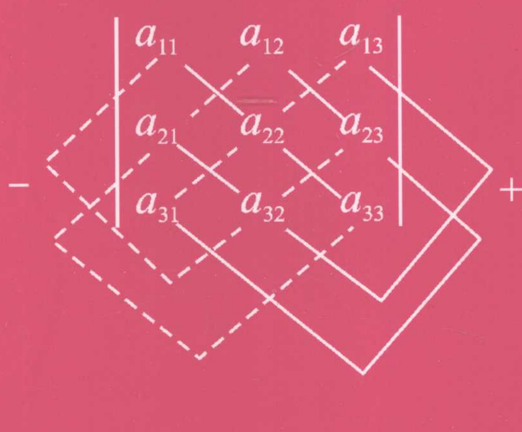
新编高等院校公共基础课系列规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

彭雪梅　杨贵诚　主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

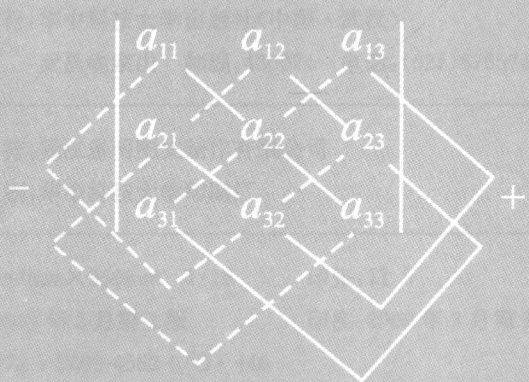
新编高等院校公共基础课系列规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　彭雪梅　杨贵诚

编　者　黄象鼎　陈桂兴　汪福宝



华中科技大学出版社

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/彭雪梅　杨贵诚　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2009 年 2 月
ISBN 978-7-5609-4562-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.①彭…　②杨…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 074186 号

线性代数　　彭雪梅　杨贵诚　主编

策划编辑:谢　荣
责任编辑:谢　荣　　封面设计:杨　玲
责任校对:朱　霞　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉星明图文制作有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm　1/16　印张:11.5　字数:246 000
版次:2009 年 2 月第 1 版　印次:2009 年 2 月第 1 次印刷　定价:20.00 元
ISBN 978-7-5609-4562-0/O·446

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

新编高等院校公共基础课系列规划教材编委会成员名单
（以下按拼音第一个字母的先后顺序排列）

毕重荣　陈桂兴　黄象鼎　李德庆　林　益
刘国军　李中林　廖超慧　孙清华　汪福宝
魏克让　赵国石　朱方生

前　言

近年来独立学院大量涌现并快速发展，到目前为止，全国已有数百所之多。与普通高等院校培养人才的模式不同，独立学院的人才培养更侧重于应用型和技能型。教材作为实现人才培养目标的载体，对独立学院人才培养的质量有举足轻重的作用，然而独立学院的教材建设有些滞后。目前，绝大多数独立学院的教材都是选用普通高校的教材或高职高专的教材，这两类教材都不太适合独立学院的学生学习。因此，编写适合独立学院人才培养需求的教材，成为当前的重要任务。

基于上述考虑，我们编写了这本《线性代数》。本书具有以下特点。

第一，本书叙述严谨，把握基本概念的准确性，以突出数学方法的应用为核心。

第二，本书内容叙述上做了精心安排，起点较低，由浅入深、循序渐进. 对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出，增强学生的感性认识，由具体到抽象，知识过渡自然。对重要概念、定理加以注释或给出反例。从多角度帮助读者正确领会概念、定理的内涵。

第三，注重应用性。本书注意联系经济管理和自然科学中的问题，并注意举例的多样性，使学生从不同侧面理解、掌握用数学知识处理实际问题的方法，提高他们分析问题、处理问题的能力。

第四，本书配有大量习题，除每节配有紧扣该书内容的习题外，每章还配有该章内容的综合练习，习题的配置基本做到了知识点覆盖面广、难易程度适当及题型的多样性。

本教材由武汉大学东湖分校与湖北工业大学商贸学院合编，武汉大学东湖分校为主编单位。本书内容共 5 章，其中前 3 章由武汉大学东湖分校彭雪梅编写，第 4、5 章由湖北工业大学商贸学院杨贵诚编写。全书由彭雪梅统稿。

本教材可作为独立学院经济管理类本、专科专业的教学用书，也可作为普通高等院校本科少学时及专科专业的公共基础课教材。

本教材的编写得到了编者所在学校领导与教务处的大力支持与指导。陈桂兴、黄象鼎、汪福宝三位教授仔细审阅了书稿，提出了很多宝贵的意见与建议。华中科技大学出版社有关领导及谢荣编辑做了卓有成效的组织工作，在此一并表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2008 年 7 月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中的重要概念之一，它在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶、三阶行列式的定义

行列式的概念起源于用消元法解线性方程组.

对于关于 x_1, x_2 的二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

根据这个解的特点得到启发，为了简明地表达这个解，引入了二阶行列式的概念.

定义1　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

其中横排称为**行**，竖排称为**列**. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第1个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行；第2个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由4个数按一定规律运算所得的代数和. 这个规律表现在行列式的记号中就是"**对角线法则**". 如图1.1所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

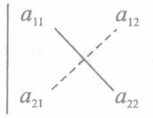


图1.1

利用二阶行列式，线性方程组(1.1) 的解 x_1, x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

注 这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式,称为**系数行列式**. D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第1列的元素 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式,D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第2列的元素 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性,请读者学习时注意比较.

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=9, \\ 3x-2y=-19. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times3=-13\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -19 & -2 \end{vmatrix}=9\times(-2)-3\times(-19)=39,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -19 \end{vmatrix}=2\times(-19)-9\times3=-65,$$

因此 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{39}{-13}=-3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-65}{-13}=5.$$

类似于二元一次线性方程组的讨论,对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

经过加减消元法,得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23},$$

这个结果很难记忆. 为此,引入了三阶行列式的定义.

定义2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

注 由上述定义可见,三阶行列式的展开式中共有6项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的**对角线法则**:图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线,三条虚线看做是平行于副对角线的连线;实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

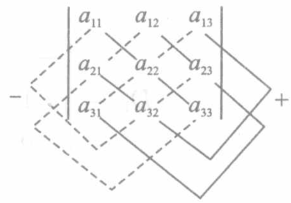


图 1.2

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$D = 1\times0\times6 + 2\times5\times(-1) + 3\times4\times0 - 3\times0\times(-1) - 1\times5\times0 - 2\times4\times6 = -58.$$

例 3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 按三阶行列式的定义,所求的方程即为 $x^2 - 5x + 6 = 0$,故 $x = 2$ 或 $x = 3$.

有了三阶行列式的概念,对于线性方程组(1.3),若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

如果系数行列式 $D \neq 0$,则方程组(1.3) 有唯一解,即 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}$.

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&1&-1\end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1$
$\quad -1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)$
$=-5\neq0,$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5,$$

故所求线性方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,x_2=\dfrac{D_2}{D}=2,x_3=\dfrac{D_3}{D}=1.$

习 题 1.1

1. 计算二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}$.

2. 计算三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\0&4&1\end{vmatrix}$.

1.2 n 阶行列式

通过 1.1 节的讨论，对于二阶、三阶行列式可用对角线法则定义. 但是，对于 n 阶行列式如果用对角线法则来定义，当 $n>3$ 时，它将与二阶、三阶行列式没有统一的运算性质. 因此，对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义. 在线性代数中，采用简明的递归法来定义.

从二阶、三阶行列式的展开式中，易发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第 1 行展开，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13},\tag{1.4}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

其中 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

M_{11} 是原三阶行列式 D 中划掉元素 a_{11} 所处的第1行和第1列的所有元素后剩下的元素按原来的次序排成的低一阶（二阶）行列式. 称 M_{11} 为元素 a_{11} 的余子式. 同理,M_{12} 和 M_{13} 分别是 a_{12} 和 a_{13} 的余子式. 为了进一步使三阶行列式的表达更加规范化,令

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13},$$

A_{11},A_{12},A_{13} 分别称为元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的代数余子式.

因此,式(1.4)即为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1.5}$$

同样,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}, \tag{1.6}$$

其中 $A_{11}=(-1)^{1+1}\,|\,a_{22}\,|=a_{22}$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\,|\,a_{21}\,|=-a_{21}$.

注 定义一阶行列式 $|\,a_{11}\,|=a_{11}$（不要把一阶行列式 $|\,a_{11}\,|$ 与 a_{11} 的绝对值相混淆）.

如果把式(1.5)、式(1.6)作为三阶、二阶行列式的定义,那么这种定义的方法是统一的,它们都是用低一阶的行列式定义高一阶的行列式. 因此人们很自然会想到,用这种递归的方法定义一般的 n 阶行列式. 对于这样定义的各阶行列式,将会有统一的运算性质. 下面给出 n 阶行列式的递归法定义.

定义3 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

是一个算式. 当 $n=1$ 时,定义 $D=|\,a_{11}\,|=a_{11}$;当 $n\geqslant 2$ 时,定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.8}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$. M_{1j} 是 D 中去掉第1行第 j 列全部元素后剩下元素按原来次序排列成的一个 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**,A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**.

在式(1.7)中,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**,另外一条对角线称为行列式的**副对角线**.

由定义可见,二阶行列式展开后共有 $2!$ 项,三阶行列式展开后共有 $3!$ 项,n 阶行列式展开后共有 $n!$ 项,其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积,在全部 $n!$ 项中,带正

号的项和带负号的项各占一半.这些结论在前面的二、三阶行列式中已经证明,而对四阶以上的行列式,这些结论可以通过定义和数学归纳法证明.

例 5 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 行列式第1行的元素 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$,由定义得 $D=a_{11}A_{11}$. A_{11} 是 $n-1$ 阶下三角形行列式,则

$$A_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依此类推,不难求出 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,即下三角形行列式等于主对角线上各元素乘积.

注 主对角线上(下)方的元素全为0的行列式称为下(上)三角形行列式.除了主对角线上元素之外其余元素全为0的行列式,称为**主对角形行列式**.用同样的方法可以求出主对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 6 证明

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

证明 行列式中第1行元素 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n-1}=0$. 由定义得

$$D=a_{1n}A_{1n}=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3n-2} & a_{3n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+(n-1)}a_{2n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4n-3} & a_{4n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-3} & a_{nn-2} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地,有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 7 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

证明 由定义得

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

注 此结论可推广为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

由式(1.9) 可推出

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix} = (-1)^{nk}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

习 题 1.2

1. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

1.3 行列式的性质

行列式的计算是一个重要问题. 但是，按定义来计算 n 阶行列式，当 n 较大时，计算将变得很复杂，计算量也很大. 所以，要解决行列式的计算问题，就必须利用行列式的定义，推导出行列式的一些基本性质，并利用这些性质来简化行列式的计算. 下面来讨论 n 阶行列式 D 的基本性质，这些性质在行列式的计算及应用中都起着重要作用.

将行列式的行与列依次互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'. 本书采用记号 D^{T}.

$$若\ D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则\ D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

注 由此性质知，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

性质 1 和性质 2 都可用数学归纳法来证明，但由于其证明的表述较繁，故本书略去其证明.

推论 1 如果行列式中有两行(列) 的对应元素相同，则此行列式等于零.

证明 互换相同的两行(列)，有 $D = -D$，故 $D = 0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 行列式中若有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2.$$

注 (1) 上述结果可推广到有限个行列式之和的情形.

(2) 行列式 D_1,D_2 的第 i 行是把 D 的第 i 行拆成两行,其他 $n-1$ 行与 D 的各对应的行完全一样.

(3) 当行列式的某一行(或列)的元素为两数之和时,行列式关于该行(或列)可分解成两个行列式.若 n 阶行列式的每个元素都表示成两数之和,则它可分解成 2^n 个行列式.

性质5 将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 加到另一行(列)对应位置的元素上,则行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1\ (i\neq j).$$

证明 $$D_1 \xlongequal{\text{性质 4}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{推论 3}} D+0=D.$$

利用这些性质可简化行列式的计算.今后为了表示方便,记 r_i 表示第 i 行,c_j 表示第 j 列,$r_i \leftrightarrow r_j$($c_i \leftrightarrow c_j$)表示交换第 i 行(列)和第 j 行(列)的元素;$r_i \times k$($c_i \times k$)表示第 i 行(列)的元素乘以数 k;$r_i + kr_j$($c_i + kc_j$)表示第 j 行(列)的元素乘以数 k 加到第 i 行(列)上去.计算行列式常用的一种方法,就是利用 $r_i + kr_j$($c_i + kc_j$)把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.

例 8 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 8 \times \frac{5}{2} = 40.$$

例 9 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列的 3 个数之和均为 $3+a$.现把第 2、3 行同时加到第 1 行,提出公因子 $3+a$,然后各行减去第 1 行,即

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com