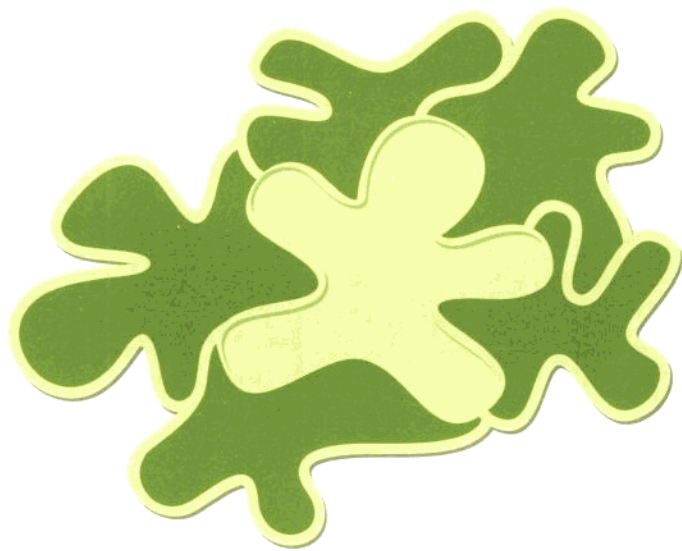


王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊辉



数学 九年级(上)

配华东师大版

丛书主编：王后雄

本册主编：梅建勇



中国青年出版社

王后雄学案

教材完全解读

数学 九年级(上)

配华东师大版

丛书主编:	王后雄	汪永发
本册主编:	梅建勇	陈春华
编委:	陈国庆	肖建华
	舒仲友	陈春林
	殷玉莲	陈艳生
	易金波	邵凤清
	张勤锋	付友松
	吕明寿	柯钟珍
	邵百才	马义元
	蔡开	王志勇

 导航 丛书系列

中国青年出版社

PDG

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读:华东师大版课标版.九年级数学.上/王后雄主编.

—4版.—北京:中国青年出版社,2008

ISBN 978-7-5006-6371-3

I.教... II.王... III.数学课—初中—教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第039547号

策 划:熊 辉

责任编辑:李 扬

封面设计:蔚 蓝

教材完全解读

数学 九年级(上) 配华东师大版

中国青年出版社 出版发行

社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

编辑部电话:(010)64034328

读者服务热线:(027)61883306

咸宁市海岳印务有限公司印制 新华书店经销

889×1194 1/16 12.25印张 327千字

2008年6月北京第4版 2008年6月湖北第4次印刷

印数:15001—20000册

定价:21.30元

本书如有任何印装质量问题,请与承印厂联系调换

联系电话:(027)61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

对每道题目标明能力层级，用A、B、C表示试题的难度系数，它们依次代表基础题、中难题、难题。

解题误区引导

“点击考点”栏目引导每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

1 物质的变化和性质

学习目标·考纲解读

(1)物理变化、化学变化(C·理解);(2)物理性质、化学性质(A·知道);(3)物质变化过程中伴随量变化(A·知道);(4)运用上述概念解释自然、生活中的一些现象(C·运用)。

1 知识·能力解读

1. 物理变化和化学变化

(1)物理变化:没有生成其他物质的变化。如:水结成冰、酒精挥发、湿衣服晾干。

(2)化学变化:生成其他物质的变化。如:石炭在氧气中燃烧生成二氧化碳、二氧化碳在高温高压下生成液态生成碳纳米管、石墨在一定条件下燃烧、食物腐败、火药爆炸等都是化学变化。

2 方法·技巧平台

2. 判断物质物理变化和化学变化的方法

(1)看有无新物质生成。有新物质生成的是化学变化，没有新物质生成的是物理变化。

(2)看是否发光、发热。发光、发热是化学变化的特征，但不是化学变化的本质。如:电灯发光、发热是物理变化。火药爆炸是化学变化，而爆炸物是物理变化。

(3)看是否有颜色、状态、气味、沉淀、气体、温度、压强等的变化。

3 创新·思维拓展

3. 宏观与微观、物理变化和化学变化的联系

许多物质的性质和变化都可以通过微观的分子和原子来解释。如:水受热蒸发、湿衣服晾干、空气液化、空气液化后加压制成液氮。

4 能力·进阶设计

▶A 下列日常生活中的变化属于化学变化的是()。

A. 矿石粉碎 B. 粮食酿酒 C. 冰块融化 D. 轮胎爆裂

▶A 下列物质在空气中久置，质量会增加的是()。

A. 生石灰 B. 浓硫酸 C. 浓盐酸 D. 氢氧化钠

名师解答

【例1】下列变化中，不属于化学变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈

C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例2】下列变化中，属于化学变化的是()。

A. 食物变质 B. 水结成冰 C. 酒精挥发 D. 铁钉生锈

【例3】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例4】下列变化中，属于化学变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例5】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例6】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例7】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例8】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例9】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

【例10】下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

点击考点

下列变化中，属于化学变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

下列变化中，属于物理变化的是()。

A. 纸张燃烧 B. 钢铁生锈 C. 冰雪融化 D. 食物腐败

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记

第1单元 走进化学世界 3

单元知识梳理与能力整合

一、回顾·知识串联

1. 本单元知识结构

化学的研究对象是物质结构

地位：物理性质和化学性质、物理变化、化学变化

变化规律：物理变化、化学变化

2. 实验·能力整合

1. 实验基本操作技能整合
2. 实验的场所
(1) 课堂的讲解

温馨提示：用第一人称或第三人称叙述时，注意第三人称了。

二、中考题例证

化学不仅是获取化学知识和学习科学探究的方法和手段，也是本单元的核心观念。中考例证命题分为：(1) 仪器用品；(2) 实验基本操作原理和方法(见上题)。

3. [2006·厦门] 在点燃酒精灯时，小明发现有一股白色的烟雾从灯管中冒出，他仔细观察，发现这股烟雾在灯管周围停留的时间，比酒精灯的火焰燃烧的时间要长。小明很好奇，于是进行了探究。

【实验探究】这股白雾是怎样形成的？

【实验探究】

实验名称：探究不同颜色的食盐对酒精灯火焰的影响。

【解析】 火焰颜色及成分与生活中常见的现象，如怎样区分食盐的颗粒大小，探究食盐颗粒大小对火焰颜色的影响，此题探究了食盐颗粒大小对火焰颜色的影响。

【答案】 实验名称：探究不同颜色的食盐对酒精灯火焰的影响。

① 食盐颗粒大小对火焰颜色的影响；② 食盐颗粒大小对火焰颜色的影响。

知识·能力同步测控

(测试时间: 30分钟) 测试满分: 100分)

一、单项选择题(每小题2分,共32分)

1. 化学是一门自然科学,学习化学的一个重要方法是

A. 计算 B. 测量 C. 实验 D. 推理

2. 下列仪器中,能用酒精灯火焰直接加热的有()

① 试管 ② 烧杯 ③ 坩埚 ④ 蒸发皿 ⑤ 锥形瓶 ⑥ 量筒

A. ①③④⑥ B. ①②③④⑤

C. ①③④⑤ D. ②③④⑤⑥

答案与提示

第1单元 走进化学世界

1. 物质的变化和性质

1. B 2. C 3. B 4. C

1. B 2. A 3. B 4. C

1. B 2. A 3. B 4. C

1. B 2. A 3. B 4. C

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

最新3年中考名题详解

汇集中考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好的答题习惯。

X导航丛书系列最新教辅

讲 《中考完全解读》 复习讲解—紧扼中考的脉搏

练 《中考完全学案》 难点突破—挑战思维的极限



《中考完全学案》

讲 《高考完全解读》 精湛解析—把握高考的方向

练 《高考完全学案》 阶段测试—进入实战的演练



《高考完全学案》

讲 《教材完全解读》 细致讲解—汲取教材的精髓

例 《课标导航基础知识手册》 透析题型—掌握知识的法宝

练 《教材完全学案》 夯实基础—奠定能力的基石

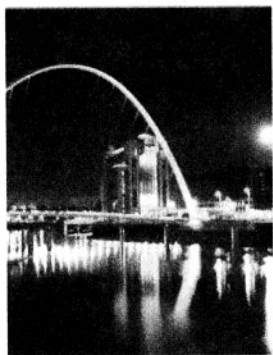


伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

学法指津.....1

第22章 二次根式

22.1 二次根式.....	4
22.2 二次根式的乘除法.....	7
22.3 二次根式的加减法.....	15
教材课后习题解答.....	20
单元知识梳理与能力整合.....	23
最新3年中考名题诠解.....	26
知识与能力同步测控题.....	29



第23章 一元二次方程

23.1 一元二次方程.....	32
23.2 一元二次方程的解法.....	35
23.3 实践与探索.....	43
教材课后习题解答.....	51
单元知识梳理与能力整合.....	56
最新3年中考名题诠解.....	59
知识与能力同步测控题.....	61



第24章 图形的相似

24.1 相似的图形.....	64
24.2 相似图形的性质.....	64
24.3 相似三角形.....	68
24.4 中位线.....	78
24.5 画相似图形.....	83

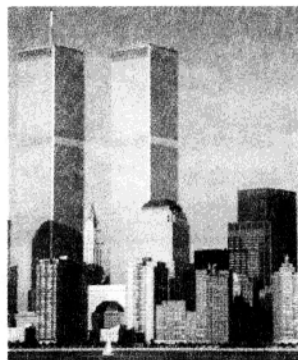


目 录

24.6 图形与坐标	87
教材课后习题解答	92
单元知识梳理与能力整合	98
最新3年中考名题詮解	101
知识与能力同步测控题	104

第25章 解直角三角形

25.1 测量	108
25.2 锐角三角函数	112
25.3 解直角三角形	119
教材课后习题解答	128
单元知识梳理与能力整合	132
最新3年中考名题詮解	136
知识与能力同步测控题	140



第26章 随机事件的概率



26.1 概率的预测	143
26.2 模拟实验	151
教材课后习题解答	153
单元知识梳理与能力整合	156
最新3年中考名题詮解	158
知识与能力同步测控题	162

期末测试题	164
-------	-----

答案与提示	166
-------	-----

知识与方法

阅读索引

第22章 二次根式

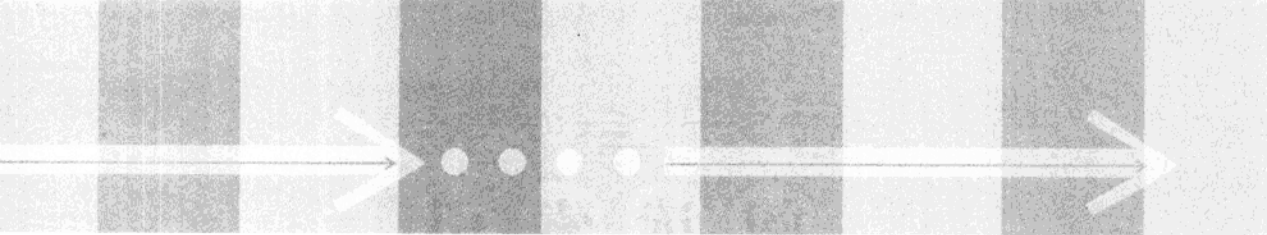
22.1 二次根式	
1. 二次根式的定义	4
2. 二次根式有意义的条件	4
3. 二次根式的性质	4
4. 增强对二次根式概念的理解,以及对二次根式性质的理解、比较,可加深对知识的深化记忆,有助于学好知识	5
5. 非负数及其应用	6
22.2 二次根式的乘除法	
1. 二次根式的乘法	7
2. 积的算术平方根	7
3. 二次根式的除法	8
4. 商的算术平方根	8
5. 最简二次根式	8
6. 关于二次根式的乘法应注意的几个问题	9
7. 关于二次根式的除法应注意的几个问题	9
8. 怎样化二次根式为最简二次根式	10
9. 如何把根号外的式子移入根号内	11
10. 分母有理化	12
22.3 二次根式的加减法	
1. 同类二次根式	15
2. 合并同类二次根式	15
3. 二次根式的混合运算	16
4. 怎样判定几个二次根式是不是同类二次根式	16
5. 二次根式化简求值的常用方法	17
6. 二次根式的大小比较	18

第23章 一元二次方程

23.1 一元二次方程	
1. 体会学习一元二次方程的重要性和必要性	32
2. 一元二次方程的概念	32
3. 一元二次方程的一般形式	32
4. 判别方程是否为一元二次方程的方法	33
5. 方程根的定义在一元二次方程中的应用	33
23.2 一元二次方程的解法	
1. 直接开平方法	35
2. 因式分解法	36
3. 配方法	36
4. 公式法	37
5. 灵活运用一元二次方程的四种基本解法解一元二次方程	39
6. 一元二次方程的根的情况的判别方法	39
7. 如何解答可化为一元二次方程的分式方程	40
23.3 实践与探索	
1. 列方程解应用题	43
2. 一元二次方程根与系数的关系	46
3. 一元二次方程根与系数的关系的应用	47
4. 解应用题的一般步骤与方法	48
5. 应用一元二次方程的根与系数关系解题时,应联系一元二次方程的定义及根的判别式一起考虑	48
6. 构造方程,明快简捷地解答问题	49

第24章 图形的相似

24.1 相似的图形	
24.2 相似图形的性质	
1. 相似形	64
2. 线段的比和比例线段	64
3. 相似多边形的特征	65
4. 比例的基本性质	65
5. 黄金分割	66
24.3 相似三角形	
1. 相似三角形的定义	68
2. 相似比的定义	68
3. 三角形相似的判定方法	69
4. 相似三角形的性质	71
5. 相似三角形的应用	73
6. 判定两个三角形相似通常的思考程序	73
7. 用“三点定形法”找相似三角形	74
8. 射影定理	75



24.4 中位线	
1. 三角形的中位线和梯形的中位线的定义	78
2. 三角形的中位线定理	78
3. 梯形的中位线定理	79
4. 三角形的重心及其性质	79
5. 梯形的面积公式	80
6. 利用三角形的中位线定理及梯形的中位线定理进行有关的计算和证明是本节内容的重点和难点	80
7. 相关内容拓展	80
24.5 画相似图形	
1. 位似图形	83
2. 位似图形的性质	83
3. 画位似图形的步骤	83
4. 位似中心的位置选取方法	84
5. 位似图形的分类	85
24.6 图形与坐标	
1. 用坐标表示地理位置	87
2. 平移变换与坐标变化	88
3. 轴对称变换与坐标变化	88
4. 平面直角坐标系下的位似变换的方法	88
5. 图形的放大或缩小的方法	89

第25章 解直角三角形

25.1 测量	
1. 利用相似三角形进行测量	108
2. 利用三角形全等进行测量	108
3. 利用勾股定理进行测量	108
4. 如何合理选择测量的方法	109
5. 影子上墙(坡)问题	110
25.2 锐角三角函数	
1. 正弦和余弦的概念	112
2. 正切和余切的概念	113
3. 三角函数的概念	113
4. 特殊角度(0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90°)的三角函数值	113
5. 锐角三角函数的性质	114

6. 同角三角函数的关系	114
7. 特殊角的三角函数值的记忆方法	115
8. 利用计算器求任意锐角的三角函数值	115
9. 已知三角函数值用计算器求相应的锐角	115
10. 已知一种三角函数值求其他三角函数值的方法	116
11. 几组重要公式	116
12. 三角形面积公式	117
25.3 解直角三角形	
1. 解直角三角形	119
2. 直角三角形的边角关系	119
3. 直角三角形的可解类型及解法	119
4. 解直角三角形的应用	121
5. 解直角三角形应用题的一般步骤	122
6. 如何解直角三角形的非基本类型的题型	122
7. 如何解较复杂的直角三角形应用题(需设未知数)	123
8. 最佳测量方案的设计	124
9. 探索性问题的解法	124

第26章 随机事件的概率

26.1 概率的预测	
1. 概率的含义	143
2. 用实验估计概率	144
3. 用逻辑推理预测概率	144
4. 在最简单的问题情景下如何预测概率	145
5. 在复杂情况下如何预测概率	145
6. 利用概率估计游戏的公平性的方法	146
7. 概率的特性	147
8. 小概率事件,大概率事件和对立事件	147
9. 利用概率作决策	148
26.2 模拟实验	
1. 模拟实验	151
2. 模拟实验的方法	151
3. 选择适当的工具进行模拟实验	152
4. 应用——白球有多少个	152

学 法 指 津

——怎样学好九年级数学

新课标的实施,使我国的基础教育经历着一场深刻的变革.培养学生的创新精神、创新意识,注重学生探索能力、实践能力的提高,成为九年级数学教育的重要目标.这就给我们每一位学生提出了一个新的问题:怎样学好新课标九年级数学呢?是继续沿袭死记硬背的老路还是大搞题海战术?相信你在拥有了《王后雄学案·教材完全解读》九年级数学后,会茅塞顿开,找到适合自己的学习方法.

总的来说,要学好九年级数学,应注重培养浓厚的学习兴趣,养成良好的学习习惯,掌握正确的学习方法,强化智能的全面提高,用心去做,努力思考,是你走向成功的阶梯.对于即将走进中考考场的你来说,可以从如下几个方面进行尝试:

一、学会正确的学习方法

“授人以鱼,不如授人以渔”.掌握正确的方法往往能起到事半功倍的效果.要认真了解知识产生及形成的过程,掌握重点,灵活运用,并能对课本例题、习题进行变式引申研究,要善于归纳总结各知识点之间的网络结构,并且重视知识网络的交汇点,这是你学好九年级数学的基础.

一种行之有效的学习方法是:预习——听课——复习.

1. 课前预习. 九年级数学知识容量大,内容多,学习时间紧,要提高学习效率,必须使自己的思维与老师的思维同步.而预习则是达到这一目的的重要途径.没有预习,听老师讲课,会感到老师的讲解都很重要,抓不住老师讲的重点;而预习之后,再听老师讲课,就会在记忆上对老师讲的内容有所取舍,把重点放在自己还未掌握的内容上,从而提高学习效率.

2. 认真听讲. 上课要认真听讲,并不是要求把老师讲解的每道题都记下来(这样学习时要花费很多时间).只要是自己已经掌握,解题思路也与老师所讲一致的题目就大可不必花费太多的时间.关键是要记住那些自己不懂或自己已懂但理解不透彻的知识.记的时候也要注意方法,最好不要在老师讲的时候同时记,这样老师讲的一些没办法写出来的思路就有可能被漏掉.

3. 课后复习. 课后应及时把老师讲的和板书的知识像放电影一样,在脑子里过一遍,看看能想起多少,忘了多少.然后翻开笔记,查漏补缺.而复习主要靠练习来巩固,也不必漫无边际地练习,凡是老师布置的练习一定要按时完成.因为老师布置的习题一般都有较强的针对性,是用来巩固所学新知识的.

二、养成良好的学习习惯

“好习惯受益终身”.在学习过程中,应该勤于思考,要有打破沙锅问到底的精神.中考数学命题注重考查知识的应用能力,这些应用试题以富有趣味、立意新颖的背景将数学知识渗透到实际生活中,成为中考的一个亮点.但这些应用试题却成为学生学习的难点.“磨刀不误砍柴工”,因此,要耐心读题,认真审题,准确地吸收题目中的信息进行加工、提炼,构造数学模型,转化为数学问题,从而准确求解.

使用《教材完全解读》时,要养成循序渐进、由浅入深、坚持不懈的习惯.本书选例编排上具有“实用、高效、新颖、精巧”的特点,因此应深入了解其特点,有针对性地学习.“名师诠释”与“三讲”讲例对照,双栏排版,讲究答题规范性,应仔细参考,深入领会;“点击考点”凸现测试要点,与讲例互相印证,为大家提供解题依据与思路,当你解题不知从何入手时,认真研读,必有收获;另外,还有“教材课后习题解答”“单元知识梳理与能力整合”“最新3年中考名题诠释”等栏目,也都是为广大考生所想,以最亲和的姿态贴近你的学习生活,要注意合理斟酌并选用,关键是在你的头脑中形成一套学习数学的知识体系,学之有序.

三、培养优秀的思维品质

数学不是枯燥的,它是很锻炼思维的.因此,首先要注意探究性学习.中考试题中,跨学科综合性题目越来越受关注,要进行探究性学习,逐步培养自己的探索、创新能力.在平时解题时,既要注意收集新的信息,又要善于归纳总结.既要归纳知识,也要总结解题方式方法,力求探索新的解题思路.

例如,已知:在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=2\angle C$, $AD\perp BC$ 于 D , M 是 BC 的中点.求证: $AB=2MD$.本题在思考过程中,由 M 是 BC 的中点,可联想到三角形的中位线,于是可取 AC 的中点 F ,连结 DF ,于是证 $DM=FM$ 即可,这就是第一种解答方法.若考虑到 AB 是 $Rt\triangle ABD$ 的斜边,而直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半,于是可考虑取 AB 的中点 N ,连结 DN , MN ,从而证明 $DM=DN$ 即可,这便是本题的第二种解法.

又如,已知:在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$,延长 AB 到 D 使 $BD=AB$, E 为 AB 的中点.求证: $CD=2CE$.在解答本题时,考虑到要证明 $CD=2CE$,涉及线段的两倍问题,于是可延长 CE 到 F ,使 $EF=CE$.从而只需证明 $\triangle CBD\cong\triangle CBF$ 即可,这是第一种解法.这种解法的另一方面可考虑 CD 的一半.为此,可取 CD 的中点 G .连结 BG ,然后证明 $\triangle BCE\cong\triangle BCG$ 即可.从而得第二种解法.本题还可考虑:1.取 AC 的中点 H ,连结 BH ,从而证明 $\triangle ABH\cong\triangle ACE$,2.过 B 作 $BM\parallel CE$ 交 AC 的延长线于 M .从而证明 $\triangle ACD\cong\triangle ABM$,3.取 BC 的中点 N ,取 BD 的中点 P ,连结 EN , PN ,从而证明 $\triangle NCE\cong\triangle BNP$.于是便有第三、第四、第五种方法.而除这些方法之外,还可考虑 $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ 从而证明 $\triangle ACE\sim\triangle ADC$,这是几种方法中最简单的一种.

其次,还要切实领悟数学思想方法.数学思想方法隐含在数学知识的产生、发展过程中.在学习中,要善于领悟常用的数学思想方法.九年级数学涉及的主要数学思想和方法有:数形结合思想、转化思想、分类讨论思想、方程思想、函数思想、概率与统计思想、配方法、待定系数法等,这些数学思想方法隐含在数学知识的产生、发展过程中,没有专门的章节介绍.在学习中,你要善于领悟和积累这些常用的数学思想、方法,并能逐步转化为自己的经验,从而形成自觉运用它们解决问题的意识.

再次,要善于构建数学模型.在新课标的要求下,出现了越来越多的实际应用问题,这些问题往往以富有趣味、立意新颖的背景将数学知识融汇到实际生活中,成为学生学习的难点.因而,你要耐心地读题、审题,准确地吸收题中的信息,并对它进行加工、提炼,使之转化为数学问题,再运用数学方法来解决.当然,平时学习你要多关注生活实际、科技发展、社会热点,有意识地进行研究性学习.

最后,要想取得好的学习成绩,真正学好九年级数学,还必须经常和老师、同学保持交流,特别是到了九年级,如果这个阶段的问题遗留下来,将直接影响到你的考试成绩.

总之,《王后雄学案·教材完全解读》试图让学生在“学会”数学的过程中“会学”数学.“学贵持恒”,只要你有希望,就会付出努力;只要你努力,终究会有收获.最后,以一副对联寄予同学们以希望,也借以与广大师生共勉:

苦心人,天不负,破釜沉舟,百二秦关终属楚.

有志者,事竟成,卧薪尝胆,三千越甲可吞吴.

第 22 章 二次根式

课标单元知识

◆ 1. 教材知识解读 ◆

本章的主要内容是二次根式的性质和运算. 一方面紧密配合空间与图形中勾股定理的有关内容, 另一方面直接为下一章学习一元二次方程打下必要的基础.

(1) 本章在数的开方的基础上, 比较系统地讲述了二次根式的概念、性质和运算.

(2) 二次根式的有关概念是化简二次根式和运算的基础, 其中最重要的概念是最简二次根式.

(3) 二次根式的性质是二次根式化简与运算的根据. 二次根式的主要性质是① $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$;

$$\textcircled{2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0); \textcircled{3} a^2 = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$$

(4) 本章的主要内容是二次根式的化简与运算, 有关概念和性质都是为二次根式的化简作准备的, 其乘法运算可联想多项式的乘法进行, 而除法先写成分式形式, 再进行分母有理化; 二次根式加减法运算则是在化简的基础上去括号和类比分合并同类项进行运算, 其运算结果一般要化成最简二次根式.

◆ 2. 考试说明要求 ◆

(1) 理解二次根式、最简二次根式的概念, 会辨别最简二次根式.

(2) 掌握二次根式的性质, 能根据二次根式的性质熟练地化简二次根式.

(3) 通过对二次根式的积、商的算术平方根的性质学习, 化简二次根式, 并会进行简单的二次根式的乘除运算.

(4) 通过最简二次根式和同类二次根式的学习, 会进行二次根式的加减及混合运算.

◆ 3. 学习方法导航 ◆

本章的主要内容是二次根式的化简和运算, 因此在学习本章除了要加强对运算法则的理解外, 还要加强运算的练习.

在学习本章时, 应注意如下几点:

(1) 在本章的学习中要注意两个概念的学习, 即二次根式及最简二次根式, 在理解这两个概念时, 要特别注意

它们的限制条件.

注重概念的理解. 对于本章的概念, 如最简二次根式, 不要死记硬背. 给一个二次根式, 能判断它是不是最简二次根式. 如果不是, 会把它化简成最简二次根式, 这就表示已学好了最简二次根式的概念.

(2) 在应用二次根式的性质化简二次根式时, 要特别注意被开方数中字母的取值范围. 对于二次根式, 首先要明确被开方数必须是非负数, 也就是说, 对于 \sqrt{a} , 要求 $a \geq 0$, 它才在实数范围内有意义.

(3) 在进行二次根式的加减运算时, 要理解运算法则, 要会“类比”联想, 在运算中提高能力. 在进行二次根式的化简与运算时, 往往需要先将式子中的二次根式适当化简. 例如, 在进行除法运算时, 适当化简就可能利用约分简化运算; 又如, 在进行加减运算时, 则必须将各根式化成最简根式, 并注意只有同类根式才能进行加减合并.

(4) 在进行二次根式的乘除法运算过程中, 主要是利用积或商的算术平方根的性质将被开方数中能开得尽的数或式进行化简, 将被开方数是分数或分式的二次根式进行化简.

中考命题趋向

二次根式是初中“数与代数”的重要内容, 是数形结合的重要切入点, 通过它的学习可以把勾股定理和实数紧密联系起来, 是近年来各地中考的重点考试内容.

1. 二次根式的意义及其简单性质都是比较重要的知识点, 是后继学习二次根式内容的重要基础, 这些内容往往与二次根式的其他性质综合考查, 单独考查此知识点的试题比较少. 题型以填空题、选择题较为多见.

2. 二次根式的乘除法可以用来进行二次根式的化简、计算, 命题形式一般是填空题、选择题、计算题和化简题. 它在中考试题中出现的频率较高.

3. 二次根式的加减法以理解最简二次根式和同类二次根式为基础, 命题形式多种多样, 既有填空题、选择题、计算题或化简题, 也有阅读理解题或开放题.

4. 中考中, 二次根式还常常出现在混合运算或化简求值等中型题中, 是中考必考内容, 内容要求较高, 需熟练掌握. 题型多以计算、化简或化简求值的形式出现.

22.1 二次根式

学习目标·考纲解读

(1)理解二次根式的定义,会判断一个代数式是否是二次根式;(2)理解二次根式有意义的条件,会求解有关根式中字母的取值范围的问题;(3)掌握二次根式的一些基本性质,会用二次根式的非负性等解决一些二次根式化简和代数式求值的问题;(4)能灵活运用二次根式的定义及有关性质,综合有关知识,解决一些现实生活中的实际问题.

1 知识·能力聚焦

1. 二次根式的定义

形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子叫二次根式.

如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 、 $\sqrt{32}$ 、 $\sqrt{0}$ 等式子,都叫二次根式. 结合我们以前学习的知识,可以看出,二次根式实质上就是非负数的算术平方根. 如二次根式 $\sqrt{5}$,实质上就是5的算术平方根;二次根式 $\sqrt{0}$,实质上就是0的算术平方根;二次根式 \sqrt{a} ($a \geq 0$),实质上就是非负数 a 的算术平方根,正因为二次根式的实质就是非负数的算术平方根,因此我们可以运用平方根、算术平方根的一些性质来研究二次根式的性质.

2. 二次根式有意义的条件

二次根式 \sqrt{a} 有意义的条件是 $a \geq 0$.

由于 \sqrt{a} 表示 a 的算术平方根,我们知道只有正数和零才有平方根和算术平方根,而负数没有平方根和算术平方根,因此二次根式中的被开方数必须是非负数,即只有被开方数 $a \geq 0$ 时,式子 \sqrt{a} 才是二次根式, \sqrt{a} 才有意义;反之,若 $a < 0$,则式子 \sqrt{a} 就不能叫二次根式,即 \sqrt{a} 无意义.

3. 二次根式的性质

(1)二次根式的非负性: $\sqrt{a} \geq 0$ ($a \geq 0$).

因为二次根式 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 表示 a 的算术平方根,所以 $\sqrt{a} \geq 0$ 这个性质也是非负数的算术平方根的性质,和绝对值、偶次方相类似. 这个性质在解答题目时应用较多,如若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$,则 $a = 0, b = 0$;若 $\sqrt{a} + |b| = 0$,则 $a = 0, b = 0$;若 $\sqrt{a} + b^2 = 0$,则 $a = 0, b = 0$.

(2) $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$).

因为 \sqrt{a} 是 a 的算术平方根,由平方根的定义可以推出 $(\sqrt{a})^2 = a$,如 $(\sqrt{2})^2 = 2$; $(\sqrt{8})^2 = 8$; $(\sqrt{x})^2 = x$ ($x \geq 0$); $(\sqrt{m^2})^2 = m^2$. 反过来,一个非负数 a 也可以写成它的算术平方根的形式,即 $a = (\sqrt{a})^2$ ($a \geq 0$). 例如 $2 = (\sqrt{2})^2$, $\frac{1}{2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$, $x = (\sqrt{x})^2$ ($x \geq 0$).



名师诠释

[考题1] 判断下列各式,哪些是二次根式?

- (1) $\sqrt{6}$; (2) $\sqrt{-18}$; (3) $\sqrt{x^2+1}$; (4) $\sqrt[3]{-8}$;
 (5) $\sqrt{x^2+2x+1}$; (6) $\sqrt{-(2x-1)^2}$; (7) $\sqrt{|x|}$;
 (8) $\sqrt{(1+2x)} \left(x < -\frac{1}{2}\right)$.

[解析] 根据二次根式的意义,(1)(3)(5)(7)是二次根式,因为它们都含二次根号,被开方数都是非负数;(2)不是二次根式,因为(2)的被开方数为负数;(4)不是二次根式,因为(4)的根指数为3,不符合二次根式的定义;(6)当 $x = \frac{1}{2}$ 时,是二次根式;(8)在 $x < -\frac{1}{2}$ 的条件下,本身就无意义,因此不是二次根式,只有在 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时,(8)才是二次根式.

[答案] (1)(3)(5)(7)是二次根式.

[点评] 判断一个式子是不是二次根式,一定要紧扣定义,看所给的式子是否同时具备二次根式的两个特征:(1)带二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”;(2)被开方数不小于0,只要同时满足这两个特征,它就是二次根式;否则,它就不是二次根式.

[考题2] 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}}$ 的自变量的取值范围是

(2007年泰州中考)

[解析] 由题意得 $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2. \end{cases}$

\therefore 当 $-1 \leq x < 2$ 时函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}}$ 有意义.

[答案] $-1 \leq x < 2$

[点拨] 分析此题可获取以下主要信息:

(1) $x+1 \geq 0$, (2) $2-x > 0$.

解本题就是求出使上述两个条件都成立的 x 的范围.

[点评] 要使二次根式有意义,必须使被开方数是非负数,分母中有字母时必须保证分母不为零. 满足题意的字母的值就是同时满足所有限制条件的字母的值.

[考题3] $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义,则 x 的取值范围是().

这个性质在因式分解和分式化简中应用较广泛,如在实数范围内分解因式:

$$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2});$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})^2;$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \text{ 等.}$$

$$(3) \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0), \\ -a (a < 0). \end{cases}$$

这个性质我们可以通过不完全归纳法得出.

$$\text{如 } \sqrt{2^2} = 2; \sqrt{3^2} = 3; \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}; \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2); \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5); \sqrt{0^2} = 0 = \pm 0; \dots$$



2 方法·技巧平台

4. 增强对二次根式概念的理解,以及对二次根式性质的理解、比较,可加深对知识的深化记忆,有助于学好知识

(1) 在化简 $\sqrt{a^2}$ 时,一定要弄明白被开方数的底数 a 是正数还是负数,若是正数或零,则等于 a 本身,即 $\sqrt{a^2} = |a| = a (a \geq 0)$; 若 a 是负数或零,则等于 a 的相反数 $-a$,即 $\sqrt{a^2} = |a| = -a (a < 0)$. 如化简式子 $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ 时,先将 $x^2 - 2x + 1$ 分解因式,化成 $\sqrt{(x-1)^2}$,再根据 x 的取值范围分别进行化简,当 $x \geq 1$ 时, $x-1 \geq 0$,所以 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1$; 当 $x < 1$ 时, $x-1 < 0$,所以 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x$.

(2) 反过来,若 $\sqrt{a^2} = a$,则可知 $a \geq 0$; 若 $\sqrt{a^2} = -a$,则可知 $a \leq 0$. 如已知 $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$,可知 $x-1 \geq 0$,所以 $x \geq 1$. 若已知 $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$,可知 $x-1 \leq 0, x \leq 1$.

(3) $\sqrt{a^2}$ 中 a 的取值范围可以是任意实数,即不论 a 取什么数, $\sqrt{a^2}$ 一定有意义.

(4) 化简 $\sqrt{a^2}$ 时,先将它化成 $|a|$,再根据绝对值的意义来进行化简.

(5) $\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2$ 的异同:

不同点: ① $\sqrt{a^2}$ 中 a 可以取任何实数,而 $(\sqrt{a})^2$ 中的 a 必须取非负数.

② $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$, 而 $\sqrt{a^2} = |a|$.

A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

(2007年浙江宁波市)

[解析] 二次根式有意义的条件是被开方数为非负数,即 $x-1 \geq 0, x \geq 1$,故选择 B.

[答案] B

[考题4] 计算或化简:

$$(1) (\sqrt{2.5})^2; (2) (3\sqrt{7})^2; (3) \sqrt{289}; (4) \sqrt{(-21)^2}.$$

[解析] (1)(2)题利用公式 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 求解, (3)(4)利用公式 $\sqrt{a^2} = a (a \geq 0)$ 求解.

$$\text{[答案]} (1) (\sqrt{2.5})^2 = 2.5.$$

$$(2) (3\sqrt{7})^2 = 3^2 \times (\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63.$$

$$(3) \sqrt{289} = \sqrt{17^2} = 17.$$

$$(4) \sqrt{(-21)^2} = \sqrt{21^2} = 21.$$

[考题5] (1) 已知 $x < 2$, 则化简 $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ 的结果是().

A. $x-1$ B. $x+2$ C. $-x-2$ D. $2-x$

(2) 若 $x \leq 0$, 则化简 $|1-x| - \sqrt{x^2}$ 的结果是().

A. $1-2x$ B. $2x-1$ C. -1 D. 1

(3) 若化简 $|1-x| - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ 的结果为 $2x-5$, 则 x 的取值范围是().

A. x 为任意实数

B. $1 \leq x \leq 4$

C. $x \geq 1$

D. $x \leq 4$

(4) 实数 a, b 在数轴上的位置如图 22-1-1 所示, 那么化简 $|a-b| - \sqrt{a^2}$ 的结果是().

A. $2a-b$

B. b

C. $-b$

D. $-2a+b$

图 22-1-1

[解析] (1) 根据 $\sqrt{a^2} = -a (a \leq 0)$ 可知 $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x (x < 2)$; (2) 由于 $x \leq 0$, 所以 $1-x > 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, 则 $|1-x| - \sqrt{x^2} = 1-x+x=1$; (3) $|1-x| - \sqrt{x^2 - 8x + 16} = |1-x| - |x-4|$, 若 $|1-x| - |x-4| = 2x-5$ 成立, 则必是 $(x-1) + (x-4) = 2x-5$, 所以 $1-x \leq 0$, 且 $x-4 \leq 0$, 故 $1 \leq x \leq 4$; (4) 依图 22-1-1 可知: $a > 0, b < 0$, 且 $|b| > |a|$, 所以 $a-b > 0$, 则 $|a-b| - \sqrt{a^2} = |a-b| - |a| = a-b-a = -b$.

[答案] (1) D (2) D (3) B (4) C

[点评] 对于形如 $\sqrt{a^2}$ 的式子的化简, 首先应化成 $|a|$ 的形式, 再分析题中 a 的条件. 第(1)和第(2)题中已知明确的范围, 第(4)题需从数轴上读取相关的范围, 第(3)题则逆向猜想字母的取值范围.

[考题6] 若 $|a-b+1|$ 与 $\sqrt{a+2b+4}$ 互为相反数, 则 $(a+b)^{2004} =$ _____.

(2004年河南省)

[解析] 因 $|a-b+1|$ 与 $\sqrt{a+2b+4}$ 互为相反数, 故 $|a-b+1| + \sqrt{a+2b+4} = 0$. 因 $|a-b+1| \geq 0, \sqrt{a+2b+4} \geq 0$, 故 $|a-b+1| = 0, \sqrt{a+2b+4} = 0$. 所以 $a-b+1=0, a+2b+4=0$, 由此可求 a, b .

[答案] 依题意得

$$|a-b+1| + \sqrt{a+2b+4} = 0.$$

由非负数的性质得

$$\begin{cases} a-b+1=0, \\ a+2b+4=0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-2, \\ b=-1. \end{cases}$$

相同点:都是非负数,当 a 取非负数时, $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$.

3 创新·思维拓展

5. 非负数及其应用

(1)非负数:正数和零统称为非负数.

到现在为止,我们共学习了三类非负数,分别是绝对值,完全平方和二次根式,即像 $|a|, a^2, \sqrt{a}(a \geq 0)$ 形式的数都表示非负数.其中 \sqrt{a} 的非负性是双重的,一方面 $\sqrt{a} \geq 0$,而且要求 $a \geq 0$.

(2)非负数的性质:

- ①最小的非负数是零;
- ②若几个非负数的和为零,则每个非负数都是零.

4 能力·题型设计

1A 要使二次根式 $\sqrt{x+1}$ 有意义, x 的取值范围必须满足的条件是().

- A. $x \geq 1$ B. $x \leq 1$
C. $x > 1$ D. $x < 1$

2A 化简 $\sqrt{16}$ 的值为().

- A. 4 B. -4 C. ± 4 D. 16

3A 下列式子中二次根式的个数为().

$$\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{-3}, -\sqrt{x^2+1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2},$$

$$\sqrt{1-x}(x > 1), \sqrt{x^2+2x+3}$$

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

4A 若 $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$,则 a 必须满足的条件是().

- A. $a > 0$ B. $a \geq 0$
C. $a \leq 0$ D. a 为任意实数

5A 已知 x, y 为实数,且 $\sqrt{x-1}+3(y-2)^2=0$,则 $x-y$ 的值为().

- A. 3 B. -3 C. 1 D. -1

6A 下列说法正确的是().

- A. 若 $\sqrt{a^2}=-a$,则 $a < 0$
B. 若 $\sqrt{a^2}=a$,则 $a > 0$
C. $\sqrt{a^3b^3}=a^2b^2$
D. 5的平方根是 $\sqrt{5}$

7B 实数 a, b 在数轴上的位置如图22-1-2所示,那么化简

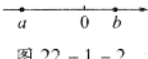


图 22-1-2

$|a-b|-\sqrt{a^2}$ 的结果是().

- A. $2a-b$ B. b
C. $-b$ D. $-2a+b$

8B 若化简 $|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}$ 的结果为 $2x-5$,则 x 的取值范围是().

$$\therefore (a+b)^{2004} = (-2-1)^{2004} = 3^{2004}.$$

[考题7] 若 m 适合关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m} = \sqrt{x-199+y} \times \sqrt{199-x-y}$,试确定 m 的值.

[解析] 注意到 $x-199+y$ 与 $199-x-y$ 互为相反数,而且 $x-199+y \geq 0, 199-x-y \geq 0$ 同时成立,故有 $x-199+y=0, x+y=199$ ①,代入已知等式中,得 $\sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m}=0$,又 $\sqrt{\quad}$ 算术平方根都是非负数, $\therefore \sqrt{3x+5y-2-m}=0$ ②, $\sqrt{2x+3y-m}=0$ ③,然后由①、②、③即可求出 m 的值.

[答案] 由算术平方根的意义,设

$$\begin{cases} x-199+y \geq 0, \\ 199-x-y \geq 0. \end{cases} \text{即 } x+y=199, \text{代入已知等式,得}$$

$$\sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m}=0.$$

$$\therefore \sqrt{3x+5y-2-m} \geq 0, \sqrt{2x+3y-m} \geq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} 3x+5y-2-m=0, \\ 2x+3y-m=0, \\ x+y=199. \end{cases} \text{解得 } m=201.$$

点击考点

测试要点1.2

2006年四川泸州中考题

测试要点2.3.4

2008年湖北荆州模拟题

测试要点2.4

2007年湖北武汉中考题

测试要点1

测试要点2.4

测试要点3.4

2005年江苏泰州中考题

测试要点3.5

2005年湖北黄冈中考题

测试要点3

测试要点3.4

2005年湖北襄樊中考题

测试要点3.4.5

测试要点4.5

2008年湖北黄冈模拟题

测试要点3.5

测试要点3.5

测试要点3.4.5

2008年浙江台州中考题

A. x 为任意实数

B. $1 \leq x \leq 4$

C. $x \geq 1$

D. $x \leq 4$

9C 若代数式 $\sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$ 的值是常数2,则 a 的取值范围是().

A. $a \geq 4$

B. $a \leq 2$

C. $2 \leq a \leq 4$

D. $a=2$ 或 $a=4$

10A 计算:

(1) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$; (2) $\sqrt{3^{-2}}$; (3) $\left(-3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$;

(4) $-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$; (5) $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$;

(6) $-\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; (7) $(\sqrt{-m})^2$;

(8) $\left(m\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2$.

11A 在实数范围内分解因式:

(1) $x^2-2\sqrt{3}x+3$; (2) $5x^2-2$.

12B 小明同学在计算 $\sqrt{(a-10)^2}$ 时,他断言 $\sqrt{(a-10)^2}=a-10$,你认为他的说法对吗?请把你的不同意见写出来.

由此题你可以看出进行形如 $\sqrt{a^2}$ 的运算(化简)时,应该注意什么?

13C 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边,化简:

$$\sqrt{(a+b+c)^2} + \sqrt{(a+b-c)^2} + \sqrt{(a-b-c)^2} - \sqrt{(c-a-b)^2}.$$

14C 已知:实数 x, y, z 满足 $|4x-4y+1| + \frac{1}{3}\sqrt{2y+z} + z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$.求 $(y+z) \cdot x^2$ 的值.

22.2 二次根式的乘除法

学习目标·考纲解读

(1)能正确理解最简二次根式的定义,会将二次根式化为最简二次根式;(2)能掌握二次根式的乘法法则和积的算术平方根,并会利用它们化简二次根式;(3)掌握二次根式的除法法则和商的算术平方根,并会用它们化简二次根式;(4)理解分母有理化的意义,并会用它化简二次根式;(5)会进行二次根式乘除混合运算,能运用数学知识解决实际问题,增强数学应用能力.

1 知识·能力聚焦

1. 二次根式的乘法

法则: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$.

用语言叙述为:两个二次根式相乘,将它们的被开方数相乘的积,作积的被开方数.如 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$.当二次根式前面有系数时,可类比单项式与单项式相乘的法则,如 $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$,即系数 a, c 相乘,被开方数 b, d 相乘.

(1)因为是两个二次根式相乘,所以被开方数 a, b 一定是非负数.

(2)二次根式运算的结果,应该尽量化简.

(3)此法则可推广到多个二次根式的情况:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d} = \sqrt{abcd} (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0)$.

2. 积的算术平方根

积的算术平方根等于积中各因式算术平方根的积.用式子表示即为 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$.

(1)在这个性质中, a, b 可以是数,也可以是代数式,无论是数,还是代数式,都必须满足 $a \geq 0, b \geq 0$,才能用此式进行计算化简;如果不满足这个条件,等式的右边就没有意义.等式也就不能成立了.

例如: $\sqrt{(-9) \times (-16)} = \sqrt{9 \times 16} = 12$,而不能写成 $\sqrt{(-9) \times (-16)} = \sqrt{-9} \times \sqrt{-16}$,因为等号右边没有意义.

(2)这个公式的作用是化简二次根式.

如果一个二次根式的被开方数中有的因式(或因数)能开得尽方,可以利用积的算术平方根的性质及公式 $\sqrt{a^2} = a (a \geq 0)$,将这些因式(或因数)开出来,从而将二次根式化简.因此,化简二次根式时,一般先将被开方数进行因式分解或因数分解.



名师诠释

[考题1] 计算:

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$; (2) $\sqrt{6} \times \sqrt{15} \times \sqrt{20}$;

(3) $-5\sqrt{27} \times (-3\sqrt{3})$; (4) $-5\sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{1\frac{1}{3}} \times 3\sqrt{54}$.

[解析] (1)、(2)题可直接利用公式 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$ 计算;(3)、(4)题先确定积的符号,然后利用结合律和交换律,将系数与系数相乘,两个二次根式分别相乘.

[答案] (1) $\sqrt{5} \times \sqrt{15} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$;

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{15} \times \sqrt{20} = \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 5} =$

$\sqrt{2 \times 3^2 \times 5^2 \times 2^2} = 3 \times 5 \times 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$;

(3) $-5\sqrt{27} \times (-3\sqrt{3}) = 5\sqrt{27} \times 3\sqrt{3} =$

$(5 \times 3)\sqrt{3^3 \times 3} = 15 \times 3^2 = 135$;

(4) $-5\sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{1\frac{1}{3}} \times 3\sqrt{54}$

$= -(5 \times 3) \sqrt{\frac{8}{27} \times \frac{4}{3} \times 54}$

$= -15 \sqrt{\frac{2 \times 4^2 \times 2 \times 3 \times 3^2}{3^3 \times 3}}$

$= -15 \times \frac{2 \times 4 \times 3}{3^2} \sqrt{3}$

$= -40\sqrt{3}$.

[考题2] 化简:

(1) $\sqrt{9 \times 25}$; (2) $\sqrt{(-4) \times (-9)}$; (3) $\sqrt{\frac{64}{9} \times \frac{144}{169}}$;

(4) $\sqrt{1.21 \times 1.44 \times 0.01}$.

[解析] 可以直接运用公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ 进行化简.

[答案] (1) $\sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$;

(2) $\sqrt{(-4) \times (-9)} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$;

(3) $\sqrt{\frac{64}{9} \times \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{64}{9}} \times \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{8}{3} \times \frac{12}{13} = \frac{32}{13}$;