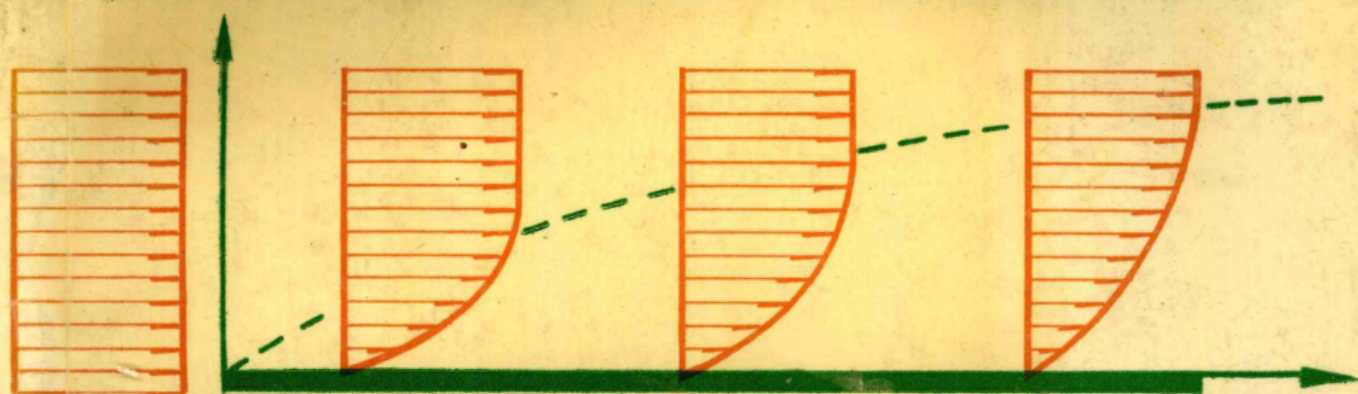


李建中 宁利中 编著



水流边界层理论

水利电力出版社

水流边界层理论

BOUNDARY LAYER THEORY FOR WATER FLOW

李建中 宁利中 编著

水利电力出版社

(京)新登字115号

内 容 提 要

本书是一本系统阐述水流边界层理论的著作,总结了国内外近年的研究成果,反映了这个领域的最新研究水平。全书分三部分,第一部分系统而精炼的介绍边界层理论的基础知识,第二、三部分分别介绍明流及管流边界层的理论与计算,内容广泛,深入浅出,并列有大量参考文献。

本书可作为高等院校与水有关专业的研究生及本科生的教科书或参考书,可供从事水利、水电、能源、航空、航运、交通、环境、给排水与流体力学等专业的科技人员参考。

水流边界层理论

李建中 宁利中 编著

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

西安电子科技大学印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开 9印张 206千字

1994年2月第一版 1994年2月第一次印刷

印数0001—1000册

ISBN7-120-02026-9/TV·752

定价:9.00元

前 言

边界层概念是1904年普朗特提出的，此后的几十年边界层理论虽得到了很大的发展，但至今仍未完善。特别是水流边界层是从本世纪50年代才开始研究的，直到目前还没有系统阐述水流边界层理论的著作，本书是个尝试。

本书内容分三部分：第一部分是介绍边界层理论的基础知识；第二部分为明流边界层的理论与计算；第三部分为管流边界层理论与计算。后两部分主要介绍作者在80年代以来的研究成果，同时也介绍国内外其他科技工作者的研究成果。

本书在编写中突出了水流不同于气流的特点，主要内容都是作者及国内外的其他研究者在80年代以来的最新研究成果，也是作者近年来对研究生教学讲稿的总结与提高，是目前国内外系统讲解水流边界层理论的唯一著作。

本书的第一、二章由李建中编写，宁利中编写了第三章并负责全书的校订工作。

本书是作为研究生教材而编写的，也可作为水利水电和土木建筑类与水有关的专业本科生的选修课教材，还可供从事水利水电、能源、航空、航运、交通、环境与给水排水等专业的科技工作者进行科学研究和工程设计参考。

限于水平，谬误和不足之处在所难免，敬请读者批评、指正。

本书承蒙陕西机械学院水利水电学院赵乃熊教授、《陕西水力发电》杂志主编赵修荣教授及北京水利水电勘测设计院韩立高级工程师审阅，水利电力出版社对本书的出版给予大力支持，同时还约请了一些专家、教授对本书进行了审阅，在此一并致谢。

作 者

1994年2月于西安

目 录

前 言

第一章 边界层理论基础	1
§ 1-1 边界层概念	1
§ 1-2 边界层基本方程	3
§ 1-3 脱体现象	6
§ 1-4 绕流阻力	9
§ 1-5 边界层方程的相似性解法	10
§ 1-6 边界层的动量积分关系式解法	15
§ 1-7 有压力梯度的小曲率壁面层流边界层的动量积分关系式解法	23
§ 1-8 边界层的动能积分关系式解法	30
§ 1-9 紊流边界层	32
§ 1-10 平板紊流边界层的动量关系式解法	36
§ 1-11 有压力梯度的紊流边界层解法	39
参考文献	43
第二章 明流边界层	44
§ 2-1 概述	44
§ 2-2 明流光滑平板边界层	45
§ 2-3 光滑溢流陡坡上的紊流边界层	47
§ 2-4 粗糙溢流陡坡上的紊流边界层	49
§ 2-5 用流速对数律研究陡坡上的紊流边界层	53
§ 2-6 陡坡紊流边界层的数值计算	60
§ 2-7 曲面边界层的运动方程和连续方程	66
§ 2-8 曲面紊流边界层的运动方程和连续方程	68
§ 2-9 曲面边界层的动量方程及其求解	69
§ 2-10 反弧曲面紊流边界层的试验研究	73
§ 2-11 反弧曲面水力特性的试验研究	75
§ 2-12 反弧曲面紊流边界层的动量积分方程组及其数值解	80
§ 2-13 溢流反弧曲面的紊流数学模型	90
参考文献	98
第三章 管流边界层	101

§ 3-1 概述.....	101
§ 3-2 圆管边界层基本方程及其变换.....	102
§ 3-3 圆管边界层的动量积分方程与动能积分方程.....	105
§ 3-4 圆管层流边界层.....	112
§ 3-5 光滑圆管紊流边界层.....	117
§ 3-6 粗糙圆管紊流边界层.....	125
§ 3-7 圆管紊流边界层流速分布指数律研究.....	135
参考文献.....	138

第一章 边界层理论基础

自1904年普朗特(L. Prandtl)提出边界层理论,八十多年来,这个理论在很多工程领域得到了广泛的应用与发展,促使流体力学学科取得了划时代的进展。

§ 1-1 边界层概念

在大雷诺数的流动中,由于 $Re \gg 1$,因此流体的惯性力远远大于作用在流体上的粘性力,粘性力相对于惯性力可以忽略不计,于是可以把流体视为理想流体。由理想流的体理论,可以得到流场的流速分布与压强分布。但是我们发现,由理想流体理论得到的在固壁附近的速度场与实际情况相差甚远。在实际流动中,紧贴固壁壁面的流体与固壁之间并无相对运动,在壁面附近沿其法线方向存在相当大的速度梯度,故在壁面附近的一层流动区域中,粘性力与惯性相比不能忽略。

普朗特根据大雷诺数流动的特点提出下列设想:把整个流动可以分成两个区域来研究,在固壁附近的一薄层中,必须考虑粘性的作用,并把这一薄层称为边界层;而薄层(边界层)以外的区域可以看作是理想的流动区域。正是由于粘性作用被限制于一薄层中,因此对边界层来说,粘性流体动力学的基本方程可以大为简化。

边界层理论最主要的任务是计算物体在流场中运动时所受的阻力,同时要求它阐明理想流体所不能解释的一些现象(如脱体现象);阐明理想流体在压强分布、速度分布及举力等方面为什么和实验结果相当符合等问题。

下面用一个实验来进一步阐明边界层的概念。将一平板放在风洞里吹风,假定 Re 很大,用毕托管测量各个截面上的流速分布。量测结果如图1-1所示,从图上可以明显地看出,整个流场可分为两个性质不相同的区域。一是紧贴壁面非常薄的一层区域(即边界层);另一个是边界层以外的流动区域。

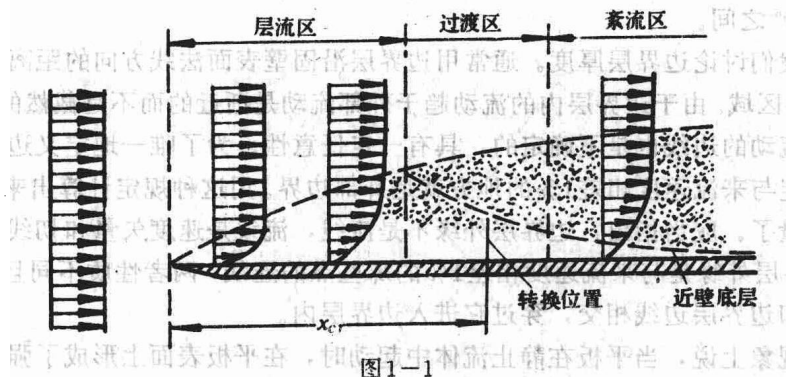


图1-1

从实验结果知：在边界层外流区中，固壁对流动的滞止作用大大地削弱，各个截面上 x 方向的速度分量基本不变， $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ 很小， μ 也很小，因此粘性切应力 $\tau (= \mu \frac{du_x}{dy})$ 在大雷诺数时，的确较惯性力小得很多，所以可将粘性力全部略去，把流体近似地看成是理想的。而且因为考虑的是均匀来流绕物体的流动，所以整个外流不仅是理想的，而且还是无旋的。从实测的流速分布可以看出，整个外流的流速分布和理想流体绕物体的速度分布十分接近，在平板情况就是均匀来流的流速 U 。

边界层中的情况恰好相反。量测出的数据表明，边界层内的速度 u_x 沿固壁面的法向变化非常迅速。这是因为一方面流体必须粘附在固壁上，它在固壁上的相对速度等于零；另一方面，当流体在固壁附近很短的一段距离到达边界层外部边界时，速度立即取外流的势流值。速度从相当高的势流值连续降低到固壁上的零值是在非常狭窄的范围内完成的。因此它的变化异常急剧，流速梯度 $\partial u_x / \partial y$ 很大。虽然在大 Re 数情况下，流体的粘性系数 μ 很小，但因流速梯度很大，粘性切应力仍然可以达到很高的数值。此时粘性力不是如同外流那样显著地小于惯性力，而是一个与惯性力同数量级的量，它所起的作用与惯性力同等重要，必须一起加以考虑。因此，在边界层内绝不能忽略粘性力，而必须研究粘性流体在边界层内的流动，否则就不符合实际情况，也难期望得到正确的结果。此外，由于边界层内的流速梯度很大，所以边界层内的流动将是一个强烈的剪切运动，每点都有强度很大的涡流。这样边界层内的流体不仅有粘性，而且还呈现出强烈的旋涡运动。

对实验数据进行上述分析后可以肯定整个大 Re 数流动可以分成理想无旋的外流区和粘性有旋的边界层区域，这两个区域在边界层边界上衔接起来。

还需要指出的是，既然边界层内是粘性流动，因此边界层也有层流边界层和紊流边界层的区别。边界层内部流动状态转变的典型情况如图 1-1 所示。平板前缘附近为层流边界层，在沿流某一位置层流边界层厚度增至某一厚度时，层流变得不稳定而转变为紊流。两种流动的转变区域称为过渡边界层。实验发现过渡边界层中部分是层流，部分是紊流，实际上是从一种流态转变为另一流态的摇摆状态。在过渡区的下游是紊流边界层。如果是光滑平板，紊流边界层的近壁处还有一粘性边层，粘性边层的厚度约占整个边界层厚度的 $0.1\% \sim 1.0\%$ 。试验表明：边界层由层流转变为紊流的临界雷诺数大致在 $Re = \frac{Ux}{\nu} = 5 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$ 之间。

下面，我们讨论边界层厚度。通常用边界层沿固壁表面法线方向的距离即边界层厚度 δ 表征边界层区域。由于边界层内的流动趋于外部流动是渐近的而不是截然的，因此划分边界层和外部流动的边线也是不确定的，具有一定任意性。为了唯一地定义边界层厚度，通常人为地规定与来流速度相差 1% 的地方就是外部边界。用这种规定计算出来的 δ 就是一个唯一确定的量了。应当指出：边界层外缘不是流线，流线是速度矢量和切线方向重合的那种线，而边界层外缘是与来流速度相差 1% 的那些点的连线，两者性质不同且互不相关。实际上流线多和边界层边线相交，穿过它进入边界层内。

从物理现象上说，当平板在静止流体中起动时，在平板表面上形成了强烈的旋涡（即剪切流动）。涡将以一定的速度沿平板法线方向向无旋的静止流体扩散， t 秒钟后将扩散到

与 $\sqrt{\nu t}$ 成正比的距离处。若我们将坐标系固定在平板上考虑绕流问题，一方面贴近固壁的旋涡运动以一定速度向外扩散涡量，另一方面来自无穷远处的无旋运动以 U 的速度绕平板流过来，这样就把有旋涡的流体包围在平板附近非常薄的一层内，这层流体所处的区域就是边界层，它和基本上是无旋的外流衔接。显然 t 秒钟后，涡扩散了的距离，即 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ ，另一方面，流体质点由于来流的流速，往下游移动了 $x = Ut$ 的距离，将 t 表示为 $\frac{x}{U}$ ，即得涡扩散的范围，也就是边界层的厚度。于是

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (1-1)$$

此式表明，边界层厚度和 $\sqrt{x}$ 成正比，在平板前缘边界层厚度为零，愈往下游受到粘性阻滞的流体愈来愈多，因此边界层的厚度也就愈来愈厚；其次边界层厚度还和 $\sqrt{\nu}$ 成正比。这是因为粘性系数 ν 大时，扩散速度就大，涡量分布范围即边界层厚度也就愈大，式(1-1)还表明 δ 与 $\sqrt{U}$ 成反比， U 愈大，来流就把边界层内的流体包围在更小的区域内，因此，边界层的厚度也就愈小。

式(1-1)可改写为：

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (1-2)$$

式中 $\text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$ 。由此式可见，边界层厚度与以特征长度所表示的雷诺数成反比。当 Re_x 数很大时， δ 与特征长度相比将是一个非常小的数值。例如对弦长2m的在气流中的翼剖面，边界层厚度约为几个厘米；对水轮机叶片因特征长度小，所以边界层厚度为几毫米；对于长达几百米的轮船，边界层厚度可达1m。

在明确了边界层的基本概念后，还须说明的是：边界层以外的流动区域属于理想流体的势流，它的解法已在流体力学课程中讨论过了，因此我们可以认为外流的解已经求出，即边界层外缘上的压强分布和流速分布已经求出，它将作为边界层流动的一个边界条件。边界层内部的流动，属于粘性流体范围，是本书讨论的对象。本来描述边界层内粘性流体运动的应是纳维——司托克斯方程，但是因为边界层厚度 δ 比特征长度小得多，而且 x 方向的速度分量沿法向的变化比切向大得多，所以纳维——司托克斯方程可以得到相当大的简化。简化的过程就是我们下节所要讨论的内容。

§ 1-2 边界层基本方程

边界层基本方程是普朗特于1904年根据纳维——司托克斯方程对于小粘性流体大 Re 数情况、不计质量力时的恒定二元流动所导出的，故又称为普朗特边界方程。二元流动的纳维——司托克斯方程及连续方程为：

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

引进无因次量:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x}{u_0}, & u'_y &= \frac{u_y}{u_0}, & p' &= \frac{p}{\rho u_0^2} \\ x' &= \frac{x}{L}, & y' &= \frac{y}{L}, & \delta' &= \frac{\delta}{L} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中 u_0 为特征流速(如来流流速); L 为特征长度(如绕体长度或直径)。

将方程组(1-3)无因次化即得:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{u_0^2}{L}\right) u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \left(\frac{u_0^2}{L}\right) u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} &= -\left(\frac{u_0^2}{L}\right) \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu \left(\frac{u_0^2}{L^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2}\right) \\ \left(\frac{u_0^2}{L}\right) u'_x \frac{\partial u'_y}{\partial x'} + \left(\frac{u_0^2}{L}\right) u'_y \frac{\partial u'_y}{\partial y'} &= -\left(\frac{u_0^2}{L}\right) \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \left(\frac{u_0^2}{L^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_y}{\partial y'^2}\right) \\ \left(\frac{u_0}{L}\right) \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \left(\frac{u_0}{L}\right) \frac{\partial u'_y}{\partial y'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

现在来估计方程组(1-5)中各项在边界层内的数量级。什么叫数量级? 数量级不是指该物理量或几何量的具体数值, 而是指该量相对于某个标准的平均水平。估计数量级必须有个标准, 数量级都是相对这个标准而言的, 标准不同, 则结论不同。在边界层问题中, 我们取 $\delta' = \frac{\delta}{L}$ 作为估计标准, 因为边界层厚度 δ 较物体的特征长度 L 小得多, 所以 δ' 是一个微量, 可假定 $\delta' \ll 1$, 故可确定数量级的递减顺序为:

$$\frac{1}{(\delta')^2}, \quad \frac{1}{\delta'}, \quad 1, \quad \delta', \quad (\delta')^2$$

式(1-5)中各项的数量级如下:

在边界层内 u 与 u_0 为同数量级的量, 所以 $u'_x \sim 1$; 在边界层内 x 与 L 亦为同数量级的量, 所以 $x' \sim 1$; 当 x' 从平板前缘移动到与 1 同数量级的量时, u' 也由 0 变到与 1 同数量级的量, 所以 $\frac{\partial u'_x}{\partial x'} \sim 1$, 同理 $\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} \sim 1$ 。根据连续方程可推出 $\frac{\partial u'_y}{\partial y'} = -\frac{\partial u'_x}{\partial x'}$, 于是 $\frac{\partial u'_y}{\partial y'} \sim 1$, 而 $u'_y = \int_0^{\delta'} \frac{\partial u'_y}{\partial y'} dy' = \int_0^{\delta'} dy' = \delta'$, 即 u'_y 的数量级为 δ' 。当 y' 由 0 变到 δ' 时, u'_x 从 0 变到与 1 同数量级的量, 可见 $\frac{\partial u'_x}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'}$; 同理 $\frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'^2}$ 。从上述各项的数量级可知 $\frac{\partial u'_y}{\partial x'} \sim \delta'$, $\frac{\partial^2 u'_y}{\partial x'^2} \sim \delta'$ 。因为在边界层内, y' 的数量级为 δ' , 所以 $\frac{\partial^2 u'_y}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'}$ 。在边界层内惯性力项与粘性力项的数量级相同, 所以压强梯度项的数量级也应与惯性力项或粘性力项相同, 从式(1-5)中可知:

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} \sim 1, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \delta' \quad (\text{或可以认为 } \frac{\partial p'}{\partial y'} = 0)$$

将上面分析出来的各项数量级附写在简化的方程(1-5)各式之下:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \right) \\ 1 \quad 1 \quad \delta' \quad \frac{1}{\delta'} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta'^2} \\ u'_x \frac{\partial u'_y}{\partial x'} + u'_y \frac{\partial u'_y}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_y}{\partial y'^2} \right) \\ 1 \quad \delta' \quad \delta' \quad 1 \quad \delta' \quad \delta' \quad \frac{1}{\delta'} \\ \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y'} = 0 \\ 1 \quad 1 \end{array} \right.$$

在边界层内,粘性力与惯性力为同数量级的量,从第一式可知 $\frac{1}{Re}$ 的数量级为 δ'^2 。

把无因次方程组中,其数量级小于1的各项均忽略掉,可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y'} = 0 \end{array} \right.$$

将其转化为有因次的方程,可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (1-6)$$

此方程是弱粘性流体、大雷诺数情况下,不计质量力时恒定二元流动的普朗特边界层方程。

在边界层内由于 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 的数量级小于 $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 的数量级,所以可认为:

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0$$

即

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

上式说明在边界层内沿法向压强不变,即边界层边缘上的压强分布就是固壁上的压强分布。而边界层边缘上的压强分布可由势流理论求得。另外 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$,又说明 p 仅为 x 的函数,即 $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$ 。

式(1-6)由两个方程式组成,但有 u_x, u_y 及 p 三个未知数,所以必须找出三个未知数中的一个,这个方程组才可解。根据普朗特的建议,这问题是这样解决的,因为在紧接边界层的外部流动区域中,流动可以看作是无旋的, $u=U$ 。在大雷诺数情况下,可将运动方程中的

粘性项完全略去,从而使势流区的运动方程变为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-7)$$

对于恒定流 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, 有:

$$U \frac{dU}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (1-8)$$

此式也可由势流的拉格朗日方程 ($p + \frac{\rho U^2}{2} = \text{Const.}$) 得到。

这样,式(1-6)可改写为:

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

如果流动是非恒定的,可以证明下式是成立的:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

只要 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 已知,就可由式(1-9)或式(1-10)解出 u_x 及 u_y 。其边界条件为:

当 $y=0$ 时, $u_x = u_y = 0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= - \frac{1}{\nu} U \frac{dU}{dx} \\ u &= U \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

$y = \delta$ (或 $y \rightarrow \infty$) 时,

$$u = U$$

对式(1-11)积分可得 $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, 进而可求出壁面附近的切应力:

$$\tau_0 = \mu \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (1-12)$$

那么整个壁面上的摩擦阻力为:

$$F_x = \int_A \tau_0 dA \cos(\tau_0, x)$$

最后,需要指出的是,普朗特边界层方程只能适用于 $10^3 \leq \text{Re}_x \leq 10^6$ 范围内及脱点(分离点)的上游。

以下两节,我们将利用边界层概念及边界层基本方程阐明一些现象,这些现象应用理想流体理论是不能得到解释的。

§ 1-3 脱 体 现 象

实验证实,用理想流体理论求得的翼剖面不脱体绕流壁面上的压强分布和实验数据符合得很好。为什么理想流体的结果能这么好的反映实质上是粘性流体的结果呢?这个疑问

应用边界层概念可以得到明确的解释,原因就在于边界层内的压强沿法向是不变的,即壁面上的压强分布和边界层外部边界上理想势流的压强分布完全一样。

现在我们以圆柱这样的非流线性物体为例定性的说明脱体现象产生的原因。

若是理想势流,柱体前后 A, B 两点为驻点(图1-2),在最大速度点 E , 流速 $u_E = 2U$, 压力 $p_E = p_{\min}$ 。因为在理想势流中只有能量转换,而无能量损失,所以在 AE 段, $\frac{dp}{dx} < 0, \frac{du_x}{dx} > 0$, 压能转变为动能,顺压力梯度推动流体质点作加速运动;在 EB 段, $\frac{dp}{dx} > 0, \frac{du_x}{dx} < 0$, 动能变为压能,流体质点在 E 点所具有的动能刚好能克服逆压强梯度,使流体质点流到 B 点,流动不会脱体。

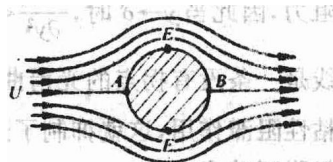


图1-2

对于实际流体,在圆柱壁面上形成了边界层。开始,边界层很薄,与理想流体差别甚微。待边界层发育健全后,在 AE 段,虽顺压强梯度推动流体质点前进,但由于要克服粘性阻力,致使部分压能转为热能而损失掉,剩余的压能转变为动能,但此时 $u_E < 2U$ 。在 EB 段,由于这时 E 点所具有的动能,已不足以克服逆压及粘性阻力的影响,使流体质点流到 B 点,而在途中的某点 S ,流动质点的动能耗尽而停止不前,即 $u_S = 0$ 。这时边界层厚度剧增,且逆压仍在起作用,致使在 S 点后,出现与来流方向的倒流而形成脱体现象。这股倒流,徘徊于固壁附近,并排挤外流。由于主逆流之间形成间断面,间断面破裂则形成一个个旋涡顺流而下,这就是所谓尾流,在尾流区伴有巨大的能量损失。可见,边界层存在是形成尾流的先决条件,而尾流是边界层脱体的必然结果,且边界层脱体只可能出现在逆压区(图1-3)。

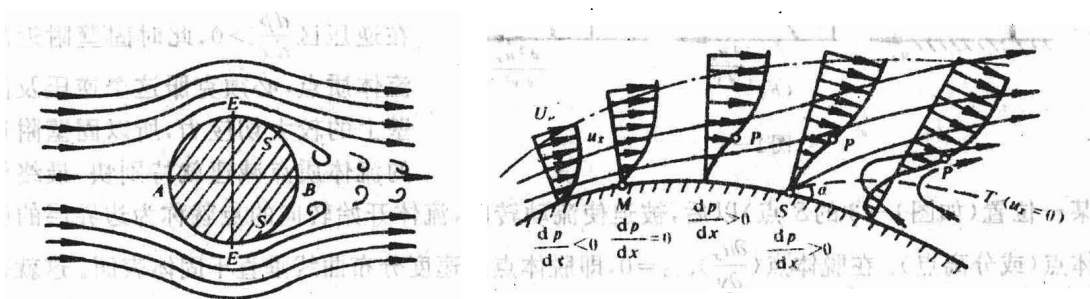


图1-3

现在来探讨一下,顺压区以及逆压区中速度分布曲线的性质和数学上确定脱体点位置的条件。

由基本方程(1-6)知,在壁面处($y=0$), $u_x = u_y = 0$, 所以有:

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1-13)$$

即在壁面附近,速度分布曲线的曲率只依赖于压强梯度;随着压强梯度的变号,速度分布线

的曲率亦将改变它的符号。

在顺压区, $\frac{dp}{dx} < 0$, 此时 $(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2})_{y=0} < 0$, 即边界层的速度分布曲线, 在 x 轴方向向外凸(图 1-4a), 导数 $(\frac{\partial u_x}{\partial y})_{y=0}$ 是正的, 另一方面, 在边界层的外缘, $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ 趋近于零, 且外缘上没有摩擦阻力, 因此当 $y \rightarrow \delta$ 时, $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} < 0$ 。故在顺压加速区, $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ 永远是负的, 边界层内的速度分布曲线是一条没有拐点的光滑曲线。由于此时 $\frac{dp}{dx} < 0$, 即压强的沿流降低部分抵消了固壁附近的粘性阻滞作用, 这就抑制了边界层变厚的倾向, 因此流体不可能脱离物体, 即在顺压区, 流体紧附固壁流动。

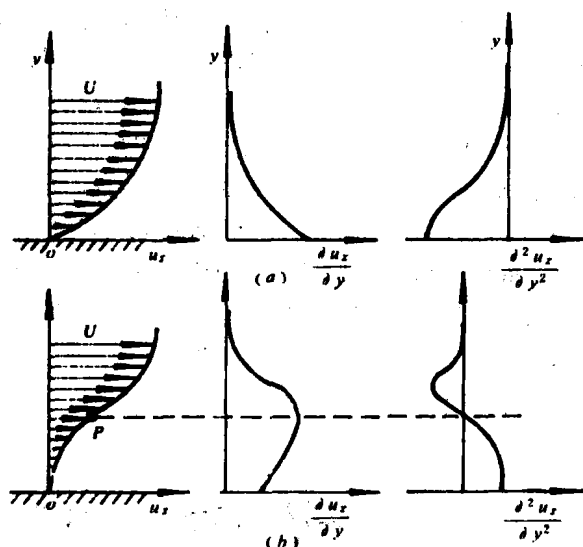


图 1-4

在逆压区, $\frac{dp}{dx} > 0$, 流动减速,

$\frac{du_x}{dx} < 0$ 。沿流随压强升高及粘性阻滞作用, 使边界层内的流体质点减速, 速度分布曲线在 $y=0$ 处内凹(图 1-4b), 即 $(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2})_{y=0} > 0$ 。但由于 $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ 向边界层边缘趋近于零, 而边界层边缘上又必须 $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} < 0$, 这显然表明速度分布曲线在 $y=0$ 与 $y=\delta$ 之间有一个转折点, 此点的 $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$, 在逆压区 $\frac{dp}{dx} > 0$, 此时固壁附近的流体质点, 必须克服这个逆压及固壁上的较大切应力, 所以固壁附近的流体质点减速就特别快, 最终到

某一位置(如图 1-3 的 S 点)以后, 被迫使流动转向, 流体开始转向的点就称为边界层的脱体点(或分离点)。在脱体点 $(\frac{\partial u_x}{\partial y})_{y=0} = 0$, 即脱体点的速度分布曲线垂直于固体表面。这就是数学上确定脱体点位置的条件。

自脱体点 S 以后的各处流速分布曲线将包括一股反方向的流体(逆流), 因此在脱体点 S 以后, 边界层的运动方程(1-6)就不再适用了。

以上关于边界层内流动过程的定性分析已得到实验的证实。

另外, 如果绕流体有凸出的尖角或锐边, 那么边界层的脱体就一定从尖角或锐边处开始。若绕流物体为流线形物体, 则脱体点将推迟出现, 其位置将随雷诺数的大小而改变。

§ 1-4 绕流阻力

当物体在流体中运动时,或者当物体固定,而流体绕过物体时,物体就会受到阻力的作用。在流体力学中把这种阻力分为摩擦阻力和压差阻力两类。

摩擦阻力是流体粘性所引起的,当流体绕过物体时,物体表面便形成边界层,在边界层内 du_x/dy 大,即粘性作用大,由于粘性牵制作用使物体受到阻力。这种阻力发生在物体的表面上,与表面面积成正比。摩擦阻力实际上是物体表面上各点切线方向的作用力在来流方向的合力。即

$$P_f = \int_A \tau_0 \sin\theta dA$$

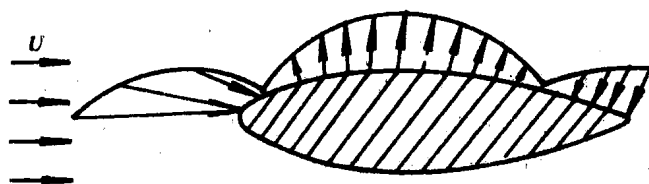


图 1-5

式中 P_f 为摩擦阻力, A 为固壁壁面的表面积, θ 为固壁上微元面积的法线与来流方向的夹角。

压差阻力(或形状阻力)的大小主要取决于物体的形状,而与物体表面面积的大小关系不大。为了说明这种阻力,我们来分析流线型回转体的绕流情况(图

1-5)。从图中的压强分布我们可以看出,前端正压强产生一个向后的水平合力,后端的正压强产生一个向前的水平力。物体中段压强为负,产生吸力,其前半部合成一个向前的水平力,后半部合成一个向后的水平力,这两者数值相差不大,可以认为相互抵消。这样,前后正压强在来流方向的合力,为一向后指的力,是阻止物体前进的,这个阻力就叫做压差阻力。压差阻力就是物体表面上各点法向压力在来流方向的合力。其表达式为:

$$P_p = - \int_A p \cos\theta dA$$

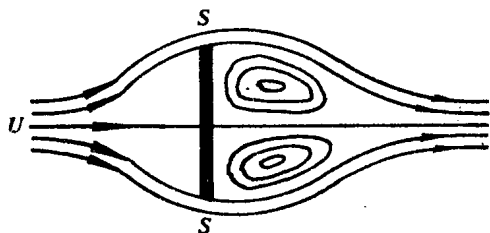


图 1-6

假如研究的是理想流体,没有摩擦消耗动能,流体在物体后半部完全贴附壁面流到后端点,由于速度的不断减小,使得压强不断提高,到后端时的压强就比较大。这样,物体后半部向前的合力,恰好能抵消前半部向后的合力,使压差阻力等于零。这也就是说,只要绕流体后半部不发生脱体,那么压差阻力就接近于零或等于零。一旦边界层脱体,则分离区的流速不再减低,静压不再提高。

分离得愈早,则脱体点后壁面上的静压就愈低,物体后半部的水平向前的分力就愈小,则压差阻力就愈大。

若后半段物面上作用的是负压,其水平合力向后,那压差阻力就更大。如正面迎风的圆板(图 1-6),边界层在其边缘便脱体,因之压差阻力大。

若没有粘性,则没有边界层的存在,就不会有脱体现象,流体都是附贴于物面的,那么压差阻力就为零了。从这个意义讲,压差阻力实际上也是粘性作用的结果。

边界层分离的迟早与物体的形状,特别是与物体后半部的形状关系极大。一般来说,物体后半部曲率愈大,分离愈早,即压差阻力大。反之曲率愈小,则分离愈迟,压差阻力小。故从减小阻力的观点出发,采用圆头尖尾的物体是很重要的。

压差阻力与摩擦阻力之和称为总阻力。总阻力的大小随物体形状的差异而不同。

§ 1-5 边界层方程的相似性解法

1908年布拉修斯(H. Blasius)首先应用普朗特边界层方程求解了绕流薄平面上的层流边界层。此后由于科学家的努力已提出了相当多求解边界层方程的方法。从这一节开始,我们将介绍三种基本解法,即相似性解法、积分关系式解法和数值解法。

本节介绍边界层方程的相似性解。令坐标原点位于平板的前端(图1-7), x 沿平板方向并与外部流速 U 平行, y 垂直于壁面。平板既薄又长,可以认为是无限长且厚度为零,水流为恒定的均匀来流。由于在这种情况下外部流速 U 为常数,根据势流的伯努利方程:

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = C$$

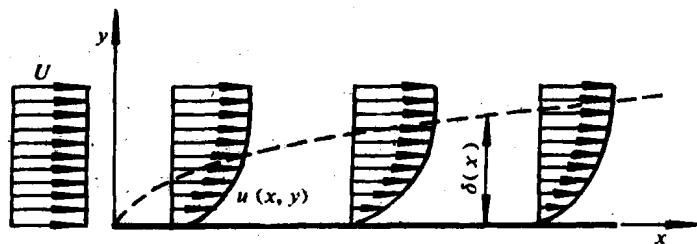


图1-7

可知 $\frac{dp}{dx} = 0$, 即 $p = \text{常数}$ 。因而边界层方程组(1-6)或(1-10)变为:

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} y = 0 \text{ 时,} & \quad u_x = u_y = 0 \\ y = \infty \text{ 时,} & \quad u_x = U \end{aligned} \right\}$$

H. Blasius 假定,在边界层内沿 x 轴各断面上的垂线流速分布图形相似。即

$$\frac{u_x}{U} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (1-15)$$

而函数 φ 对于所有的 x 值均是相同的,即函数 φ 与 x 无关。式中 δ 为距离平板前端点为 x 处的边界层厚度。由式(1-1)知:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

如取此比例系数为1,并令 $\eta = y/\delta$,则

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (1-16)$$

η 作为一个新的无因次坐标,可以代替 x, y 两个自变量,这样就可以把边界层方程从偏微分方程变为常微分方程。从式(1-16)可得:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2x} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = -\frac{\eta}{2x}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

为了便于积分连续性方程式,再引入流函数, $\psi(x, y)$,并取其值为

$$\psi = \sqrt{\nu x U} f(\eta)$$

式中 $f(\eta)$ 为无尺度的流函数。因此 u_x, u_y 可以表示为

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U} f'(\eta) \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U f'(\eta) \quad (1-17)$$

$$\begin{aligned} u_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [\sqrt{\nu x U} f(\eta)] \\ &= -[\sqrt{\nu x U} f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} f(\eta)] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f) \end{aligned} \quad (1-18)$$

由此可得 u_x, u_y 的微分式:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = U f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} U f''$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = U f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f'''$$