21世纪高职高专系列规划教材

主编 朱会明

高等数学

GAODENGSHUXUE

西南师范大学出版社

21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

主　编　朱会明

副主编　张志宏　毕永青　张　帆

西南师范大学出版社

内容简介

本书主要内容是微积分。分八章叙述，分别是：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程初步。本书叙述通俗易懂、详略得当、结构合理、行文流畅、例题丰富，每节后面配有练习题，书末附有习题答案，便于教学。本书可作为高职高专院校的教材，也可作为函授、自考及有关技术人员的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/朱会明主编．—重庆：西南师范大学出版社，2008.5

（21世纪高职高专系列规划教材）

ISBN 978-7-5621-4119-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 070943 号

21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

主　　编：朱会明

副 主 编：张志宏　毕永青　张　帆

策　　划：周安平　卢　旭

责任编辑：杜珍辉

特约编辑：刘俊杰

封面设计：辉煌时代

出版发行：西南师范大学出版社

地址：重庆市北碚区天生路1号

邮编：400715　市场营销部电话：023－68868624

网址：http：//www.xscbs.com

经　　销：全国新华书店

印　　刷：北京市彩虹印刷有限责任公司

开　　本：787mm×1092mm　1/16

印　　张：17.25

字　　数：336千

版　　次：2008年5月　第1版

印　　次：2008年5月　第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5621-4119-8

定　　价：29.00元

编写说明

作为高等教育的重要组成部分，高等职业教育是以培养具有一定理论知识和较强实践能力，面向生产、面向服务和管理第一线职业岗位的实用型、技能型专门人才为目的的职业技术教育，是职业技术教育的高等阶段。目前，高等职业教育教学改革已经从专业建设、课程建设延伸到了教材建设层面。根据国家教育部关于要求发展高等职业技术教育，培养职业技术人才的大纲要求，我们组织编写了这套《21世纪高职高专系列规划教材》。本系列教材坚持以就业为导向，以能力为本位，以服务学生职业生涯发展为目标的指导思想，以与专业建设、课程建设、人才培养模式同步配套作为编写原则。

从专业建设角度，相对于普通高等教育的“学科性专业”，高等职业教育属于“技术性专业”。技术性专业的知识往往由与高新技术工作相关联的那些学科中的有关知识所构成，这种知识必须具有职业技术岗位的有效性、综合性和发展性。本套教材不但追求学科上的完整性、系统性和逻辑性，而且突出知识的实用性、综合性，把职业岗位所需要的知识和实践能力的培养融会于教材之中。

从课程建设角度，现有的高等职业教育教材从教育内容上需要改变“重理论轻实践”、“重原理轻案例”，教学方法上则需要改变“重传授轻参与”、“重课堂轻现场”，考核评价上则需改变“重知识的记忆轻能力的掌握”、“重终结性的考试轻形成性考核”的倾向。针对这些情况，本套教材力求在整体教材内容体系以及具体教学方法指导、练习与思考等栏目中融入足够的实训内容，加强实践性教学环节，注重案例教学，注重能力的培养，使职业能力的培养贯穿于教学的全过程。同时，使公共基础类教材突出职业化，强调通用能力、关键能力的培养，以推动学生综合素质的提高。

从人才培养模式角度，高等职业教育人才的培养模式的主要形式是产学结合、工学交替。因此，本教材为了满足有学就有练、学完就能练、边学边练的实际要求，纳入新技术引用、生产案例介绍等来满足师生教学需要。同时，为了适应学生将来因为岗位或职业的变动而需要不断学习的情况，教材的编写注重采用新知识、新工艺、新方法、新标准，同时注重对学生创造能力和自我学习能力的培养，力争实现学生毕业与就业上岗的零距离。

为了更好地落实指导思想和编写原则，本套教材的编写者既有一定的教学经验、懂得教学规律，又有较强的实践技能。同时，我们还聘请生产一线的技术专家来审稿，保证教材的实用性、先进性、技术性。总之，该套教材是所有参与编写者辛勤劳作和不懈努力的成果，希望本套教材能为职业教育的提高和发展做出贡献。

这就是我们编写这套教材的初衷。

前　　言

本书首先全面详细地介绍了一元函数微积分，然后以此为基础研究了多元函数微积分（以二元函数为主），其中极限是重要的工具，它贯穿于微积分始终。最后一章微分方程可以看作是微积分学的延伸和应用。

本书作为高职高专的教材，力求以较少的篇幅、通俗的语言介绍高等数学中的基本知识。通过实例引入概念，不用过多的篇幅去证明定理，而把精力放在定理、公式的理解与应用上，通过丰富的例题与习题使学生掌握有关基本知识。内容上力求与中学知识衔接，如第一章函数部分及第五章是略写。本书共分八章，其中第五章和第八章根据专业需要可作为选修。书末附有习题答案，可供同学们参考。

本书由朱会明主编，参加编写的人员有：张志宏、毕永青、田素霞、周俊祥、张帆。全书由朱会明负责统审与定稿。本书在编写、整理与审校的过程中，得到了刘俊杰、卢芳、王路、李锐等同志的大力支持与帮助，最后由张庆政教授审阅，且提出了许多宝贵意见，编者在此表示衷心地感谢！

本书在编写过程中参阅了有关书籍，引用了其中的一些例子及习题，在此一并向有关作者致谢！

由于时间仓促和水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2008.1

目 录

第一章　函数与极限

函数是变量之间相互依存关系的一种抽象，它是我们研究的主要对象. 极限是一种重要的工具，许多概念都与极限有关. 在本章中，我们先介绍函数关系，然后以极限为工具研究函数的连续性. 在以后各章中，将陆续介绍导数、积分、级数等内容.

§1.1　函　数

一、区间与邻域

1. 集合

集合是指具有某种共同属性的一些对象的全体，构成集合的每一个对象称为该集合的“元素”. 数集是我们常用的集合，常用 **N** 表示全体自然数构成的集合，用 **Z** 表示全体整数构成的集合，用 **Q** 表示全体有理数构成的集合，用 **R** 表示全体实数构成的集合.

2. 区间

在数学中常用区间表示一个变量的变化范围，下面介绍一些常用的区间及其记号.

(1)开区间：$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合，在数轴上表示以 a,b 为端点，但不包含端点 a 和 b 的线段(图 1－1).

图 1－1

图 1－2

(2)闭区间：$[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数的集合，在数轴上表示以 a,b 为端点且包含 a 和 b 的线段(图 1－2).

(3)半开半闭区间：$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$(图 1－3)及$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$(图 1－4). 理解与上面类似.

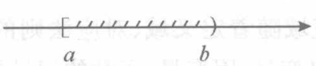

图 1－3

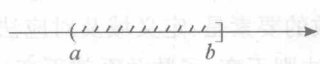

图 1－4

除了上述有限区间外，还有下面五种无穷区间：

①$(a,\ +\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，见图 1－5 所示.

②$[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，见图 1－6 所示.

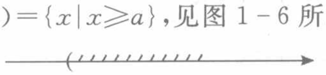

图 1－5

图 1－6

③$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$，见图 1-7 所示.

④$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$，见图 1-8 所示.

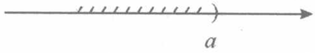

图 1-7

图 1-8

⑤$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示实数集 $\mathbf{R}$，在几何上表示整个数轴. 这里"$+\infty$"（正无穷大）、"$-\infty$"（负无穷大）仅仅是记号，不是数.

3. 邻域

以点 a 为中心的一个开区间称为点 a 的一个邻域，记作 $U(a)$.

如果邻域的半径为 δ，则可记为

$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$（见图 1-9 所示）.

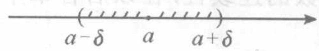

图 1-9

如 $U(3,\frac{1}{4})=\{x||x-3|<\frac{1}{4}\}$表示以 3 为中心，以$\frac{1}{4}$为半径的邻域.

如果把中心 a 去掉，称为 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a)$.

二、函数及特性

1. 函数概念

定义　设非空数集 $D\subset\mathbf{R}$，f 是从 D 到 R 的一个映射，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的一个函数，记为

$$f:D\to\mathbf{R}\quad\text{或者}\quad y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 为因变量，D 称为 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

在定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，在 R 中总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

在这里要注意：

(1)表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 之外，还可以用其他的英文字母或希腊字母，如"g"、"h"、"F"、"φ"等来表示. 当然自变量 x、因变量 y 也可以用其他的字母来表示（通常用英文小写字母）.

(2)构成函数的要素是：定义域及对应法则. 值域随着定义域、对应法则的确定而确定. 只要定义域及对应法则不变，函数关系就不变（即使自变量、因变量、函数的记号换成其他字母）.

(3)一个函数，在其定义域的不同部分也可以用不同的式子来表示，如

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ -x+1, & x>0\end{cases},$$

这种形式的函数，称为分段函数. 注意：这是一个函数，而不是三个函数！

2. 函数的图像

在平面上建立了直角坐标系之后，平面上的点集

$$C=\{P(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\},$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图像，如图 1－10 所示.

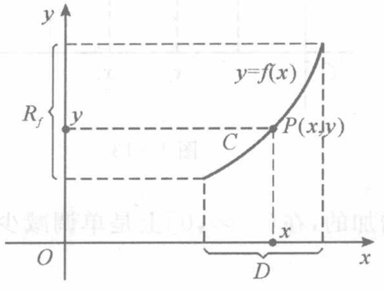

图 1－10

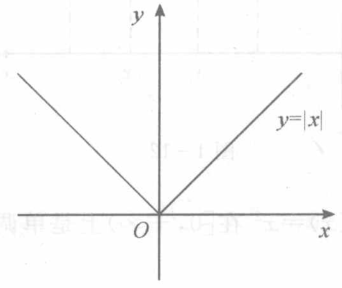

图 1－11

例 1　函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图像如图 1－11 所示.

3. 函数的几种特性

(1)有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $F\subset D$. 如果存在常数 M_1，使得

$$f(x)\leqslant M_1$$

对任意 $x\in F$ 都成立，则称 $f(x)$在 F 上有上界，M_1 称为 f 的一个上界.

如果存在 M_2，使得

$$f(x)\geqslant M_2$$

对任意 $x\in F$ 都成立，则称 $f(x)$有下界，M_2 称为 f 的一个下界.

如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in F$ 都成立，则称 $f(x)$在 F 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$在 F 上无界.

如 $f(x)=x^2$ 在 R 上无界，在$(0,+\infty)$上有下界无上界，在$(-1,1)$上有界.

显然，$f(x)$在 F 上有界当且仅当 $f(x)$在 F 上既有上界又有下界.

(2)单调性

设 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是(严格)单调增加的(图 1－12)；如果对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是(严格)单调减少的(图 1－13). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

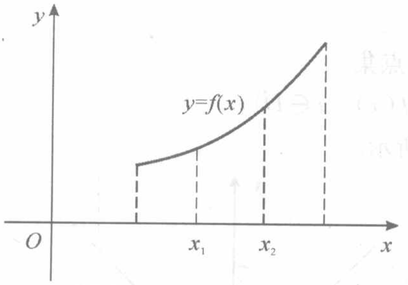

图 1－12

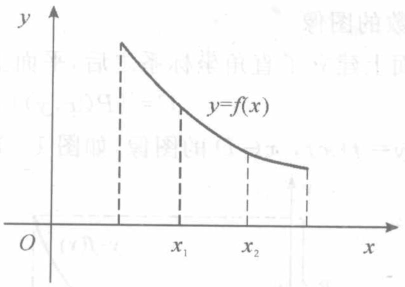

图 1－13

如函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在 $\mathbf{R}$ 上不是单调的.

(3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称. 如果对于任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

如 $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数. $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

(4)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使对任意 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

如 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=x^2$ 不是周期函数.

三、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $F=f(D)$，即 $f:D\to F$. 如果 f 存在逆映射，记为 $f^{-1}:F\to D$，则称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数.

因此，对每个 $y\in F$，有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，于是有 $f^{-1}(y)=x$. 这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是由直接函数 f 的对应法则所确定的. 且反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

如 $y=x^2,x\in(2,3)$ 的反函数为 $x=\sqrt{y},y\in(4,9)$.

习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 这样，函数 $y=f(x),x\in D$ 的反函数可记成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$，这时，反函数 f^{-1} 的图像与直接函数 f 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

容易证明，若 f 是 D 上的单调函数，则 f 的反函数 f^{-1} 存在，且 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数，f^{-1} 与 f 有相同的单调性.

四、复合函数

定义　设有两个函数

$$f:\ y=f(u),\ u\in D_f;\quad g:\ u=g(x),\ x\in D_g.$$

如果 $R_g\subset D_f$，于是可将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到一个新函数

$$y=f(g(x)),\ x\in D_g,$$

称此函数为 f 和 g 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

有时把 $g(x)$ 叫做内函数，$f(u)$ 叫做外函数，复合函数实际上就是函数套函数. 由定义可知，f 和 g 能否构成复合函数的关键是内函数的值域是否包含在外函数的定义域内.

例 2　$y=f(u)=u^2,\ D_f=(-\infty,+\infty)$；$u=g(x)=\sin x,\ D_g=(-\infty,+\infty)$.
由于 $R_g=[-1,\ 1]\subset D_f$，故有复合函数，记为 h.

$$y=h(x)=f(g(x))=\sin^2 x,\ D_h=(-\infty,+\infty),\ R_h=[0,1].$$

例 3　$y=f(u)=\arcsin u,\ u\in[-1,\ 1]$；$u=g(x)=2+x^2,\ x\in\mathbf{R},\ R_g=[2,+\infty)$.
由于 R_g 不在 D_f 内，$R_g\cap D_f=\varnothing$，所以 f 与 g 不能构成复合函数.

有时内函数 g 的值域 R_g 仅有一部分包含于外函数 f 的定义域 D_f 中，故为了使复合有意义，可把内函数的值域缩小为 R_g 与 D_f 的公共部分，当然内函数的定义域也随之缩小.

例 4　$y=f(u)=\sqrt{u},\ D_f=[0,+\infty)$；$u=g(x)=1-x^2,\ D_g=R,\ R_g=(-\infty,1]$.
把 R_g 限制在 $[0,1]$（即 R_g 与 D_f 的公共部分 $R_g\cap D_f$），当然 g 的定义域相应地缩小为 $[-1,1]$，这样就有复合函数

$$y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,\ 1].$$

复合函数也可由两个以上的函数复合而成. 如 $y=\ln\sqrt{2+x^2}$，就是由 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2+x^2$ 三个函数复合而成的.

五、初等函数

1. 基本初等函数

在中学数学中我们学过下面几类函数：

幂函数：$y=x^\alpha$（$\alpha\in\mathbf{R}$ 为常数）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），$a=\mathrm{e}$ 时记为 $y=\ln x$；

三角函数：$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\mathrm{arccot}\ x,\ y=\mathrm{arcsec}\ x,\ y=\mathrm{arccsc}\ x$.

以上五类函数统称为基本初等函数.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 如：

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\sin^2 x,\ y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}+\ln x}.$$

课本中讨论的函数绝大多数都是初等函数,但诸如

$$y=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ \sin x+3, & x\leqslant 0 \end{cases},$$

这种分段表示的函数往往不是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$; (2) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$;

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$; (4) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

2. 确定下列函数的定义域并求函数值.

(1) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1<x<0 \\ 2, & 0\leqslant x<1 \\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$,求 $f(-0.5)$, $f(0.5)$, $f(0)$, $f(2)$;

(2) $f(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geqslant 1 \end{cases}$,求 $f(\frac{\pi}{4})$, $f(1)$, $f(2)$.

3. 某产品年产量为 x 台,每台售价为 400 元.当年产量在 1 000 台以内时,可以全部售出;当年产量超过 1 000 台时,经广告宣传后又可以再多出售 200 台,每台平均广告费 40 元;生产再多时,本年就售不出去了.试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数.

4. 证明:函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 是有界函数.

5. 试证下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$;

(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

6. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x-x^2$; (2) $f(x)=x\sin x$;

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; (4) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$.

7. 下列函数哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$; (2) $y=1+\sin\pi x$;

(3) $y=\sin^2 x$; (4) $y=x\cos x$.

8. 求下列函数的反函数.

(1) $y=x^3+2$; (2) $y=\ln(x+1)$;

(3) $y=2\sin 3x$; (4) $y=3^{2x+5}$.

9. 求下列函数的复合函数.

(1) $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=3x-1$;

(2) $y=f(u)=\ln u$, $u=g(x)=1-x^2$.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

§1.2　极　限

一、数列的极限

1. 数列极限的定义

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如,利用圆内接正多边形的面积来推算圆面积的方法,就是极限思想在几何学上的应用.

设有数列:

$$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$$

记 $x_n=\dfrac{n+1}{n}$,当 n 无限增大时,$|x_n-1|$ 可任意小,x_n 与 1 无限接近. 即只要 n 足够大,就能使 $|x_n-1|$ 小于预先给定的任意小的正数 ε. 例如:给定 $\varepsilon=\dfrac{1}{1000}$,要使

$$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}$$

只要 $n>1000$ 即可. 故对此数列来说,无论给定的正数 ε 多么小,总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 的一切 x_n,不等式 $|x_n-1|<\varepsilon$ 都成立. 此时称常数 1 为数列 $x_n=\dfrac{n+1}{n}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

一般地,对于数列 $\{x_n\}$ 及常数 a,有下列分析定义:

定义　对任一给定的正数 ε,若存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$,则称数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限. 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\ \text{或者}\ x_n\to a\ (n\to\infty).$$

当数列 $\{x_n\}$ 的极限存在时,称 $\{x_n\}$ 为收敛数列,否则称为发散数列.

如:数列 $x_n=\dfrac{n+1}{n}$ 收敛,极限为 1;数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 发散.

数列极限的定义并未提供求数列极限的方法,但利用它可以证明一个数是不是数列的极限.

例 1　证明:数列 $x_n=q^n(|q|<1)$ 的极限为零.

证　对任一正数 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),欲使 $|q^n-0|<\varepsilon$,即 $|q^n|<\varepsilon$,只要 $n\lg|q|<\lg\varepsilon$,$n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$. 取 $N>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$,则当 $n>N$ 时,必有 $|q^n|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1).$$

当 $x_n\to a\ (n\to\infty)$ 时，其几何意义如下：

给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使从点 x_{N+1} 开始，其后所有的点，即 x_{N+1}，x_{N+2}，…都落在点 a 的 ε 邻域内(见图 1-14 所示).

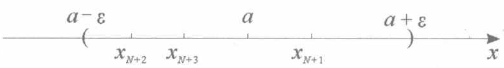

图 1-14

2. 收敛数列的性质

利用数列极限的定义容易证明下列性质.

性质 1(唯一性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

证　(反证法)设 $x_n\to a$，$x_n\to b\ (n\to\infty)$，且 $a<b$. 给定 ε，使 $0<\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$(如图 1-15). 由 $x_n\to a$，则存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon. \quad ①$$

又 $x_n\to b$，则存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有

$$|x_n-b|<\varepsilon. \quad ②$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，x_n 既满足①，又满足②(从图 1-15 中看这是不可能的)，于是

图 1-15

$$b-a=|(x_n-b)-(x_n-a)|\leqslant|x_n-b|+|x_n-a|<2\varepsilon.$$

推出矛盾，性质 1 得证.

性质 2(有界性)　收敛数列是有界数列.

证　设 $x_n\to a\ (n\to\infty)$. 给定 $\varepsilon>0$，比如 $\varepsilon=1$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<1$$

于是，当 $n>N$ 时，

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,\ |x_2|,\ \cdots,\ |x_N|,\ 1+|a|\}$，那么对一切 x_n，都满足

$$|x_n|\leqslant M.$$

即 $\{x_n\}$ 有界.

二、函数的极限

1. 函数极限的定义

对于函数 $y=f(x)$，在自变量 x 的某个变化过程中，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个常数 A，则称在自变量的这一变化过程中函数的极限为 A，记作 $\lim f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的，由于自变量的变化过程不同，函数的极限就表现为不同的形式. 数列 $\{x_n\}$ 的极限可看作自变量为 n 的函数 $x_n=f(n)$，当 $n\to\infty$ 时的极限，这里自变量的变化过程为 $n\to\infty$.

下面讲述自变量的变化过程为以下两种情形时的函数的极限.

(1)自变量趋于无穷大(记作 $x\to\infty$)时函数的极限

仿照数列极限的定义,函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限定义如下:

定义 对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 M,使当 $|x|>M$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

如果 $x>0$ 且无限增大($x\to+\infty$),只要把定义中的 $|x|>M$ 改为 $x>M$,就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义. 同样,如果 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大($x\to-\infty$),那么只要把 $|x|>M$ 改为 $x<-M$,便得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

如 $f(x)=\arctan x$,有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2},$$

但当 $x\to\infty$ 时($|x|$ 任意大,x 可正可负),$f(x)$ 不趋向于一个确定的常数,故 $x\to\infty$ 时,$\arctan x$ 的极限不存在.

(2)自变量趋于有限值(记作 $x\to x_0$)时函数的极限

考察当 $x\to1$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势;$x=1$ 时,函数没有定义;而当 $x\neq1$ 时,$f(x)=x+1$. 不难看出,当 $x\to1\ (x\neq1)$ 时,$f(x)$ 无限接近于 2. 我们称当 $x\to1$ 时,$f(x)$ 的极限为 2.

一般地,如果在 $x\to x_0$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A,那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 其分析定义如下:

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (\text{当 } x\to x_0).$$

几何解释如下:对给定的 $\varepsilon>0$,作两条直线 $y=A+\varepsilon$,$y=A-\varepsilon$,存在着 x_0 的一个去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图像位于两条直线 $y=A+\varepsilon$ 与 $y=A-\varepsilon$ 之间(图 1-16).

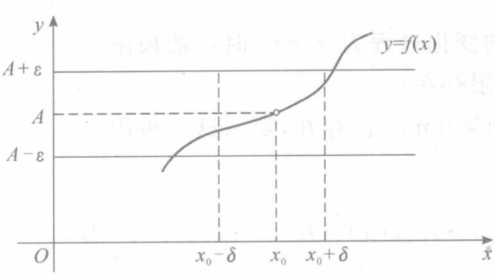

图 1-16

例 2 证明：$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

证 由于 $|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|$，

为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

所以，对任意给定的 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当

$$0<|x-1|<\delta \text{ 时，有 } |f(x)-1|<\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{x\to1}(2x-1)=1.$$

在上述函数极限的讨论中，x 是以任意方式趋近于 x_0 的. 即 x 可以从 x_0 的左侧逐渐增大而趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^-$），也可以从 x_0 的右侧逐渐减少而趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^+$），甚至可按任意方式沿 x 轴趋近于 x_0. 但有时我们只能或只需考虑 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势，在 $x\to x_0^-$ 的情形，$x<x_0$，在极限定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

类似地，在 $x\to x_0^+$ 的情形，$x>x_0$ 只要把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

不难看出，函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左、右极限都存在并且相等.

例 3 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$$

求当 $x\to0$ 时的单侧极限，并讨论当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 函数的图形如图 1-17 所示，容易看出

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1.$$

由于左、右极限不相等，故 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

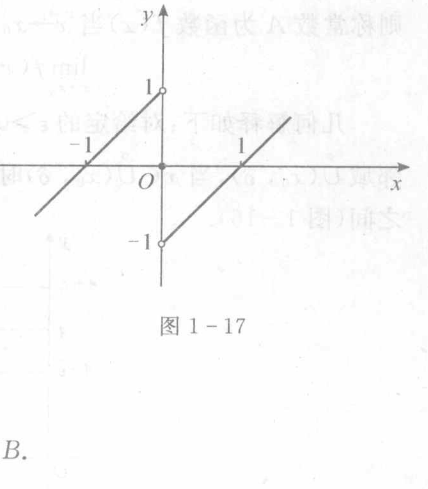

图 1-17

2. 函数极限的性质

下面给出当自变量的变化过程为 $x\to x_0$ 时函数极限的一些性质（设函数的极限存在）.

性质 1（唯一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这个极限唯一.

证 （反证法）设 $f(x)\to A$，$f(x)\to B(x\to x_0)$，且 $A<B$.

给定 ε，使 $0<\varepsilon<\dfrac{B-A}{2}$. 由 $f(x)\to A$，则存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有