

辛数学 · 精细积分 · 随机振动 及应用

Symplectic Mathematics, Precise Integration, Random Vibration
and Applications



林家浩 钟万勰 主编

中国科学技术大学出版社

当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书

辛数学 · 精细积分 · 随机振动及应用

Symplectic Mathematics, Precise Integration, Random Vibration
and Applications

林家浩 钟万勰 主编



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

辛数学作为基于广义对称性的一种先进数学分析工具,因其抽象艰深的数学表达而长期以来在力学界曲高和寡。随机性是自然界最基本的规律之一,由地震、风、海浪等引起的随机振动及其对结构安全性、适用性的计算也一直难于被工程人员应用。由钟万勰院士、林家浩教授领导的研究团队在辛数学和随机振动算法上取得了一系列重要进展,使它们变得容易理解和应用了,使得工程领域沿用了半个多世纪的铁木辛科力学方法体系面临更迭,也使得随机振动理论得以加速走向许多工程领域。他们曾就这些学术界和工程界的热点问题三次访美,在二十多所著名大学和工程公司发表演讲,引起广泛关注。本论文集精选钟、林二教授的重要论文 26 篇(含尚未发表的论文 7 篇),作为对母校中国科学技术大学建校 50 周年的汇报。

图书在版编目(CIP)数据

辛数学·精细积分·随机振动及应用/林家浩,钟万勰主编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2008.11

(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书;中国科学技术大学校友文库)

“十一五”国家重点图书

ISBN 978-7-312-02230-2

I. 辛… II. ①林… ②钟… III. ①辛—数学方法—应用—应用力学—文集 ②随机振动—积分法—文集 IV. O3-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 140905 号

出版发行 中国科学技术大学出版社

地址 安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026

网址 <http://press.ustc.edu.cn>

印 刷 合肥晓星印刷有限责任公司

经 销 全国新华书店

开 本 710mm×1000mm 1/16

印 张 24.25

字 数 380 千

版 次 2008 年 11 月第 1 版

印 次 2008 年 11 月第 1 次印刷

印 数 1—1500 册

定 价 69.00 元

总 序

侯建国

(中国科学技术大学校长、中国科学院院士、第三世界科学院院士)

大学最重要的功能是向社会输送人才。大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度,很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的。

中国科学技术大学建校只有短短的五十年,之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学之一,主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生。他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强,在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献,为中国科大赢得了“科技英才的摇篮”的美誉。

2008年9月,胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信,信中称赞说:半个世纪以来,中国科学技术大学依托中国科学院,按照全院办校、所系结合的方针,弘扬红专并进、理实交融的校风,努力推进教学和科研工作的改革创新,为党和国家培养了一大批科技人才,取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果,为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献。

据统计,中国科大迄今已毕业的5万人中,已有42人当选中国科学院和中国工程院院士,是同期(自1963年以来)毕业生中当选院士数最多的高校之一。其中,本科毕业生中平均每1000人就产生1名院士和七百多名硕士、博士,比例位居全国高校之首。还有众多的中青年才俊成为我国科技、企业、教育等领域的领军人物和骨干。在历年评选的“中国青年五四奖章”获得者中,作为科技界、科技创新型企业界青年才俊代表,科大毕业生已连续多年榜上有名,获奖总人数位居全国高校前列。

鲜为人知的是,有数千名优秀毕业生踏上国防战线,为科技强军做出了重要贡献,涌现出二十多名科技将军和一大批国防科技中坚。

为反映中国科大五十年来人才培养成果,展示毕业生在科学研究中的最新进展,学校决定在建校五十周年之际,编辑出版《中国科学技术大学校友文库》,于2008年9月起陆续出书,校庆年内集中出版50种。该《文库》选题经过多轮严格的评审和论证,入选书稿学术水平高,已列为“十一五”国家重点图书出版规划。

入选作者中,有北京初创时期的毕业生,也有意气风发的少年班毕业生;有“两院”院士,也有IEEE Fellow;有海内外科研院所、大专院校的教授,也有金融、IT行业的英才;有默默奉献、矢志报国的科技将军,也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才;有“文革”后留美学者中第一位担任美国大学系主任的青年教授,也有首批获得新中国博士学位的中年学者……在母校五十周年华诞之际,他们通过著书立说的独特方式,向母校献礼,其深情厚意,令人感佩!

近年来,学校组织了一系列关于中国科大办学成就、经验、理念和优良传统的总结与讨论。通过总结与讨论,我们更清醒地认识到,中国科大这所新中国亲手创办的新型理工科大学所肩负的历史使命和责任。我想,中国科大的创办与发展,首要的目标就是围绕国家战略需求,培养造就世界一流科学家和科技领军人才。五十年来,我们一直遵循这一目标定位,有效地探索了科教紧密结合、培养创新人才的成功之路,取得了令人瞩目的成就,也受到社会各界的广泛赞誉。

成绩属于过去,辉煌须待开创。在未来的发展中,我们依然要牢牢把握“育人是大学第一要务”的宗旨,在坚守优良传统的基础上,不断改革创新,提高教育教学质量,早日实现胡锦涛总书记对中国科大的期待:瞄准世界科技前沿,服务国家发展战略,创造性地做好教学和科研工作,努力办成世界一流的研究型大学,培养造就更多更好的创新人才,为夺取全面建设小康社会新胜利、开创中国特色社会主义事业新局面贡献更大力量。

是为序。

2008年9月

序 言

1959 年底,钱学森先生指示钟万勰,到中国科学技术大学讲授理论力学课程。这是钟万勰认真研究动力学与控制的开始,迄今快 50 年了。20 世纪 80 年代前,钟万勰忙于探讨计算结构力学。林家浩率先推出了随机振动的虚拟激励法。而钟万勰则因为有讲授理论力学的基础,找到了结构力学与最优控制的模拟理论,已经与大家一起做了快 20 年了。部分有关论文收录于此文集。回顾过去,很感谢这段难得的机遇。

1939 年 H. Weyl 基于分析力学,提出辛(Symplectic)对称的数学概念,国内外有不少数学家进行了研究。我国数学家冯康教授于 1985 提出,动力学方程积分的差分格式应当保辛,对辛数学的应用做出了重要贡献。这对广大从事工程计算的科技人员是非常重要的,但 20 多年来,工程科技人员对于什么是“辛”,如何才能“保辛”? 颇感困惑。我们从分析力学出发,引入应用力学对偶体系,从通常的位移法转换到状态空间,并且针对计算力学的需要发展出一套精细积分法。对于原先难于理顺的多种力学问题,运用辛数学进行了理论与数值分析,揭示了“辛”的原始本质和朴素的力学意义,并可变成普通工科大学生很容易理解的数值分析工具。

随机振动计算也是长期以来理论成果的数学表达难于充分在工程中发挥作用的课题。中国科学技术大学力学系第 2 届毕业生林家浩率领他的团队创建了“虚拟激励法”系列,打破了长期以来结构随机振动计算效率低下的工程应用瓶颈。该法将平稳随机振动分析转化为确定性的简谐振动分析;而将非平稳随机振动分析转化为确定性的时间历程分

析。实施方便,已经在我国地震工程、风工程、海洋工程等许多领域得到了实际应用。

以上研究成果皆立足于自主创新,也反映了中国科技大学提倡的优良学风。本文集精选了我们在以上领域所发表的 19 篇论文,并载入了我们最近指导研究生完成而尚未发表的 7 篇论文,并在本书中对所有论文进行了统一处理。谨以此向母校中国科学技术大学 50 周年庆典汇报。

钟万勰 林家浩

目次

总序	i
序言	钟万勰 林家浩 iii
1. 计算结构力学、最优控制及偏微分方程半解析法	钟万勰,钟翔翔 1
2. 条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系	钟万勰 21
3. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用	钟万勰,钟翔翔 38
4. 陀螺系统与反对称矩阵辛本征解的计算	钟万勰,林家浩 48
5. 相同子结构串的本征对问题及展开解法	钟万勰,林家浩,袁春航 71
6. 电磁波导的辛体系	钟万勰 85
7. H_∞ 控制的变分法与计算	钟万勰 104
8. 分层岩层介质中平稳随机地震波传播的精细解法	林家浩,高强,钟万勰 115
9. 分析结构力学与有限元	钟万勰 126
10. 时间-空间混和有限元	钟万勰,高强 142

11. 保辛子结构分析在能带问题中的应用 钟万勰, 姚征 154
12. H_∞ 跟踪系统设计与仿真的精细递推
计算 钟万勰, 谭述君, 吴志刚 168
13. 非线性哈密顿动力系统的保辛时间有限元法 钟万勰, 高强 179
14. 任意相干平稳随机激励作用下的结构
响应 林家浩, 张文首, 李建俊 195
15. 非平稳随机地震响应的精确高效算法 林家浩 204
16. 结构非平稳随机响应的混合型精细时程
积分 林家浩, 沈为平, 宋华茂, 孙东科 212
17. 无穷子结构链中平稳随机波的传播
..... 林家浩, 范钺, P. N. Bennett, F. W. Williams 223
18. 非均匀演变随机场中多支承结构的随机地震
响应 林家浩, 李建俊, 张文首, F. W. Williams 236
19. 非均匀调制演变随机地震激励的结构响应
..... 林家浩, 孙东科, 孙勇, F. W. Williams 250
20. 大跨度结构抗震分析方法及近期进展 林家浩, 张亚辉, 赵岩 263
21. 虚拟激励法对青马大跨度悬索桥三维抖振分析的
应用 林家浩, 孙东科 280
22. 结构随机荷载识别的计算机模拟
..... 林家浩, 郭杏林, 智浩, W. P. Howson, F. W. Williams 290
23. 虚拟激励法概要及工程应用 林家浩, 张亚辉, 赵岩 309
24. 分层粘弹性半空间中非完全相干断层激励引起的非平稳随机波
传播 林家浩, 高强, 钟万勰 328
25. 移动荷载作用下桥梁动力响应的扩展精细积
分法 林家浩, 吕峰, D. Kennedy, F. W. Williams 343
26. 车辆悬架随机最优控制高效算法
..... 林家浩, 宋刚, 张亚辉, D. Kennedy, F. W. Williams 357

计算结构力学、最优控制及 偏微分方程半解析法

钟万勰

(大连理工大学工程力学研究所)

钟翔翔

(纽约州立大学石溪分校应用数学系)

摘要 本文以一般变分原理为基础,论述了子结构串连构成的结构分析,阐明了计算结构力学与线性二次型最优控制问题是相通的,存在一一对应关系。因此证明了里卡提代数方程有二类迭代解法,分别从上限及下限去迫近于真实解。计算结构力学和最优控制在理论与方法上便得到沟通,可以相互取长补短了。

对于连续坐标或连续时间问题,又可证明它们与椭圆型偏微分方程在条形域中的半解析法是相通的。这几个领域的贯通与渗透,将带来一些新的推动力。

1 引 论

计算结构力学与最优控制这两个大领域各有自己的一套理论体系。近年来,两个领域的工作正在逐渐结合起来^[1,2]。但是这种结合是一种应用上的结合。变分原理,尤其是一般变分原理的发展^[3-5],给计算结构力学与有限元分析提供了强有力的理论工具^[6]。另一方面,最优控制理论也是密切地依赖于变分原理而发展起来的^[7,8]。这两个方面在理论体系上本来是有密切联系的。本文则要将这两种理论体系加以汇合,指出它们之间本来是十分紧密的关系。在一些非常重要的基本问题上甚至有一一对应的关

系。这将给这两个方面都带来很多好处。在这个结合点上,本文将说明它们本来都奠基于变分法及偏微分方程的同一个问题上^[13]。这样,计算结构力学及最优控制理论可以反过来应用于一类偏微分方程的课题中,这将给数学物理中某些问题的求解提供方便。

在计算结构力学中子结构法已成为不可缺少的组成部分。多重子结构的计算^[9,10]已成为各个主要的计算结构力学程序系统的有力工具。对于相同子结构串连而成的链式结构,可以发展出一套新的分析方法^[11]。本文将证明由子结构串连而成的链式结构的理论,并行于控制理论中的线性二次型^[12,13]的理论。而多重子结构的消元算法将给最优控制理论的计算提供新的有力算法。计算结构力学中的许多近似方法将可以在最优控制中有效地应用。

在控制工程与理论中线性二次型问题的发展已成为理论上最热门的课题。虽已发表了数以千计的论文,但由于与计算结构力学未曾在理论体系上建立密切关系,仍有某些方面可以得到新的推动。在求解线性二次型方程、卡门滤波、LQG 等问题时,其中心环节是求解代数里卡提方程。它可以从计算结构力学中得到有效的方法^[12,13],而且其本征值问题^[14]也可以通过正则变换矩阵而降价一半^[15,16]。在此基础上可以用共轭子空间迭代法^[17]来处理大系统的本征值问题。本文根据两者并行发展的理论,将里卡提代数方程的解从力学上作出解释。因此,力学中的一些近似方法,例如 Ritz 法等,就可以移过来用于大系统的理论,多中心理论等。尤其是计算结构力学中的上、下限定理,可以提供最优控制理论一些新的概念。

从数学方面来讲,计算结构力学与最优控制都奠基于变分法与偏微分方程理论。数学物理偏微分方程中许多问题都可以与变分原理相联系。凡是椭圆型方程在棱柱形域(或在一维移动群下对称的结构),都可以通过变分原理及状态空间法化归与线性二次型及子结构串连体系相同的课题^[18]。于是可以通过同一套数学方法来求解。

计算结构力学、最优控制、椭圆型偏微分方程的理论体系是互相关联的,它们的互相渗透将给各方面带来有力的推动。

2 串连式子结构链的理论及能量法

有些结构的构造,是由许多相同的子结构(超级单元)首尾相接串连在一起的。图 2.1 中的一个典型段 k ,一端为 a_k ,另一端为 b_k 。当作一个移位后, a_{k+1} 就与 b_k 端相接。每一端的出口位移个数皆为 n ,于是这个子结构模式的出口位移总数为 $2n$,写成为

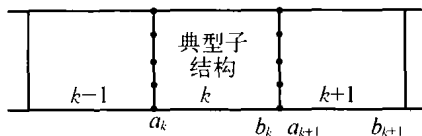


图 2.1

$$\{u_a^T, u_b^T\}^T \quad (2.1)$$

其中 u_a 及 u_b 都是 n 阶的出口位移向量。上标 T 表示转置。

在计算结构力学程序系统中,对于子结构拼装分析,无例外地几乎都喜欢利用位移法来进行计算。从能量法来看,它相当于应用最小势能原理,其中变形能 U 为

$$U(u_a, u_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

式中

$$K = \begin{Bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{Bmatrix}, \quad K = K^T \quad (2.3)$$

为子结构的出口刚度阵, $2n \times 2n$ 分块子矩阵

$$K_{aa} = K_{aa}^T \geq 0, \quad K_{bb} = K_{bb}^T > 0, \quad K_{ab} = K_{ba}^T \quad (2.3')$$

尺度皆为 $n \times n$ 。由于是变形能, K 当然非负。

现在考虑半无穷长的串。当 a 端为自由端时,这个无穷长的“悬臂”结构也有一个出口刚度阵 A_a 。其相应的变形势能为

$$U_{\infty a} = \frac{1}{2} u_a^T A_a u_a \quad (2.4)$$

其中 A_a 为对称非负阵。当 K 阵为正定时, A_a 一定正定,但 K 阵正定是充分条件而非必要。 A_a 阵应当满足的方程可以用移位不变法推导而得^[11]

$$A_a = K_{aa} - K_{ab}(A_a + K_{bb})^{-1}K_{ba} \quad (2.5)$$

这是对于 $\mathbf{A}_a$ 的一个非线性矩阵方程,我们称之为椭圆代数里卡提方程或变位里卡提方程。

以上是以 a 为自由端的半无穷长串,还有以 b 为自由端的半无穷长串。其相应的变形势能 $U_{\infty b}$ 为

$$U_{\infty b} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_b^T \mathbf{A}_b \mathbf{u}_b \quad (2.6)$$

式中 $\mathbf{A}_b$ 也是对称非负阵。当 $\mathbf{K}$ 正定时, $\mathbf{A}_b$ 也一定正定。这是充分条件。 $\mathbf{A}_b$ 应当满足的方程也可由移位不变法导出,为

$$\mathbf{A}_b = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ba}(\mathbf{A}_a + \mathbf{K}_{aa})^{-1} \mathbf{K}_{ab} \quad (2.7)$$

可以看出,这些推导完全是以位移法为基础的。

从计算结构力学中的势能原理来看, $\mathbf{A}_a$ 与 $\mathbf{A}_b$ 阵的求解可以用子结构消元法来迭代而得到。当两个子结构串连时,可以将内部未知数 $\mathbf{u}_{b_k}$, 装配时亦即 $\mathbf{u}_{a_{k+1}}$, 消元,从而得到一个新的子结构模式,其出口位移为 $\mathbf{u}_{a_k}$ 及 $\mathbf{u}_{b_{k+1}}$ 。为简洁计,仍写为 $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$ 。这新的子结构模式的变形能算式为

$$U_2(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{aa2} & \mathbf{K}_{ab2} \\ \mathbf{K}_{ba2} & \mathbf{K}_{bb2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{aa2} &= \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab}(\mathbf{K}_{aa} + \mathbf{K}_{bb})^{-1} \mathbf{K}_{ba} \\ \mathbf{K}_{bb2} &= \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ba}(\mathbf{K}_{aa} + \mathbf{K}_{bb})^{-1} \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ab2} &= -\mathbf{K}_{ab}(\mathbf{K}_{aa} + \mathbf{K}_{bb})^{-1} \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba2} &= \mathbf{K}_{ab2}^T \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

当 $\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b$ 为正定时,以下的迭代将收敛:

- (1) 已知 $\mathbf{K}_{aa}, \mathbf{K}_{ab}, \mathbf{K}_{bb}$ 计算出 $\mathbf{K}_{aa2}, \mathbf{K}_{bb2}, \mathbf{K}_{ab2}$, 按(2.9)式计算;
- (2) $\mathbf{K}_{aa} := \mathbf{K}_{aa2}; \mathbf{K}_{bb} := \mathbf{K}_{bb2}; \mathbf{K}_{ab} := \mathbf{K}_{ab2};$
- (3) 如果 $\mathbf{K}_{ab}$ 已接近于零,则停止迭代;否则返回(1)式进行下一轮迭代。

迭代结束时,有

$$\mathbf{K}_{aa2} \rightarrow \mathbf{K}_{aa\infty} = \mathbf{A}_a; \mathbf{K}_{bb2} \rightarrow \mathbf{K}_{bb\infty} = \mathbf{A}_b \quad (2.10)$$

下标 ∞ 表示已经收敛的阵。

这是一种 2^N 的子结构的迭代法。第一次消元时是 2 个超级单元;第

二次消元是 $2^2 = 4$ 个超级单元;第 N 次消元是 2^N 个超级单元了。收敛是很快,是平方收敛的速度。

从(2.9)式可以看到,(2.3')的性质是递归的。即迭代中 $\mathbf{K}_{aa}$, $\mathbf{K}_{bb}$ 总是对称而且非负。这是因为每一次迭代得到的 $\mathbf{K}$ 阵肯定是非负的。对称性质由(2.9)式容易证明,而且容易见到

$$\mathbf{K}_{aa2} \leq \mathbf{K}_{aa}; \quad \mathbf{K}_{bb2} \leq \mathbf{K}_{bb} \quad (2.11)$$

这个不等号是从二次型能量角度看的。这样,迭代法从原始的 $\mathbf{K}_{aa}$, $\mathbf{K}_{bb}$ 不断下降,一直按(2.10)式收敛到 $\mathbf{A}_a$ 及 $\mathbf{A}_b$ 阵。由于是单调下降,下界是 0,所以一定收敛,而且是平稳的。但这并不排除 $\mathbf{K}_{aa}$, $\mathbf{K}_{bb}$ 为很大的二次型阵,而 $\mathbf{A}_a$, $\mathbf{A}_b$ 相比很小的情况。因此,计算中必须考虑精度,防止累积的大数相减的可能。这样会损失有效位数,计算的精度大受影响。这是刚度法消元的特点。虽然编程方便而且容易理解,但计算结果有时不理想。

但刚度法并不是唯一的方法。柔度法或余能原理也是可以考虑的方法,当然还有一般变分原理。我们喜欢用一般变分原理。因为当 $\mathbf{K}$ 不能求逆时,一般变分原理仍可适用。在对于子结构模式时,表现为混合的能量形式。读者如果熟悉热力学时,会看到在数学上是一致的,都是基于 Legendre 变换^[19]的。变形能 U 是 $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{u}_b$ 的函数,现在引入

$$\mathbf{N}_b = - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_b} \right)_{\mathbf{u}_a}, \quad \mathbf{N}_a = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_a} \right)_{\mathbf{u}_b} \quad (2.12a, b)$$

$\mathbf{N}_b$ 中引入一个负号是因为作用力与反作用力相差一个方向所致。现在引入变换函数

$$V(\mathbf{u}_a, \mathbf{N}_b) = \mathbf{u}_b^T \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_b} - U(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = - \mathbf{N}_b^T \mathbf{u}_b - U \quad (2.13)$$

V 是定为 $\mathbf{u}_a$ 与 $\mathbf{N}_b$ 的函数的,如(2.13)中的显式表示。 V 可以称为混合能。因为它一半是势能,一半是余能式。既然选定 $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{N}_b$ 为自变量,则 $\mathbf{u}_b$, $\mathbf{N}_a$ 都是 $\mathbf{u}_a$ 与 $\mathbf{N}_b$ 的函数。为表示明确起见,偏微商括号外下标就表示该量不变的偏微商;例如 $\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_b} \right)_{\mathbf{u}_a}$ 表示对于 $\mathbf{u}_b$ 取偏微商时 $\mathbf{u}_a$ 不变之意。

于是,从(2.13)式可得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{N}_b} \right)_{\mathbf{u}_a} = - \mathbf{u}_b - \mathbf{N}_b^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{N}_b} \right)_{\mathbf{u}_a} - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_b} \right)_{\mathbf{u}_a}^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{N}_b} \right)_{\mathbf{u}_a} = - \mathbf{u}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}_a}\right)_{\mathbf{N}_b} = -\mathbf{N}_b^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{u}_a}\right)_{\mathbf{N}_b} - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_a}\right)_{\mathbf{u}_b} - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_b}\right)_{\mathbf{u}_a}^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{u}_a}\right)_{\mathbf{N}_b} = -\mathbf{N}_a$$

这是一般的表述。做得具体一些,由(2.12)式有

$$\mathbf{N}_b = -\mathbf{K}_{ba}\mathbf{u}_a - \mathbf{K}_{bb}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{N}_a = \mathbf{K}_{aa}\mathbf{u}_a + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{u}_b$$

换成以 $\mathbf{u}_a$ 与 $\mathbf{N}_b$ 为自变量,有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_b &= -\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba}\mathbf{u}_a - \mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{N}_b \\ \mathbf{N}_a &= (\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba})\mathbf{u}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{N}_b \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

而混合能 V 的显式表示成为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}_a, \mathbf{N}_b) &= -\frac{1}{2}\mathbf{u}_a^T (\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba})\mathbf{u}_a \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{N}_b^T \mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{N}_b + \mathbf{N}_b^T \mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba}\mathbf{u}_a \end{aligned} \quad (2.15)$$

这样,(2.14)式也可以写成

$$\mathbf{u}_b = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{N}_b}; \quad \mathbf{N}_a = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}_a} \quad (2.16)$$

这与一般的表述是一致的。由此,有全变分表示式

$$\mathbf{u}_b^T \delta \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_a^T \delta \mathbf{u}_a = -\delta V \quad (2.17)$$

这是混合能的很重要的变分式。

现在要将混合能用于 k 及 $k+1$ 两个子结构的拼接,见图 2.1。拼接时注意

$$\mathbf{u}_{bk} \equiv \mathbf{u}_{a_{k+1}} \equiv \mathbf{u}_{k+1}; \quad \mathbf{N}_{bk} \equiv \mathbf{N}_{a_{k+1}} \equiv \mathbf{N}_{k+1} \quad (2.18)$$

依此类推。于是有

$$\mathbf{N}_k^T \delta \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k+1}^T \delta \mathbf{N}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1}^T \delta \mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_{k+2}^T \delta \mathbf{N}_{k+2} = -\delta(V_k + V_{k+1})$$

或注意到 $\mathbf{u}_{k+1}^T \delta \mathbf{N}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1}^T \delta \mathbf{u}_{k+1} = \delta \mathbf{N}_{k+1}^T \mathbf{u}_{k+1}$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_k^T \delta \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k+2}^T \delta \mathbf{N}_{k+2} &= -\delta[\mathbf{N}_{k+1}^T \mathbf{u}_{k+1} + V(\mathbf{u}_k, \mathbf{N}_{k+1}) \\ &\quad + V(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})] \end{aligned} \quad (2.19)$$

上式左方并无 $\mathbf{u}_{k+1}$ 及 $\mathbf{N}_{k+1}$; 因此右侧的 $\mathbf{u}_{k+1}$ 及 $\mathbf{N}_{k+1}$ 就成为内部未知量,可以予以消元。

为了使表达式简单,并且又可与最优控制理论相比拟,引入符号

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_{bb}^{-1}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba}, \quad \Phi = -\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba} \quad (2.20)$$

这样就有

$$V(u_k, N_{k+1}) = \frac{1}{2} N_{k+1}^T G N_{k+1} - \frac{1}{2} u_k^T Q u_k - N_{k+1}^T \Phi u_k \quad (2.21)$$

$$\text{及} \quad u_{k+1} = \Phi u_k - G N_{k+1}, N_k = Q u_k + \Phi^T N_{k+1} \quad (2.22)$$

$$\text{或} \quad \begin{Bmatrix} u_{k+1} \\ N_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi & -G \\ Q & \Phi^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ N_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (2.22')$$

这里下标 k 可以看成 a 端, 下标 $k+1$ 就是 b 端。现在用(2.21)式代入(2.19)式并展开, 有

$$\begin{aligned} N_k^T \delta u_k + u_{k+2}^T \delta N_{k+2} = & -\delta \left(N_{k+1}^T u_{k+1} + \frac{1}{2} N_{k+1}^T G N_{k+1} \right. \\ & - N_{k+1}^T \Phi u_k - \frac{1}{2} u_k^T Q u_k + \frac{1}{2} N_{k+2}^T G N_{k+2} \\ & \left. - N_{k+2}^T \Phi u_{k+1} - \frac{1}{2} u_{k+1}^T Q u_{k+1} \right) \quad (2.23) \end{aligned}$$

对于 u_{k+1} 及 N_{k+1} 取偏微商为零, 有方程

$$-Q u_{k+1} + N_{k+1} = \Phi^T N_{k+2}, \quad u_{k+1} + G N_{k+1} = \Phi u_k \quad (2.24)$$

由此解出

$$\begin{cases} u_{k+1} = (I + GQ)^{-1} \Phi u_k - (I + GQ)^{-1} G \Phi^T N_{k+2} \\ N_{k+1} = (I + GQ)^{-T} \Phi^T N_{k+2} + (I + GQ)^{-T} Q \Phi u_k \end{cases} \quad (2.25)$$

代入(2.23)式, 经过一番矩阵代数运算, 得^[12]

$$N_k^T \delta u_k + u_{k+2}^T \delta N_{k+2} = -\delta V_2(u_k, N_{k+2}) \quad (2.26)$$

式中

$$V_2(u_k, N_{k+2}) = -\frac{1}{2} u_k^T Q_2 u_k + \frac{1}{2} N_{k+2}^T G_2 N_{k+2} - N_{k+2}^T \Phi_2 u_k \quad (2.27)$$

且

$$Q_2 = Q + \Phi^T (Q^{-1} + G)^{-1} \Phi \quad (2.28)$$

$$G_2 = G + \Phi (G^{-1} + Q)^{-1} \Phi^{-T} \quad (2.29)$$

$$\Phi_2 = \Phi (I + GQ)^{-1} \Phi \quad (2.30)$$

V_2 是两个子结构拼接而得的混合能。其形式与(2.21)的 V 是一样的。在推出 V_2 时对于(2.23)的右端, 应当更确切些, 写成为

$$\max_{N_{k+1}} \min_{u_{k+1}} \quad \text{或} \quad \min_{u_{k+1}} \max_{N_{k+1}} \quad (2.31)$$

(2.28)~(2.30)式也给迭代求解提供了基础的公式。算法为:

(1) 已知当前的 Q, G, Φ 阵, 计算出 Q_2, G_2, Φ_2 。用(2.28~

2.30)式。

(2) 代以 $Q := Q_2; G := G_2; \Phi := \Phi_2$

(3) 如果 Φ 阵足够小, 迭代停止; 否则转(1), 进入下一轮迭代。

当迭代结束时, 有

$$Q_2 \rightarrow Q_\infty = A_a; \quad G_2 \rightarrow G_\infty = A_b^{-1} \quad (2.32)$$

这个结论似乎有些突然。我们可以通过以下的分析来予以证实。其实就可以通过位移法来说明。因为迭代一次, 子结构串的长度增加一倍, 因此相当于位移法时 $K_{ab} \rightarrow 0$ 。现在用的是混合能, 它与变形能的算式是相通的。事实上分块子矩阵之间有(2.20)式的关系。故知当串特别长时有

$$Q \rightarrow K_{aa} = A_a; \quad G \rightarrow K_{bb}^{-1} = A_b^{-1}$$

这就是(2.32)式。

从(2.20)式可知 Q 与 G 都是对称阵, 并且非负。 G 正定。且 $Q \leq K_{aa}$, 等号仅在 $K_{ab} = 0$ 时才成立。从(2.28)~(2.30)式可以看出当前迭代法的特点为

$$Q_2 \geq Q; \quad G_2 \geq G \quad (2.33)$$

且等号仅在 $\Phi = 0$ 时才成立, 但那时迭代就不必要了。因此(2.33)式不会有等号。 Q 与 G 都是对称非负, 所以迭代过程中是单调上升的。所以收敛过程肯定平稳。而且由于是加号, 不断上升, 因此不会发生大数累积相减的情形。所以当前的迭代比起位移法(2.9)式的迭代, 精度更为好些。

由(2.33)式看到, 混合能迭代给出了 A_a 的下限, 而位移法迭代给出了 A_a 的上限。这个上、下限迭代是很吸引人的。尤其是这些结论可以引入到最优控制的理论中。

再看 A_b 阵。 G 阵是从下面向 A_b^{-1} 逼近的, 这可由(2.32)式看出。因此 G^{-1} 给出了 A_b 的上限。

对于这个结论, 又可加以利用。因为混合能也可以换一个方向。不用(2.15)及(2.13)式的 $V(u_a, N_b)$, 而采用 $V(u_b, N_a)$ 。然后根据完全类同的推演, 可以给出 A_b 的下限, 以及 A_a 的上限。由(2.14)式可以看到, 在理论上这两个上限是一样的。然而在数值分析上, 不断增值的柔度阵比起不断降低的刚度阵计算精度要好些。

为了增进理解, 应当给矩阵 Q , G 以及 Φ 作出物理解释。从(2.20)式看出, G 是一个柔度阵; 确切一些, 它是子结构模式在 a 端位移全部约束住