面向21世纪高职高专规划教材

主编◎周秀珍

Mathematics

高等数学

河海大学出版社

面向21世纪高职高专规划教材

Mathematics

高等数学

主　编◎周秀珍

副主编◎张红锋　于　海

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/周秀珍主编. —南京:河海大学出版社,
2008.8

ISBN 978-7-5630-2506-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—
教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 117152 号

书　　名　高等数学
书　　号　ISBN 978-7-5630-2506-0/O·144
责任编辑　隋亚安
特约编辑　谢　云
封面设计　杭永鸿
出版发行　河海大学出版社
地　　址　南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电　　话　(025)83737852(总编室)　(025)83722833(发行部)
经　　销　江苏省新华书店
印　　刷　南京玉河印刷厂
开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　19.75 印张　376 千字
版　　次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　32.00 元

前　言

高等职业教育在适应现代社会对人才的多样化需求、实施高等教育大众化方面作出了重大贡献，培养了大量高技能人才，受到了社会重视，得到了迅速的发展。

本教材是为适应高职高专学制短、学时少的教育特点而编写的。

本教材以实际问题引入概念，重视数学在实践中的应用，强化了学生对数学的应用意识，激发学习兴趣，有利于促进应用能力的提高。

本教材注重贯彻循序渐进的原则，精心设计教学内容，例题的选择、思考与练习的安排，都围绕理解基本概念、掌握基本运算方法为目标展开。语言表达通俗易懂，有利于学生课后阅读和优秀学生的提高训练。

本教材不注重数学概念的严密推理，避免繁琐的理论证明，而对有利于培养学生思维能力的定理证明或说明，力求做到表达确切、思维清晰，尽可能让学生从已有的几何、代数知识的背景中理解概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示，使数学教育不仅仅具备工具功能，而且还具备思维训练、文化修养、人才素质综合提高的功能。

本教材有配套使用的《高等数学学习指导》一书。因指导书中安排了较多的习题，故本教材没有再配置习题，以免增加学生负担。

本教材可供高职高专和成人高校学生使用，也可供自学者使用。

本教材由周秀珍任主编，由张红锋、于海任副主编。参加本教材编写的有：张红锋（第 1、2、3 章），于海（第 4、5、6 章），张洪波（第 7 章），朱彩兰（第 8 章），赵洁（第 9 章），张海川（第 10 章）。本教材在编写过程中得到了编者所在院系领导及同行的大力支持，在此一并致谢。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不当之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本教材在教学实践中不断完善。

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章
函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础. 极限方法是微积分的基本分析方法，它揭示了函数的变化趋势，又是建立微积分学其它基本概念（如导数、定积分等）的基础. 连续性是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后学习奠定必要的基础.

第一节　函　　数

由于高等数学主要在实数范围内研究函数，故本节将先复习一下实数的基本知识.

一、数轴上的区间

众所周知，实数与数轴上的点具有一一对应关系，为了简单起见，我们常用同一个数字或字母既表示某个实数又表示以此实数为坐标的数轴上的对应点，例如数$\sqrt{3}$与点$\sqrt{3}$，数 a 与点 a 等. 全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$，常用的实数集合还有区间.

1　区间

定义 1　介于某两个实数之间的全体实数的集合称为区间. 这两个实数称为区间的端点. 两端点间的距离（线段的长度）称为区间的长度.

区间包括有四种有限区间和五种无限区间.

（1）有限区间

设 a, b 为两个实数，且 $a<b$，则称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记作：(a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \quad [a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

(2) 无限区间

引入记号$+\infty$(读作“正无穷大”)及$-\infty$(读作“负无穷大”),则可类似地表示无限区间.

例如,$[a, +\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}=\{x \mid a \leqslant x\}$,$(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b\}=\{x \mid x<b\}$.这两个无限区间在数轴上表示的范围分别如图1-1、图1-2所示.

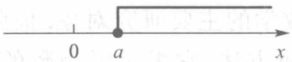

图 1-1

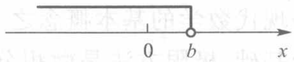

图 1-2

特别地,全体实数的集合 **R** 也可表示为无限区间$(-\infty, +\infty)$.

注:在本书中,当不需要特别辨明区间是否包含端点,是否有限或无限时,常将其简称为“区间”,并用 I 来表示.

2 邻域

定义 2　设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,则称数集$\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$为点 a 的 δ 邻域,记作:$N(a, \delta)$,即

$$N(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中,点 a 叫做该邻域的中心,δ 叫做该邻域的半径(见图 1-3).

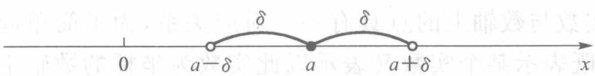

图 1-3

由于$a-\delta<x<a+\delta$等价于$|x-a|<\delta$,因此

$$N(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

若把邻域$N(a, \delta)$的中心a去掉,则所得的数集称为点a的去心δ邻域,记作:$\mathring{N}(a, \delta)$,即

$$\mathring{N}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函数的概念

1 函数的定义

在日常生活中,经常会遇到两种不同的量:一种是在某过程中保持不变、取一

个固定数值的量，称之为**常量**，如重力加速度，北京至扬州的直线距离等. 另一种是在某过程中会起变化的、可在一定的范围内取不同数值的量，称之为**变量**，如自然界中的温度、经济问题中的商品的价格等. 函数的实质就是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型，我们先看几个例子.

例 1　在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假设开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度.

例 2　设某厂家生产一种产品的产量 Q 与由该产品所获得的利润 L 之间的相依关系由一条曲线来确定，如图 1-4 所示.

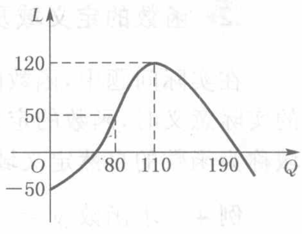

图 1-4

通过这条曲线可知，当产量 $Q=80$ 时，厂家获得的利润 $L=50$；当产量为 $Q=110$ 时，厂家获得最大利润 $L=120$.

例 3　某汽车销售公司某年度各月份的汽车销量如下表所示：

单位：辆

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销量 y	750	821	602	730	911	580	400	637	642	705	943	760

这张表格确定了月份 x 与各月份销量 y 这两个变量之间的统计关系，不同的月份都有唯一确定的销量与之对应. 例如：3 月份的销量为 602，10 月份的销量为 705.

定义 3　**设 D 是一个非空实数集合，若存在确定的对应规则 f，使得对于数集 D 中的任意一个数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在集合 D 上的函数. 记作：$y=f(x)$，$x\in D$.**

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 集合 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**.

对于 $x_0\in D$ 所对应的 y 值，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的**函数值**. 记作：

$$f(x_0)\quad 或\quad f(x)\big|_{x=x_0}\quad 或\quad y\big|_{x=x_0}.$$

全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**. 记作 Z. 这里的 $f(x)$ 是函数 f 在 x 处的函数值，$f(x)$ 与 f 二者并不相同，但是，人们往往是通过函数值研究函数的，因此通常也称 $f(x)$ 是 x 的函数，或者说 y 是 x 的函数.

从函数的定义不难看出，函数是由定义域和对应规则所确定的，因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时才表示同一个函数，

而与自变量及因变量用什么字母表示无关.如:函数 $y = f(x)$ 也可用 $y = f(t)$ 或 $u = f(x)$ 表示.

一般来说,常用 x 表示自变量,y 表示因变量,但对于在同一个问题中所遇到的不同函数,应该采用不同的记号.如:$f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ 等.

有时会遇到给定 x 值,对应的 y 值有多个的情形,为了叙述方便,我们称之为**多值函数**.而符合上述定义的函数称之为**单值函数**,例如:$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$ 是多值函数,而它的每一个分支 $y = \sqrt{9 - x^2}$ 或 $y = -\sqrt{9 - x^2}$ 都是单值函数.今后如不做声明,本书中提到的函数均指单值函数.

2 函数的定义域及函数值

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的.当不考虑函数的实际意义时,函数的定义域就取使函数表达式有意义的自变量的集合.这种定义域称为函数的自然定义域.

例 4 求函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ 的定义域.

解 该函数的定义域是使不等式

$$x^2 - 9 > 0$$

成立的 x 的全体,解此不等式得:$x > 3$ 或 $x < -3$,故函数的定义域为:$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

例 5 求函数 $y = \lg(1 - x^2) + \dfrac{1}{x}$ 的定义域.

解 该函数的定义域是使不等式组

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

成立的 x 的全体,解此不等式组得:$-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$,故函数的定义域为:$(-1, 0) \cup (0, 1)$.

例 6 设 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$,求 $f(3)$, $f(x-1)$, $f[f(x)]$.

解

$$f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4};$$

$$f(x-1) = \frac{x-1}{(x-1)+1} = 1 - \frac{1}{x};$$

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}.$$

例 7　设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}$,求 $f(x)$.

解　令 $\frac{1}{x}=t$,得 $x=\frac{1}{t}$,将其代入原函数,得

$$f(t)=\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1}=\frac{1-t}{1+t},$$

用 x 替换上式中的 t 得,$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

3 函数的表示法

(1) **表格法**　以表格形式表示函数的方法.表格法的优点是所求的函数值容易查得.如例 3.

(2) **图像法**　在坐标系中用图形来表示函数的方法.其优点是直观形象,且可以看到函数的变化趋势.如例 2.

(3) **解析法**　将自变量与因变量之间的关系用数学式子来表示的方法.其优点是便于理论推导和计算.如例 1.

根据函数的解析表达式的不同形式,函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种:

① **显函数**　函数 y 可由自变量 x 的表达式直接表示.例如,$y=x^2-3x+2$.

② **隐函数**　因变量与自变量的对应规则由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定.例如,$x+2y=e^{xy}$.

③ **分段函数**　在定义域的不同范围内具有不同的表达式.例如,绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

注:分段函数仍然是一个函数,而不是几个函数.

三、函数的特性

初等数学中已经介绍了函数的四个性质,这里,我们归纳如下:

1 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 M,对于任意的 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任意实数 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界函数,因为可以取无限接近于零的正数,使得函数的绝对值 $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 大于任何预先给定的正数 M. 但易见该函数在区间 $[1,+\infty)$ 内有界. 因此,我们说一个函数是有界的还是无界的,应同时指出其自变量的相应范围.

2 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D 关于原点对称,若对于任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对于任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 既不是奇函数又不是偶函数的函数称为**非奇非偶函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称. 如图 1-5、图 1-6 所示.

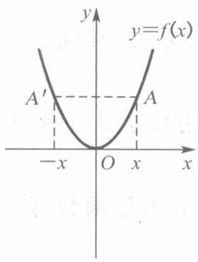

图 1-5

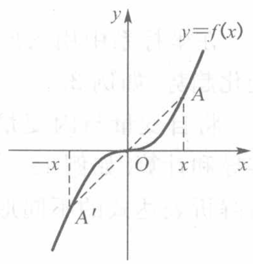

图 1-6

例如,函数 $y=\sin x$, $y=\tan x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

3 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意的 $x_1, x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**,如图 1-7 所示;若对任意的 $x_1, x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**,如图 1-8 所示.

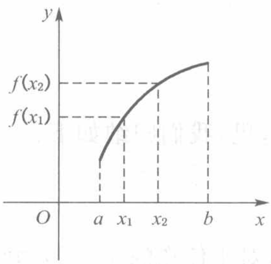

图 1-7

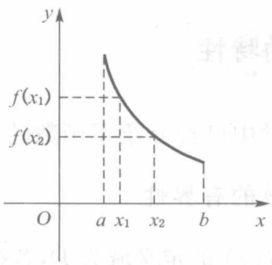

图 1-8

例如，函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加函数，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数. 而 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数.

4 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个实数 T，使得对任意的 $x\in D$，恒有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 若函数 $f(x)$ 的周期中存在一个最小正数 a，则称 a 为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称**周期**.

通常周期函数的周期就是指其最小正周期. 例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期为 2π，函数 $y=\tan x$，$y=|\cos x|$ 的周期为 π.

例 8　判断函数 $f(x)=x^2\cos x$ 的奇偶性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，又因为

$$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x),$$

所以该函数是偶函数.

例 9　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，又因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}\\&=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),\end{aligned}$$

所以该函数是奇函数.

四、基本初等函数

我们将在中学里学习过的常数函数 $y=C$；幂函数 $y=x^\alpha\ (\alpha\in\mathbf{R})$；指数函数 $y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$；对数函数 $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等六类函数统称为**基本初等函数**.

1 常数函数

常数函数 $y=C$（C 为常数）的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{C\}$. 是偶函数，

其图像是一条关于 y 轴对称的直线，如图 1-9 所示.

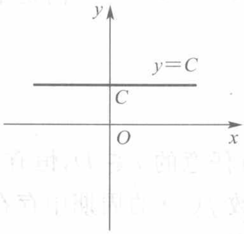

图 1-9

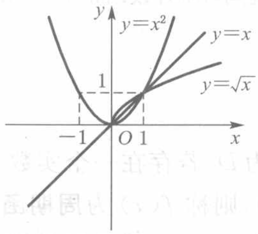

图 1-10(a)

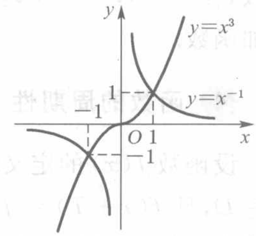

图 1-10(b)

2 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$；其定义域要依 α 的取值而定. 当 $\alpha=-1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3$ 时的函数图形，如图 1-10(a)(b)所示.

3 指数函数

指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$；其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少，如图 1-11 所示.

特别地，当底数 $a=\mathrm{e}(\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots)$ 时的指数函数为 $y=\mathrm{e}^x$.

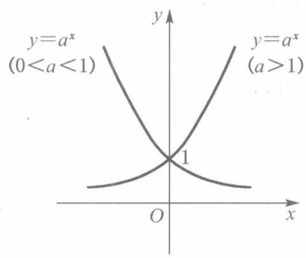

图 1-11

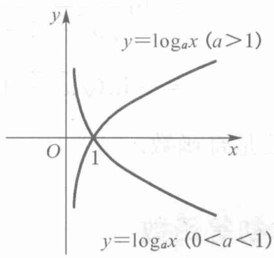

图 1-12

4 对数函数

对数函数是指数函数的反函数，记做 $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$；其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调减少，如图 1-12 所示.

特别地，当底数 $a=\mathrm{e}$ 时的对数函数叫做自然对数函数，记作 $y=\ln x$.

5 三角函数

常用的三角函数有如下四个：

(1) 正弦函数 $y=\sin x$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，是奇函数且周期为 2π 如图 1-13 所示.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，是偶函数且周期为 2π 如图 1-14 所示.

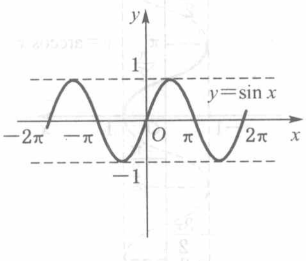

图 1-13

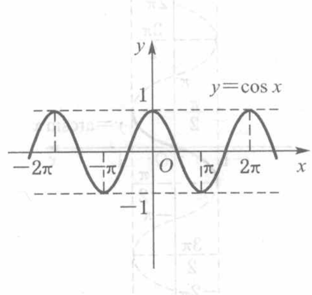

图 1-14

(3) 正切函数 $y=\tan x$，其定义域为$\{x \mid x\neq k\pi+\pi/2,\ k\in \mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，是奇函数且周期为 π 如图 1-15 所示.

(4) 余切函数 $y=\cot x$，其定义域为$\{x \mid x\neq k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，是奇函数且周期为 π 如图 1-16 所示.

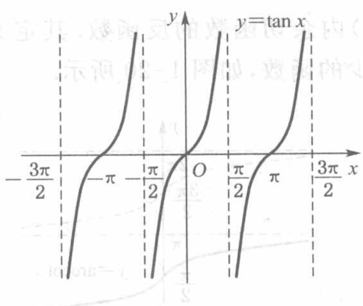

图 1-15

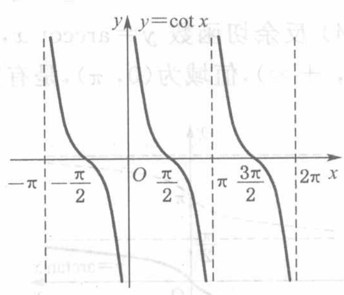

图 1-16

而正割函数是余弦函数的倒数，即 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数是正弦函数的倒数，即 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，反三角函数有如下四个：

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$,它是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上正弦函数的反函数.其定义域为$[-1, 1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,是有界、单调增加的奇函数,如图 1-17 所示.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$,它是$[0, \pi]$上余弦函数的反函数.其定义域为$[-1, 1]$,值域为$[0, \pi]$,是有界、单调减少的函数,如图 1-18 所示.

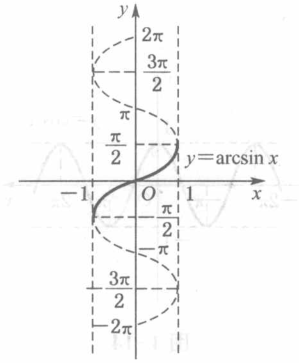

图 1-17

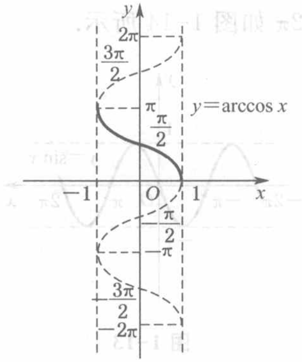

图 1-18

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$,它是$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内正切函数的反函数.其定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,是有界、单调增加的奇函数,如图 1-19 所示.

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,它是$(0, \pi)$内余切函数的反函数.其定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, \pi)$,是有界、单调减少的函数,如图 1-20 所示.

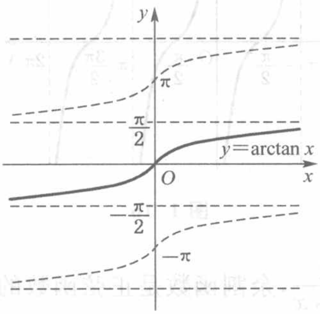

图 1-19

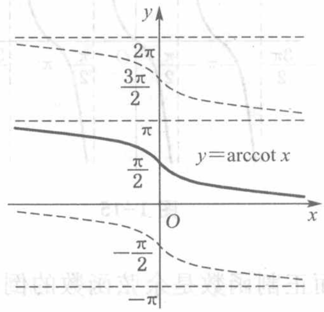

图 1-20

五、复合函数

设函数 $y=F(u)$ 的定义域为 D,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z,若 $Z \cap D \neq \phi$,则

y 可通过中间变量 u 构成 x 的函数，称函数 $y=F[\varphi(x)]$ 为**复合函数**. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

例 10　已知函数 $y=\sqrt{u}$ 与函数 $u=x^2-1$，求它们的复合函数.

解　将 $u=x^2-1$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中，得复合函数

$$y=\sqrt{x^2-1},\ x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

注：不是任何两个函数都可以构成一个复合函数，例如：$y=\sqrt{u}$，$u=-x^2-1$ 就不能构成一个复合函数，因为 $u=-x^2-1$ 的值域 $D=(-\infty,-1]$ 与 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $Z=[0,+\infty)$ 交集为空，从而 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 无意义.

根据复合函数的概念，可以将较复杂的函数通过分解而表示成若干个简单函数的复合.

例 11　指出函数 $y=e^{\tan x}$ 是由哪些函数复合而成的.

解　函数 $y=e^{\tan x}$ 是由 $y=e^u$，$u=\tan x$ 复合而成的.

例 12　指出函数 $y=\ln\sin x^2$ 是由哪些函数复合而成的.

解　函数 $y=\ln\sin x^2$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成的.

六、初等函数

由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合构成，且可以用一个数学式子表示的函数，称为**初等函数**. 例如 $y=\log_a\sqrt{\sin x+e^x-3}$，$y=\dfrac{x^3+\ln\sqrt{x}}{\cos x}+e^x$ 等都是初等函数. 初等函数是高等数学的主要研究对象.

注：分段函数一般不是初等函数.

思考与练习

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f[f(x)]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，求 $f\{f[f(-3)]\}$.

3. 判断函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

第二节　建立函数关系举例

用数学方法解决实际问题，首先要找出该问题中各变量之间的关系，即构建该

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com