江西省高等院校《工科数学》系列教材

概率论与数理统计

第三版

GAILÜLUN
YU
SHULI
TONGJI

主　编　刘乐平　段五朵
副主编　吕新民　徐平生
主　审　刘南根

江西高校出版社

概率论与数理统计

GAILULUN

YU

SHULI

TONGJI

江西省高等院校《工科数学》系列教材

概率论与数理统计

第三版

主　编　刘乐平　段五朵
副主编　吕新民　徐平生
主　审　刘南根

江西高校出版社

概率论与数理统计(第三版)
主编　刘乐平　段五朵

江西高校出版社
(江西省南昌市洪都北大道96号)
邮编:330046　电话:(0791)8512093,8504319
各地新华书店经销
江西恒达科贸有限公司照排部照排
南昌市红星印刷厂印刷

1999年12月第3版　1999年12月第1次印刷
850mm×1168mm　1/32　11印张　296千字
印数:1~7600册

定价:15.00元
ISBN 7-81033-137-X/O·11
(江西高校版图书如有印刷、装订错误,请随时向承印厂调换)

前　言

本书是按照全国工科数学课程教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”（概率论与数理统计部分），根据面向21世纪工科数学教学内容和课程体系改革的精神而编写的教科书．它可作为高等工科院校各专业《概率论与数理统计》课程的教材．全书包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及其分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、怎样用 Mathematica 解数理统计问题．各章配有一定数量的习题，书后附有参考答案．32 学时可讲完概率论“基本要求”的相应内容，28 学时可讲完数理统计“基本要求”的相应内容．

本书第二版是 1995 年出版的．几年来我省大部分高校采用它作为教材，根据实践中的一些经验，并吸收使用本书的同行、专家们提出的宝贵意见，在此基础上，对内容作了部分修改；增加了相关计算机软件包的使用内容，成为第三版．参加本书编写的有刘乐平（第五、八章、附录）、段五朵（第一、二、六章）、吕新民（第三章）、徐平生（第四章）、乐励华（第七章）、匡奕群（第九章）、朱旭生（第十章）；由段五朵、刘乐平对全书进行统稿，刘南根审定．

由于编者水平有限，缺点错误在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

1999 年 5 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

概率论是数学的一个分支，它从数量侧面研究随机现象的规律性. 本章主要介绍概率论的一些基本概念.

§1.1　随机事件、频率与概率

一、样本空间与随机事件

自然界和人类社会中发生的现象是多种多样的，这些现象大体上可以分为两类：确定性现象和随机现象.

在一定的条件下必然出现(或必然不出现)某种结果的现象叫确定性现象. 例如：在一个标准大气压，温度 100℃ 的条件下，水一定沸腾；一个力作用于一物体时，该物体必产生加速度；在无外力作用的条件下，作等速直线运动的物体不可能改变其等速直线运动状态等等. 这些现象都是确定性现象.

随机现象是指在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且在事先无法预知确切结果的现象. 例如：从含有两件次品的一批产品中任意抽取 3 件，取到的次品件数可能是 0，也可能是 1 或 2，在抽取产品之前无法预知能取出多少件次品；从一定高度往桌面上掷一硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上，并且在投掷前无法肯定掷出的结果是什么；用同一架仪器测量某个物体，各次所得的测量值不尽相同，而且每次测量之前不能断言测量值是多少.

对于随机现象，就每次观察而言，其结果的出现具有偶然性，但是人们经过长期的实践和深入研究发现，在保持基本条件不变的情况下，进行大量重复观察时，所得结果却呈现出某种规律性. 例如：多

次重复掷一均匀的硬币，得到正面朝上的次数大约占投掷次数的一半；多次重复测量某一物体，所得测量值的平均值在某常数附近波动，各测量值在此常数两边的分布大致呈现出某种对称状态．种种事实表明，随机现象也有其规律性，它可以在相同条件下的大量重复观察下呈现出来．这种规律性称为随机现象的统计规律性．

对客观事物的研究总是要联系到对研究对象进行观察．观察一定条件下发生的现象通常叫做试验，一个试验如果满足以下条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，但事先已知试验的所有可能结果；

(3) 每次试验总是恰好出现所有可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言．

则称这个试验为随机试验．很明显，随机试验观察的对象实际上就是一个随机现象．

随机试验中每一可能的结果称为一个样本点(或基本事件)．由随机试验的含义，所有的样本点是已知的．样本点的全体组成的集合称为随机试验的样本空间，通常用 Ω 表示．Ω 中的元素，即样本点，用 ω 表示．

在概率论中讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间．对于一个具体的随机试验来说，样本空间可以根据试验的内容(即试验条件实现一次的含义和观察的目的)来决定．

例 1 掷一枚硬币观察正、反面出现的情况．一次试验就是掷一次硬币，试验的可能结果有两个：正(正面朝上)，反(反面朝上)，即有两个样本点：正、反．这个随机试验的样本空间为

$$\Omega = \{正,反\}.$$

例 2 将一枚硬币掷两次，观察正、反面出现情况．在这个随机试验中，掷两次硬币是一次试验，试验的可能结果有 4 个：(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)．这里的记号，如(正，反)，表示“第一次正面朝上，第二次反面朝上”，其余类此．这个随机试验的样本空间为：

$$\Omega = \{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}.$$

例 3 观察一小时中落在地球上某一区域的宇宙射线数.这个随机试验的样本点(观察结果)一定是非负整数,由于很难指定一个数作为它的上界,所以认为每一个非负整数都是一个可能结果,故样本空间为

$$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}.$$

例 4 射击手向某一目标进行一次射击,观察弹着点与目标的偏差.样本点可以是任何一个非负实数(偏差值),所以样本空间 $\Omega = \{d \mid d \geqslant 0\}$.

在随机试验中,人们常常关心满足某种条件的样本点所组成的集合.下面我们先考察一个例子.

例 5 从包含两件次品(记作 a_1,a_2)和三件正品(记作 b_1,b_2,b_3)的五件产品中任意取出两件.具体拿出两件就是一次试验,例如拿出的两件是 a_1 和 b_1,这就是一个样本点,记作$\{a_1,b_1\}$,所有的样本点共 10 个,样本空间为 $\Omega = \{\{a_1,a_2\},\{a_1,b_1\},\{a_1,b_2\},\{a_1,b_3\},\{a_2,b_1\},\{a_2,b_2\},\{a_2,b_3\},\{b_1,b_2\},\{b_1,b_3\},\{b_2,b_3\}\}$.对于这个随机试验,确定样本空间固然是一件非常重要的事情,但有时根据需要还必须研究 Ω 的一些子集.例如,我们往往关心这样的问题:取出的两件产品是否全是正品,是否恰好含有一件次品,等等.

若令

$$A = \{\{b_1,b_2\},\{b_1,b_3\},\{b_2,b_3\}\}$$

$$B = \{\{a_1,b_1\},\{a_1,b_2\},\{a_1,b_3\},\{a_2,b_1\},\{a_2,b_2\},\{a_2,b_3\}\},$$

则 A、B 都是样本空间Ω 的子集.显然 A 表示“没有抽到次品”,B 表示“恰好抽到一件次品”.在一次试验中 A 出现当且仅当在这次试验中A 所包含的 3 个样本点之一出现;B 出现当且仅当B 所包含的 6 个样本点之一出现.我们把 A,B 叫做随机事件.

一般,我们称样本空间的某个子集为随机事件,简称事件.在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.常用 A,B,C 等表示事件.

样本空间 Ω 是它自身的子集，它包含所有的样本点，因此在每次试验中总是发生的. 称 Ω 为必然事件. 空集 Φ 不包含任何样本点，也作为样本空间的子集，由于它在每次试验中都不会发生，所以称 Φ 为不可能事件. 必然事件与不可能事件不具有随机性，但为了今后研究的方便，我们把它们作为随机事件的特殊情形来统一处理.

二、事件的关系及运算

在实际问题中，往往要求我们在一个随机试验下同时研究几个事件及它们之间的联系. 下面对应着集合的关系和运算来定义事件的关系和运算，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设随机试验的样本空间为 Ω，随机事件 $A,B,A_k,B_k(k=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$ 都是 Ω 的子集.

(1) 如果事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 被包含于事件 B，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 事件 B 包含事件 A 的含义是：事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 显然，对任一事件 A 有：

$$\Phi \subset A \subset \Omega.$$

(2) 如果 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等(即是两集合相等)，记作 $A=B$.

(3) 由至少属于 A,B 两事件之一的一切样本点组成的集合，称为 A 与 B 的和(并)，记为 $A \cup B$. 事件 $A \cup B$ 发生当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生. 因此，通常也把事件 $A \cup B$ 表述为“事件 A 发生或事件 B 发生”，或表述为“事件 A 与 B 至少有一个发生”.

(4) 同时属于事件 A 和 B 的所有样本点组成的集合，称为 A 与 B 的积(交)，记作 $A \cap B$ 或 AB. 由于 AB 发生当且仅当事件 A,B 同时发生，所以常常将事件 AB 表述为“事件 A 和 B 同时发生”.

由上述定义和集合的运算规律可知，对任意两个事件 A,B，若 $A \subset B$，则必有

$$A \cup B = B, A \cap B = A,$$

特别　$A \cup \Phi = A, A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Phi = \Phi, A \cap \Omega = A$.

(5) 如果 $A \cap B = \Phi$,则称事件 A, B 是互不相容的,或互斥的.互不相容的两事件不可能在一次试验中同时发生.基本事件是两两互不相容的.

(6) 由属于事件 A,但不属于事件 B 的样本点组成的集合,称为事件 A 与 B 的差,记作 $A - B$.当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A - B$ 发生.有时也将事件 $A - B$ 表述为"A 发生而 B 不发生".显然

$$A - A = \Phi, A - \Phi = A, A - \Omega = \Phi.$$

(7) 事件 $\Omega - A$ 称为事件 A 的对立事件(或逆事件),记作 $\overline{A}$,即 $\overline{A} = \Omega - A$.由于 $\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生.所以事件 $\overline{A}$ 通常表述为"A 不发生".显然

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \qquad A \cap \overline{A} = \Phi.$$

此外,由对立事件的定义得知:

$$\overline{(\overline{A})} = A, A - B = A\overline{B}.$$

事件的和与积的运算可以推广到有限个甚至可列无限多个事件的情形:

称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和,通常表述为:"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生".

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和,通常表述为:"$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生".

称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积,通常表述为:"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生".

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积,通常表述为:"$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生".

上面我们利用集合论的概念引入了概率论的一些基本概念,为了便于对照,列成下表(表 1-1):

表 1 - 1

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间　必然事件	空间(全集)
Φ	不可能事件	空集
ω	样本点(基本事件)	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 对 Ω 的补集
$A \subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差集
$A \cap B = \Phi$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 不相交

由于事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系及运算是相当的，所以根据集合的运算性质可推得事件的运算性质如下：

(i) 交换律：

$$A \cup B = B \cup A, AB = BA;$$

(ii) 结合律：

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC),$$
$$A \cap (\bigcup_k B_k) = \bigcup_k (AB_k);$$
$$A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cup (\bigcap_k B_k) = \bigcap_k (A \cup B_k);$$

(iv) 对偶律：对有限个或可列无限多个 A_k，恒有：

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A}_k, \quad \overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A}_k.$$

三、频率和统计规律性

在讨论随机试验的时候,常常需要了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小,以便掌握随机现象的内在规律.为了研究这个问题,我们先引进频率的概念.

将随机试验重复进行 N 次,若事件 A 在这 N 次试验中发生了 n 次,则称 $F_N(A) = \frac{n}{N}$ 为事件 A 在这 N 次试验中发生的频率.

根据定义容易验证频率具有如下性质:

(1) 对任一事件 A,有

$$0 \leqslant F_N(A) \leqslant 1;$$

(2) $F_N(\Omega) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$F_N(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} F_N(A_i).$$

由于在任意 N 次试验中,事件 A 发生的次数具有偶然性,故 A 发生的频率 $F_N(A)$ 也具有不确定性.那么,由事件 A 发生的频率能否发现事件 A 发生的规律?为此,有许多人做这样的试验.

例如,考虑“掷一枚均匀的硬币,观察其正、反面出现的情况”这一随机试验.将硬币抛掷 5 次、50 次、500 次,各做 10 遍.其结果记录在表 1-2 里,表中 N 表示投掷次数,n 表示出现正面朝上的次数,$\frac{n}{N}$ 是事件“正面朝上”发生的频率.

表 1 - 2

实验序号	$N=5$		$N=50$		$N=500$	
	n	$\frac{n}{N}$	n	$\frac{n}{N}$	n	$\frac{n}{N}$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表1－2可以看出，虽然对于同样的试验次数，但事件“正面朝上”的频率却不尽相同，即具有随机波动性. 随着试验次数的增加，该事件发生的频率在数值 0.5 附近摆动而呈现出一种稳定性.

又如，为了观察“由 0,1,2⋯,9 十个数字中任意取出一个数字”的随机试验中，事件“取出的数字是 1” 发生的规律，利用电子计算机进行模拟试验. 表 1 － 3 列出 10 个 2000 次的观察结果.

表 1 - 3

实验序号	观察次数	“1” 出现次数	频　　率	实验序号	观察次数	“1” 出现次数	频　　率
1	2000	194	0.0970	6	2000	205	0.1025
2	2000	203	0.1015	7	2000	183	0.0915
3	2000	218	0.1090	8	2000	204	0.1020
4	2000	185	0.0925	9	2000	204	0.1020
5	2000	212	0.1060	10	2000	205	0.1025

从表1－3可知，事件“取出的数字是1”发生的频率稳定在0.10附近摆动.

从上面两个例子可以看到，在重复试验中，同一事件发生的频率不完全相同，当试验次数较小时，频率的波动幅度较大，而当试验次数逐渐增大时，频率逐渐稳定于某一常数.频率的这种稳定性，即通常所说的统计规律性，说明了一个事件发生的可能性有一定的大小可言.当频率稳定于较大的数值，表明相应事件发生的可能性大，频率稳定于较小的数值，表明相应事件发生的可能性小，而频率所稳定的数值就是相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，称为相应事件的统计概率，简称为概率.

定义1 设在同一组条件下，重复进行了 N 次随机试验.当 N 很大时，某一随机事件 A 发生的频率 $F_N(A)=\frac{n}{N}$ 稳定地在某一常数 p 的附近摆动，则称该常数 p（频率的摆动中心）为随机事件 A 的概率，记作

$$P(A)=p.$$

统计概率的定义中，虽然没有提供直接确定概率的方法，但是当试验次数较大时，事件 A 发生的频率可以作为$P(A)$的一个估计值.

由频率的性质，我们可以得出统计概率的性质：

(1) 非负性：对任一事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1;$$

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有

$$P(\Omega)=1;$$

(3) 有限可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

用概率的统计定义来确定某一事件 A 的概率$P(A)$，往往要进行大量的试验.尽管如此，还是保证不了一定能得到 $P(A)$ 的精确值.