际情况与需要,对数学思维作出简要论述就是本书的主要内容。

从现实出发,我们并应特别提及这样两种思想障碍:

其一,由于各种“先天”的原因,大多数小学数学教师不能说具有很高的数学素养,从而,我们如何能够期望他们在自己的教学活动中很好体现数学的思维方法、乃至数学的理性精神与文化价值?

其二,小学数学的内容过于简单,从而,即使教师具有了强烈的愿望,也不可能很好地体现数学思维的特点。

针对上述的疑虑,我们可以首先提及这样两个事实:

第一,不少曾分别组织过语文教学观摩与数学教学观摩的人员都有这样的体会:语文教师与数学教师就整体而言有着很不相同的“品味”。例如,就食宿安排而言,语文教师常常会提出各种个性化的要求;数学教师则较为简单:他们往往就以“大家是否都一样”作为主要的标准;另外,在教学观摩中,语文老师通常比较容易激动,甚至会自发地站起身来热烈鼓掌。相对而言,数学教师的表现要冷静得多,通常不会喜怒形之于色,最大的肯定也就是会心的一笑……

从而,这就清楚地表明了这样一点:尽管我们对此未必具有清醒的自我意识,在此也必定存在一定的个性差异和发展余地,但数

学教师这一职业又必然地会对我们的工作方式与生活方式产生一定的影响,即是使我们多少带上了一定的“数学味”(值得指出的是,这也正是“文化”的一个基本涵义,即是指由某种因素,包括居住地域、民族性、职业等,联系起来的各个群体所特有的行为、观念和态度等,也即各个群体所特有的“生活[行为]方式”)。

第二,以下是由国际数学教育委员会(ICME)所组织的专题研究“90年代的中小学数学”中所提及的一个事实:“从中小学课程中,儿童们认识到他们所做的大多数事情是凭个人见解来判断的,文章的质量、绘画质量或外语发音的好坏都是如此。甚至明显是以事实为基础的学科,如历史,也只得不予深究地加以接受。只有在数学中可验证其确定性。告诉一个小学生第二次世界大战持续了十年,他会相信;告诉他两个4的和为10,就会引起争论了。孩子们借助于已有的数学能力,能知道什么是对的,什么是错的,同时还能自己验证,即使有时并没有要求他们这样做。”(《国际展望:90年代的数学教育》,上海教育出版社,1990,第79页)

由此可见,即使在小学生身上,我们也可清楚地看到数学理性精神的影响。

当然,以上的事实不应被理解成我们的数学教师已经有了很好的数学素养,我们的数学教学也已在如何体现数学的思维、乃至数学的理性精神和文化价值这一方面取得了很大成功;毋宁说,在这一方面还有很长的路要走,但绝非“此路不通”,而是有着光明的前景,只要我们能够不断提高自身在这一方面的自觉性,并能作出足够的努力。

事实上,这也正是数学教师成长的一个必然途径,即是由唯一重视具体数学知识和技能的数学教学转而意识到应当更加重视学生思维方式的养成以及更深层次的文化熏陶;也正是从这样的角度去分析,无论是就小学、中学还是大学的教师,我们都可区分出这样三个不同的层次:教书匠、智者与大师。后两者也就是我们所说的

“做一个大气的小学数学教师”的主要涵义。

由于就当前而言,“数学思维”的课题已经引起了小学数学教育界的普遍重视,在此再特别强调这样两点:

第一,如果我们主要着眼于中学数学教学,那么相应的努力应当说已经取得了较大的成功。因为,这正是我国数学教育界在20世纪80年代的一项主要成就,即不仅在数学思维方法的理论研究上——这就是所谓的“数学方法论”研究——取得了不少重要的成果,而且也在以“数学方法论”指导、促进实际数学教学活动这一方面取得了很大成绩(对此将在第四章和第六章中作出具体介绍)。由于我们现在是将着眼点由中学转向了小学,因此,出现以下的作法就不足为奇了,即有不少人都试图将“数学方法论”、包括中学数学教学的相关经验直接推广到小学数学。例如,尽管一些文章或著作所论及的都是小学数学教学,但其实际内容却完全是由现成的“数学方法论”著作简单移植而来的,其重点则在于如何能够“无一遗漏地”对各种数学思想和数学思想方法作出介绍,包括函数思想、方程思想、集合思想等,甚至还谈到了某些即使对于中学生来说也是很难理解的思想,如极限思想、“潜无限”与“实无限”的区分等。

与这些作法相对照,笔者以为,尽管我们应当充分肯定在中小学数学教学之间所存在的重要联系,但又应当切实立足小学数学的实际情况和需要,从而,简单的“移植”或“模仿”就都不足取;恰恰相反,我们应当将数学思维的分析与研究同小学数学教学更为紧密地联系起来,从而才可能对于实际的教学活动发挥切实的促进和指导作用。

具体地说,一些数学思想或思想方法的掌握显然要求学生具有一定的理解能力与数学知识,从而,我们就不应不加思考地将“数学方法论”以及中学数学教学的相关成果简单地移植到小学数学之中;但是,我们又不应将数学思维等同于某些具体的数学思想

或思想方法，毋宁说，我们在此即应更加关注数学思维的总体特征，并努力做到在小学数学知识内容的教学中很好地予以体现，从而就能较好地实现“帮助学生初步地学会数学地思维”。另外，这或许正是小学数学教学在这一方面的特殊性，即学生关于数学思维的学习是与其一般思维习惯的养成密切相关的，从而，我们也应当十分重视如何能够处理好数学思维与一般思维之间的辩证关系。特别是，我们既应帮助学生“走向数学思维”，又应帮助学生“通过数学学会思维”。

第二，相对于小学数学教师而言，我们当然应当提出更高的要求，而这事实上也就是本书的一个主要目标，即是切实立足于小学数学，努力做到通俗易懂；同时又能很好地反映数学思维的真谛，真正做到居高临下，从而帮助读者，特别是一线小学数学教师较好地把握数学思维的总体特征，并能对于自己的教学发挥切实的指导与促进作用。

然而，这又正是笔者在这一方面的一个亲身体会：数学思维的学习主要依赖于由理论向实践的转化。从而，如果您已经开始了这一方面的学习，但始终未能将所学到的任何一点知识应用到自己的教学工作之中，那么，这样的理论学习就不能不说是完全失败了。与此相对照，哪怕您只是在某一点上有了真正的体会，并能将这种认识成功地应用到了实际的教学活动之中，那么，您就已经在这一方面取得了切实的进步，或者说，有了一个良好的开端。

容易看出，以上的论述事实上也就从又一角度更为清楚地表明了切实立足于小学数学教学的重要性。从而，就让我们共同牢记并积极地去实践这样一个真理：“至道无难，唯嫌拣择！”

郑毓信

2008年1月

目 录

总序：我与数学教育	1
引言：“做大气的小学数学教师”	1

I 走向数学思维

第一章 数学中的抽象	2
1.1 数学：模式的科学	2
1.2 数学与无限	26
第二章 数学中的分类、类比与归纳	34
2.1 数学中的分类与类比	34
2.2 数学中的归纳	53

II 概念性数学思维与问题性数学思维

第三章 代数(算术)思维与几何思维	67
3.1 “凝聚”：算术与代数思维的基本形式	68
3.2 几何学习过程中的思维活动	77