GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学
学习指导

周秀珍 主编

苏州大学出版社

高等数学学习指导

周秀珍　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/周秀珍主编. —苏州：苏州大学出版社，2007.9
ISBN 978-7-81090-947-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 周… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 136796 号

高等数学学习指导

周秀珍 主编

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路 200 号 邮编：215021)
丹阳市教育印刷厂印装
(地址：丹阳市西门外 邮编：212300)

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 16.75 字数 420 千
2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 印刷
ISBN 978-7-81090-947-1 定价：25.00 元

前　言

高等职业教育在适应现代社会对人才的多样化需求，实施高等教育大众化方面作出了重大贡献，培养了大量的高技能人才，受到了社会的重视，得到了迅速的发展.

本书结合高等职业教育学制短、学时少的教学特点，在内容上参照了教育部高职高专规划教材——《高等数学》(上、下册)第二版(修订版)，以学生为中心，以理解概念、强化应用、掌握基本运算方法为目的，进一步降低理论要求，不刻意追求运算的技能、技巧的训练，旨在使每一个学生都能从本书中获得启迪和收益.

为方便学生学习，本书与教材内容同步展开，共包含十一章. 每章均给出了学习要求、重点与难点和内容提要. 典型例题解析部分是本书的重点，尽量做到分析思路清晰，表达通俗易懂，除注意数学思想方法的阐述外，还注重一题多解，这些都有助于培养学生的发散性思维. 每章还配有适量的习题，供学生自我训练用. 按课时进展，本书还配有第一、二学期复习试题各四份，供学生自我检查用.

为满足部分学生进一步深造的需要，我们按“专转本”考试要求，编写了十套“专转本”模拟试卷，转印了 2001—2006 年“专转本”全真试题，供需要者学习、参考. 读者在使用过程中，可以根据实际情况考虑将本书中打“*”的内容略去.

本书适合于高职高专院校和成人高校学生及自学者作为学习参考书使用.

本书由周秀珍主编，参加本书编写的有：张红锋（第一章和"专转本"全真试题解答），赵洁（第二、三章），张海川（第四、五、六章及第一学期复习试题），张洪波（第七、八章），朱彩兰（第九、十章及第二学期复习试题），于海（第十一章及"专转本"模拟试卷解答），黄绍贤（"专转本"模拟试卷）．本书在编写过程中还得到了编者所在院系领导及同行的大力支持，在此一并致谢！

由于我们的水平有限，书中难免存在不当之处，恳请各位专家、学者不吝赐教，也欢迎广大读者批评指正．

编　者

2007 年 5 月

目　录

第一章

函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象和载体.极限则是研究函数的一种基本方法,它揭示了函数的变化趋势,又是微积分学中其他概念(如导数、定积分等)的基础.

一、学习要求、重点与难点

1. 学习要求

(1) 理解函数的概念及对应法则,能熟练地使用函数及函数值记号,了解分段函数,知道数列是自变量为正整数的函数,能熟练地求函数的定义域和函数值.

(2) 熟练掌握六类基本初等函数的性质和图形.

(3) 理解复合函数的概念,会熟练地分析复合函数的复合过程,了解初等函数的概念,会建立简单实际问题的函数关系式.

(4) 理解极限的概念,了解函数极限的描述性定义,了解左、右极限的概念.

(5) 理解无穷小量的概念、基本性质及其与无穷大量的关系,了解无穷小量的阶.

(6) 掌握极限的四则运算法则及计算极限的几种常见方法.

(7) 会用两个重要极限求极限.

(8) 理解函数连续与间断的概念,会求函数的间断点并判断

其类型，会求函数的连续区间.

(9) 了解闭区间上连续函数的性质，了解初等函数在其定义域内的连续性.

2. 重点

函数的概念，复合函数及初等函数的概念，求函数的定义域与函数值，极限的概念，极限的求法，两个重要极限以及函数在一点处连续的概念.

3. 难点

复合函数的运算及分段函数的连续性.

二、内容提要

1. 一元函数

(1) 函数的定义

若对集合 D 中任一实数 x，通过某一法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

函数的两个基本要素：定义域 D 和对应法则 f.

(2) 分段函数

在定义域内不同范围用不同的解析式表示的函数.

2. 函数的性质

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

(1) 有界性

若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，或称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

常见的一些有界函数：$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arctan x|\leqslant \frac{\pi}{2}$，$|\operatorname{arccot} x|\leqslant \frac{\pi}{2}$.

(2) 单调性

对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，若当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加函数，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调增加区间；若当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少函数，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调减少区间.

(3) 奇偶性

设 I 是关于原点对称的区间，若对任意的 $x \in I$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 上为偶函数；若对任意的 $x \in I$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 上为奇函数.

注　偶(奇)函数的定义域一定是关于原点对称的区间. 反之，若函数的定义域不关于原点对称，则该函数既不是奇函数也不是偶函数，称其为非奇非偶函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

(4) 周期性

若存在 $T \neq 0$，使得对任意的 $x \in I$，恒有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数.

通常所说周期函数的周期是指满足等式 $f(x+T) = f(x)$ 的最小正数 T，也就是 $f(x)$ 的最小正周期.

3. 反函数

设 y 是 x 的函数 $y = f(x)$，若把 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数，习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y = x$ 对称.

4. 初等函数

(1) 基本初等函数

① 常数函数　　$y = c$　(c 为任意常数).

② 幂函数　　$y = x^\alpha$　($\alpha \neq 0$).

③ 指数函数　$y=a^x$　($a>0$ 且 $a\neq 1$).

④ 对数函数　$y=\log_a x$　($a>0$ 且 $a\neq 1$).

⑤ 三角函数　$y=\sin x$，　$y=\cos x$，

$y=\tan x$，　$y=\cot x$，

$y=\sec x$，　$y=\csc x$.

⑥ 反三角函数　$y=\arcsin x$，　$y=\arccos x$，

$y=\arctan x$，　$y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 三角函数关系式

① 倒数关系

$$\sin x=\frac{1}{\csc x},\cos x=\frac{1}{\sec x},\tan x=\frac{1}{\cot x}.$$

② 商数关系

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x,\quad \frac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$$

③ 平方关系

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,1+\tan^2 x=\sec^2 x,1+\cot^2 x=\csc^2 x.$$

④ 二倍角公式

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

⑤ 积化和差

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)],$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)],$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)],$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)].$$

⑥ 和差化积

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

(3) 复合函数

设函数 $y=f(u)$，若 $u=\varphi(x)$ 的全部或部分函数值落在 $f(u)$ 的定义域内，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，u 称为中间变量.

(4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合构成，并且可以用一个解析式表示的函数.

注　分段函数一般不是初等函数.

5. 极限概念

(1) 数列极限

如果当 n 无限增大时，数列 $\{u_n\}$ 无限地接近于某一个确定的常数 A，那么就称 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$.

若数列 $\{u_n\}$ 的极限存在，则称数列 $\{u_n\}$ 是收敛的，否则称数列 $\{u_n\}$ 是发散的.

(2) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $N(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当 x 无限地接近于定值 x_0 时，函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或

$f(x)\to A(x\to x_0)$.

左极限：若 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)\to A$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

右极限：若 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)\to A$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

注 $x\to x_0^-$ 表示 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0，$x\to x_0^+$ 表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0.

(3) $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

如果当 $|x|$ 无限增大(即 $x\to\infty$)时，函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

6. 极限的性质

(1) 唯一性

若极限存在，则极限值必唯一.

(2) 有界性

① 若数列收敛，则数列必有界.

② 若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的极限存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个空心邻域内(或 $|x|$ 充分大范围内)有界.

(3) 单调有界数列极限必存在

*(4) 夹逼定理

若 $x\in \mathbf{N}(x_0,\delta)$ 时，恒有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 成立，且

$$\lim h(x)=\lim g(x)=A，则 \lim f(x)=A.$$

注 符号“lim”下面不标 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$，表示所述结果对两者都适用.

7. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量的定义

若$\lim\limits_{x \to \square} f(x)=0$,则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to \square$ 时的无穷小量,简称无穷小.

注　□代表 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$.

(2) 极限与无穷小的关系

$\lim\limits_{x \to \square} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to \square$ 时的无穷小量.

(3) 无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

推论　常数与无穷小之积仍为无穷小.

(4) 无穷大量的定义

若当 $x \to \square$ 时,函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to \square$ 时的无穷大量,简称无穷大,记作 $\lim\limits_{x \to \square} f(x)=\infty$.

注　无穷大量是极限不存在的情况,这里仅是借用极限的记号,不能认为它的极限存在.

(5) 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中,

① 若 $f(x)$ 为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小,即若$\lim\limits_{x \to \square} f(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{x \to \square}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

② 若 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大,即若 $\lim\limits_{x \to \square} f(x)=0$,则$\lim\limits_{x \to \square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

(6) 无穷小的阶

设 α 和 β 是同一变化过程中的两个无穷小，

① 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

② 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

③ 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小.

特别地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

(7) 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\arcsin x\sim x$，

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\ln(1+x)\sim x$， $e^x-1\sim x$.

8. 极限的运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

法则 1 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

推论 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$ (c 为常数).

法则 2 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

推论 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$ ($n\in\mathbf{N}_+$).

法则 3 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ ($B\neq 0$).

9. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，推广形式为 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，推广形式为 $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=e$.

注 其中 u 是 x 的函数.

(3) 几个常用的极限

① $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$.

② $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty\ (a>1)$.