數理统计学

目　录

序　言

本課程的主要目的是講数理統計学的基本原理和方法及其实际应用。数理統計学是在实际需要和概率論的基础上发展起来的，它的主要任务是研究随机现象（或集体现象）规律性的側面——数量关系及其分析推断的一門数学科学。

随机现象（亦称偶然现象或或然现象）的规律性的研究是概率論和数理統計学的基本任务。因此，我們首先应該对概率論要有正确的認識。

任何科学与技术原都是劳动人民的斗爭成果，是由无数的劳动經驗累积中分析总結而得来的原理、原則与方法。但一旦被資产阶級所侵占，观点上就受了歪曲与蒙蔽，因此往往使人忘記了它的来源而誤認为是資产阶級的东西了。

概率論这門科学也正是因为以往被資产阶級歪曲利用，所以至今还不容易完全被人們認識它的眞面目。事实上，它是一門在苏联国土上成长起来的科学，这方面苏联一向在世界上占居領导地位。尤其是近三十多年来无論在理論研究方面或者应用方面，苏联数学家們都作出了无数的卓越貢献。

概率論在苏联不但理論上与实用上有如此蓬勃发展，并且在观点上也不断地进行严格的批判，以求徹底肃清資产阶級对它的曲解与誣蔑。

从辯証唯物主义的观点看来，客观世界在不断变化、不断运动、不断革新、不断发展，从而表现一些客观事物的量也应当是不断变化的。客观世界中各个对象或各个现象是相互密切联系着、依賴着、制約着的，表现他們的量特征的变量也是相互依賴、相互制約着的。这种变量（或变量的变化率）之間的互相依賴关系称为函数关系（包括微分方程）。象这类现象我們可用函数表达它們的变化状态，或从现象在某一“时刻”的状态就可断定在以后任意“时刻”的状态。我們

称之为必然性现象（或决定性现象）。但在客观世界中尙有另一类现象，由于它的变化的因素众多，我們不能或者很困难象前面那样用函数或微分方程来描述它們的运动状态（例如任意时刻的分子运动的方向和速度等）。它們在任意“时刻”可以处在种种不同的状态，我們可以把在每一“时刻”每个个别“个体”的运动状态看作是“偶然的”、“随机的”，因此，我們称这类现象为偶然现象（或随机现象）。概率論正是研究客观存在的偶然现象规律性的一門数学科学。

資产阶級对概率論的看法的主要錯誤之一，就在曲解了“偶然现象”这一概念的意义。他們把偶然现象曲解为“碰机会发生的”、“超自然规律的”、“根本沒有原因可寻的”，因此把概率論中的规律实質上看作是由“上帝安排好了的”的結果。另外有些人則又反过来，根本不承認世界上有偶然现象的存在，因而也就否定了概率論这門重要的科学。以上两种表现上极端相反的主张实質上同样是唯心的。

按照唯物辯証法的观点，偶然现象并不是沒有原因的，只是对这些原因，我們目前尙不能一一加以控制，因而它可以产生我們事先不能确切預料的种种不同結果。一旦我們掌握了充分的条件，則偶然现象也就变为必然现象了。所以偶然现象与必然现象的区别并不是絕对的，两者可以相互滲透、相互轉化的。例如每个气体分子的运动，就个别而言，当然是遵循力学规律的——这是必然现象。在集体中則因彼此互相碰撞而表现为混乱状态——这样又表现为偶然现象。但如气体分子充分多时，即气体的密度充分大时，則乱飞乱撞的状态，又表现出很稳定的规律，即压力、溫度、体积之間的函数关系——这样又成必然现象了。所以偶然现象与必然现象在现实世界里是錯綜并存着的。同一现象，往往也有必然性方面，同时也有其偶然性方面。必然现象在多数因子的集体錯綜影响下可以表现为偶然现象。而偶然现象由集体观点看来，亦自遵循其一定规律，因之又成为必然现象。

資产阶級学者的另一唯心主张，乃表现在概率論的基本概念和要旨方面。如封·米賽斯所定义的概率就是其中一个突出的例子，它与苏联数学家們在馬克思列宁主义哲学計划下发展起来的看法对立着，有唯心唯物的結构。

数理統計学亦同其他数学部門一样是由实际要求发展起来的，它以抽象的形式反映着集体性的随机事件所特有的规律，并且它已逐漸深入到各个領域。在物理学及其他自然科学部門、軍事科学、各种技术科学、水工、气象、經济学乃至公用事业等方面都起着重要的作用，且同时它已发展成为各种专門的数理統計学（如工业技术数理統計学）。同时在大规模企业生产方面已非常成功地应用它来进行产品質量控制。最近几年来，数理統計学的分析方法已广泛地被用来計算机械、机床及仪器的誤差，用来确定各种联动机的工作精度等等，它在机械、机床和仪器的改善与設計上具有重要的意义。

在工程結构的設計方面运用数理統計学于等安全度的分析与各种荷載系数的計算上，乃是现在工程师們的重要研究方向。

但是，我們不能因此对数理統計学作过高的評价。要把統計分析正确地应用到个别的具体对象（或过程）上，决不能单靠数学方法。它首先要对具体的特点預作理論的分析，要揭发其"特殊的邏輯，特殊的对象"（馬克思），以及通晓所要研究的对象的基本规律。数理統計方法的作用就在于对这些规律性的測量，这种规律性是由某种具体知識部門以特殊的分析揭发出来的。

資产阶級統計学的特色就是数学形式主义，就是喜欢以空虛的数学公式来代替客观规律的研究，与它所应用的现实对象脫离，因此变成为列宁所說的"数学遊戏"。眞正的科学的数理統計学，应該建立在質的分析上，而不能脫离其所研究的对象的现实本質来利用。

数理統計学的理論总括了許多关于随机现象（或大量现象）和过程中表现规律性的質的問題及其观察与証实的方法問題。它常常首先由質出发，由现象的質与量方面的制約性与联系出发。它的主要方法是建立在大量观測（或实驗）的資料上，根据观測資料研究对象的基本规律，經过理論的分析研究，从而得出所考慮对象的特殊规律。

由于数理統計学与概率論有着紧密的联系，所以要正确估計数理統計学結論的可靠性，对概率論的基本概念和基本命題的熟悉是非常必要的。

无論在理論研究方面或者是实际应用方面，对数理統計学这門数

学的基本理論和方法的掌握都是必要的。尤其是我們国家在中国共产党的正确領导下，正在經历着一天等于二千年的时代，全国人民正在社会主义的总路綫的光輝照耀下，滿怀信心地建設我們的幸福生活，我們很快地掌握和发展这門科学，将会在社会主义和共产主义的建設中作出有益的貢献。

第一章 概率論的基本概念

§1. 随机事件与非随机事件

一切事物都在刻不停息的运动着、变化着，它們之間相互制約、不断发展，构成統一的宇宙整体。在它們的联系和发展过程中，我們可以看到两种性質不同但又可以相互轉化、相互滲透的变化。一种是根据一定条件能确切預料其未来結果的变化，这是一种屬于必能性范疇的变化。例如：在标准大气压之下，把液体水加热到$100°C$，水将开始沸騰。另一种是根据一定的条件只能推断它的各种可能的結果的变化。例如擲一質料均勻的銅板于勻正的水平面上，我們只知道銅板的正面可能朝上，也可能不朝上。但我們沒有办法确切預言在某次試驗中銅板的正面朝上与否的結論。这种是屬于偶然性范疇的变化。

从上面例子我們可以看到："水开始沸騰"这一事件（事件这一概念我們把它当作不加定义的原始概念）的发生（或出現、成功）必須和"标准大气压，加热到 $100°C$ 这一条件联系在一起；"銅板正面可能朝上，也可能不朝上"这一事件的发生必須和"擲一質料均勻的銅板于一勻正的水平上"联系在一起。因此我們說某一事件 A 的发生和不发生都必定伴随着一定的条件組 K 。

概率論中，把一个在条件組 K 每次实现之下，不可避免要发生（或出現、成功）的事件称之为必然事件，如上面第一个例子即是。在条件組 K 每次实现之下恆不发生的事件叫不可能事件。（如在第一例子的条件下水不沸騰；在例二中銅板两面都不朝上等事件都是恆不发生的）。如果在条件組 K 每次实现之下，可能发生也可能不发生的条件称之为随机事件（或然事件、偶然事件）。譬如例二中"正面朝上"这就是一个随机事件。

我們容易看出，必然事件和不可能事件都不是随机的。前者是恆

发生，后者是恆不发生。因此我們常把它們統称为非随机事件。

最后，必須指出：非随机事件和随机事件这一概念是一个科学的抽象。事实上，因为任何具体事物的变化过程中，沒有单純受偶然性（或单純受必然性）支配的事件。一切事件都是同时具有必然性的变化和偶然性的变化。例如，一滴水的沸騰温度，未必毫无偏差恰如是 $100°C$ 。它可能是九十九度多，也可能是一百另几度几。这說明：水加热到 $100°C$ 时，水开始沸騰是必然发生的趋势，不沸騰则是很稀少的（可能由于水的純度或其它一些条件的不同，沸騰温度可能随之而有些改变）。为了更深刻地研究这两个不同性質的变化，哲学上把它們抽象概括成两个不同的范疇——必然性和偶然性。概率論就是研究随机事件的规律的一門科学。

§2. 随机事件的运算

随机事件是概率論的研究对象，因此我們要对它建立各种运算。設在条件組 K 的情况下，我們进行某种試驗，試驗的結果发生随机事件 $A, B, \cdots C$ 。这些事件构成一个集合 $\{A, B, \cdots C\}$ 。

[例1]取两顆完全对称的六面体的骰子，每顆骰子的各面都标以 $1, 2, 3, 4, 5, 6$，等点子，我們任意擲一下这两顆骰子，这是一个随机事件。因为我們不能預先断定这两顆骰子将会出现什么点数。现在我們用 $A, B, C, \cdots D\cdots$ 分别表示这一試驗所产生的各种随机事件，那末

C 表示 这两顆骰子的点数和 s 是 2 的倍数这一事件，

D 表示 这两顆骰子点数和 s 是 3 的倍数

E 表示 这两顆骰子点数和 s 等于 k $(k=2, 3, 4, \cdots 12)$

U 表示 这两顆骰子点数和 s 介于 2 和 12 之間 $(2\leq s\leq 12)$

V 表示 这两顆骰子的点数和 s 在 2与12之外$(s<2, s>12)$

这种試驗結果，构成了一个事件集合 $\{C, D, E, U, V\}$。

现在我們进一步討論随机事件間的关系。

如果在事件 A 发生的条件組 K 每次实现之下，事件 B 也发

生。則我們說事件 A 屬于事件 B，記为 $A\subset B$ 或$B\supset A$ 。在例1中显然有 $C\subset E$，$C\subset U$，$D\subset E$，$D\subset U$，$E\subset U$，$U\subset E$ 。

在条件組 K 每次实现之下（由于事件发生总是离不开某种特定的条件組 K，为了簡便起見，以下我們簡略这种必要的重复），若 $A\subset B$，且$B\subset A$ 。則称事件 A 与事件 B 等价，記为 $A=B$（在例1中有 $E=U$）。等价事件恆可彼此替換。

我們在說明两随机事件的关系之后，可以进一步定义随机事件的积、和、差。

两随机事件 A 与 B 的乘积，便是由 A 与 B 同时发生所組成的一个新事件，記为 AB （在集合論中把它称为两集合 A，B 之交集）。

［例2］ 設 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ $B=\{3, 4, 5, 6\}$

則 $$AB=\{3, 4\}$$

由事件 A 与 B 至少发生其一所組成的新事件叫做 A 与 B 之和，記为 $A+B$（在集合論中叫和集）。在例2中显然有

$$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

由事件A发生而事件B絕对不发生所組成的新事件叫做A与B之差記为 $A-B$（集合論中称为差集）。在例2中显然有

$$A-B=\{1, 2\} \qquad B-A=\{5, 6\}$$

有了两事件的和与积的意义，我們不难把所定义的随机事件的运算推广到无論多少个事件的场合上去：

$A+B+\cdots+C$ 表示 “由A，B，$\cdots C$ 諸事件至少有一发生所組成的新事件”。

$AB\cdots C$ 表示 “由 A，B，$\cdots C$ 諸事件同时发生所組成的新事件”。

在随机事件的运算中，我們也常常用互斥事件(互不相容事件)、对立事件等术語。

所謂互斥事件就是两个不能同时发生的随机事件（有时也称为互不相容事件）如果 A 与 B 互斥，則 $AB=V$ 。

若諸事件 A_1，B_2，$\cdots A_n$ 有

$$\mathop{\pi}\limits_{i=1}^{n} A_i = V$$

則称諸事件互斥。

若諸事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中，对于任何 $i \neq j (1 \leq i \leq n,\ 1 \leqslant j \leq n)$ 有

$$A_i A_j = V$$

則称諸事件两两互斥。

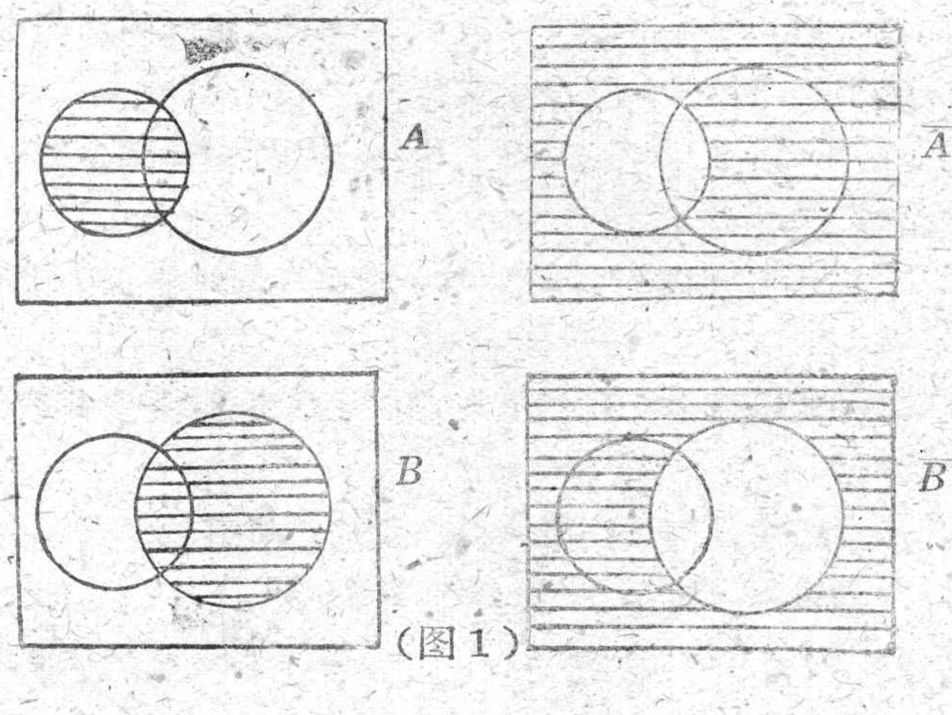
例如：事件 A_i 表示一顆骰子的点 i 朝上（$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$），則諸事件两两互斥。即是說不能有任何两个点子同时朝上。

随机事件 A 的对立事件，是指 A 不发生的事件，記为 $\overline{A}$ 。这显然有

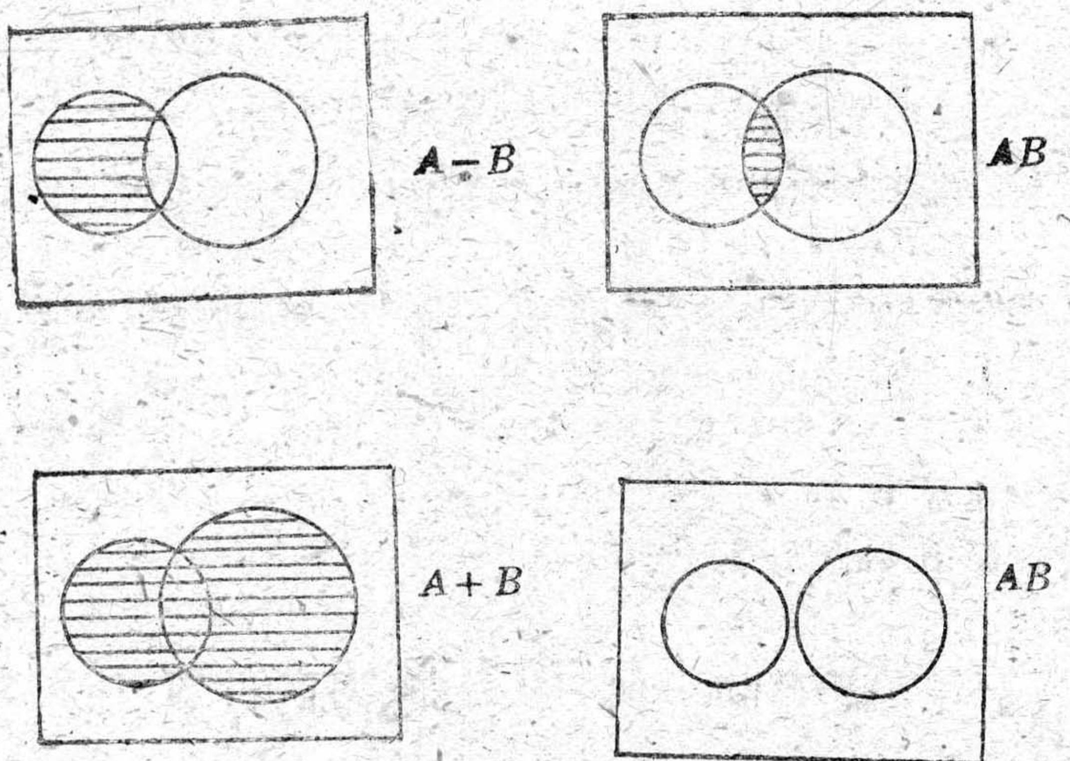
$$A + \overline{A} = U \qquad A\overline{A} = V$$

同时成立。因此对立事件也可以这样敍述：两事件既不能同时不发生，也不能同时发生。

［例 3］設条件組 K 是这样組成的：在（图 1）长方形内，随机取一个点，不在图中任何一个圓周上。我們以 A 表示“所取点落在左边那个圓内”这一事件；B 表示“所取点落在右边那个圓内”这一事件。于是 A，$\overline{A}$，B，$\overline{B}$，$A-B$，AB，$A+B$，AB 就是所取点落在（图 1）中，以阴影表示的相应图形中。



（图 1）



（图1）

此外，在随机事件較复杂的运算和分析中，我們还要用到随机事件的特款，完备事件群和事件体等名詞。

随机事件 A 是若干个两两互斥的事件 B 的和，那末我們称事件 A 分为若干个特款：

$$A=B_1+B_2+\cdots+B_m$$

其中

$$B_iB_j=V \qquad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n$$

例如：两骰点数和是 3 的倍数这一随机事件 A，便是两两互斥的随机事件 B_3（B_3表示点数和是 3 这一事件）B_6，B_9，B_{12} 之和，則 $B_i(i=3,\ 6,\ 9,\ 12)$ 都称为 A 的特款。

如果若干个两两互斥的随机事件 B 的和是一个必然事件 U，那末这些事件 B 构成一个完备事件群。各个随机事件 B 也叫做基本事件。这时有

$$B_1+B_2+\cdots+B_m=U$$

其中

$$B_iB_j=V \qquad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n)$$

例如：在上述任擲两骰的例子中，随机事件 $B_i(i=2, 3, \cdots 11, 12)$ 就是一个完备事件群。因为

$$B_2+B_3+\cdots+B_{11}+B_{12}=U$$

$$B_iB_j=V \qquad (i\neq j, i, j=2, 3, \cdots 12)$$

至于事件体是这样的，在条件組 k 实现之下的事件集合 S 如果滿足：

1° 若 A 与 B 属于 S，則事件 $A+B$，AB，$A-B$ 也属于 S

2° S 包含 U 和 V

則此事件集合 S 叫做事件体。

§3. 概率的古典定义及概率的性質

在条件組 K 实现之下，随机事件 A 或者它的对立事件 $\overline{A}$ 都可能出现。那么我們进一步問是 A 出现的可能性大呢？还是 $\overline{A}$ 出现的可能性大呢？这就需要我們用一个数来表达这随机事件出现的可能性的大小，这个数就是随机事件 A 在条件組 K 实现下的概率，記为 $P(A)$。概率論的主要任务就是要敍述有关概率計算的各种方法，并闡明随机事件的规律。

为了更精确計算概率起見，我們首先必須給出概率的定义。从概率論发展史来講，首先是从等可能性的假定創立了概率的古典定义，随后是概率的統計定义，直到二十世紀初期，才由苏联的数学家柯尔莫哥洛夫和別伦斯謙等創立了比較严密的概率公理化定义。现在我們从古典意义談起。

設完备事件群

$$G=\{E_1, E_2, \cdots E_n\}$$

古典定义就是假定这完备事件群的每个随机事件 E_i 出现的可能性是相同的，即所謂"等可能性"。那末随机事件 A 的概率古典定义可以这样来敍述：

如果随机事件 A 可以划分为 m 个特款，这些特款都是属于由 n 个事件所組成的完备事件群 G 中等可能性的事件。則随机事件的

概率 $P(A)$ 等于

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1—1}$$

［例4］箱中有体积、輕重完全一样的10个白球和20个黑球。求从中任摸一球而得白球的概率。

解：对于这个問題的“等可能性”、“完备群”等一概滿足。若10个白球中任被摸出其一（事件A）就算成功的話，那末根据式（1—1）有：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

从上面例子不难看出，概率古典定义也可以这样敍述：事件 A 的概率 $P(A)$ 等于有利场合（或情形）的可能結果数与所有可能场合的結果数之比。其有利场合就是我們問題所考虑的事件 A 的可能场合（例4中白球的可能场合結果数为10）。有利场合与不利场合的可能結果数之和即为所有可能场合的結果数（在例4中，有利結合結果数为10，不利场合結果数为20，那么所有可能场合結果数是30）。当然这必須每一场合出現的可能性是均等的。

［例5］若我們擲两顆質料均勻的骰子于一勻正的水平面上。則两顆骰子所有点数的配合为36种，且是等可能性的。那么擲得点数和为3点的可能形式有二种：第一种是甲骰为1点，乙骰为2点，另一种是甲骰为2点，乙骰为1点。故得3点的概率应該等于$\frac{2}{36}\left(=\frac{1}{18}\right)$。用完全类似的方法，讀者不难驗証当点数和为其它数时，其对应概率应該是：

点数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
概率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

（表1）

这样，我們把概率 $P(A)$ 可以看作是事件 A 在事件体上定义的的（单值）函数。这个函数具有下面几个性質：

1.对于体 S 中每一个事件 A，有 $P(A)\geq 0$ 。因为 m 和 n 皆不可能为負数。

2.必然事件 U ，有 $P(U)=1$ 。因为所有可能场合都是有利场合。故所以

$$P(U)=\frac{n}{n}=1$$

3.若 B，C都屬于 S，且$BC=V$，則 $P(B+C)=P(B)+P(C)$ 。… (1—2)

[証]在 S 的 n 个可能試驗結果中，有利于 B的场合为 m_1个，有利于 C 的场合为 m_2 个，由于 B 与 C 假設互不相容，即有利场合不可能有重复的情况。所以有利于 $B+C$ 的场合应为 m_1+m_2 个。那么

$$P(B+C)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(B)+P(C) \quad \text{(証毕)}$$

这个性質就是不相容事件的概率加法定理。用話来叙述是：两互不相容事件和的概率等于它們概率的和。

4.与事件 A 对立的事件 $\overline{A}$ 的概率等于

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (1—3)$$

[証] $\because \quad A+\overline{A}=U \qquad A\overline{A}=V$

根据性質 3 和性質 2 应有

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=P(U)=1$$

$$\therefore \quad P(\overline{A})=1-P(A) \qquad \text{(証毕)}$$

5.不可能事件的概率等于 0 。即 $P(V)=0$

[証] 因为 V 与 U 是对立事件，根据性質 4 应有：

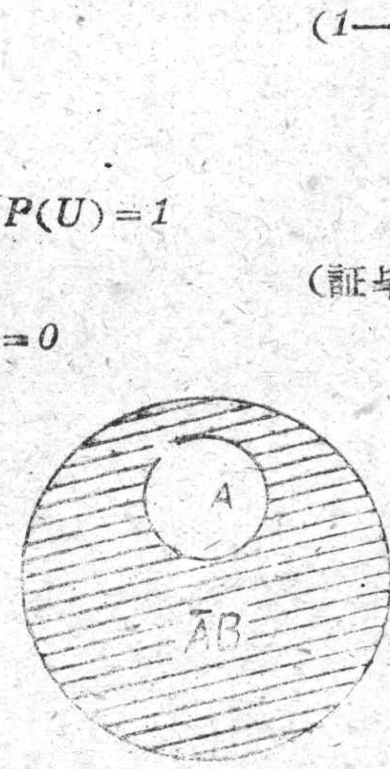
$$P(V)=1-P(U)=0 \qquad \text{(証毕)}$$

6.若 $A\subset B$，則 $P(A)\leq P(B)$

[証] $B=A+\overline{A}B$， 且$A\overline{A}B=V$

根据性質 3和 1 ，有

$$P(B)=P(A)+P(\overline{A}B)\geq P(A) \text{(証毕)}$$



（图2）

7.任何事件的概率都在 0 与 1 之間。

即

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{1—4}$$

[証] 性質 1 已証 $P(\overline{A}) \geq 0$ 另外

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

所以

$$P(A) \leq 1$$

即証

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

此性質也可直接利用古典定义証明，讀者自行驗証。

【例10】朴克全付共52张（除去二张王牌），从中任取三张，試求其中恰有一张么点的概率。

解：我們記取三张恰有一张王牌这一事件为 A。

問題所有可能场合数为 C_{52}^3，有利场合数可以这样計算：一张么点可有 C_4^1 种不同方法选取，其余两张非么点可有 C_{48}^2 种不同选取方法。則所有有利场合数应該是 $C_4^1 \cdot C_{48}^2$。所以

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^2}{C_{52}^3} \approx 0.2042$$

§4 几何概率

在概率論刚开始发展的时候，就感到只考虑有限等可能性事件群上的古典定义之不足，因此，有必要推广到使对于可能有无限多結果的情形也适用。对于很多可能有无限多結果情形的概率問題，一般要借助于积分工具，对某些簡单問題可用几何图形来解决。例如：

“設在平面上有某一区域 G，并且在其中包含有另一可求积的区域 g。在区域 G 內任意抛擲一点，而求这点落在 g 里的概率。”

对此問題中“在区域 G 里任意抛擲一点”这句話应当这样理解：就是所擲点可以落在区域 G 的任何一点上；落在区域 G 的任何部份內的概率与这部份的度量（长度、面积等）成比例；并且与它的位置和形狀无关。因此我們可以这样定义：

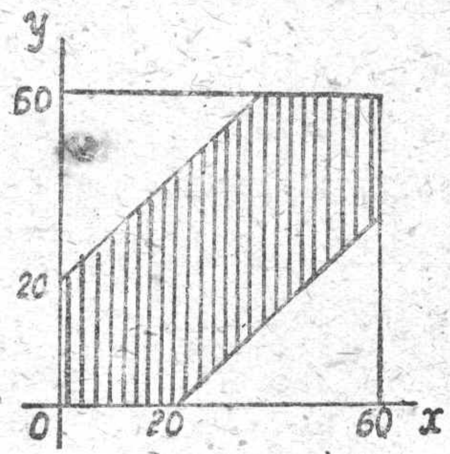
在区域 G 中任意擲一点子落在区域 g 里的概率为 p 为：

$$p=\frac{g\text{ 的度量}}{G\text{ 的度量}}$$

【例 6】 甲乙二人相約于 12 点至 1 点在某地会面，先到的人要等候另一人 20 分鐘，过时就离开。如果每人可在指定的 1 小时內任一时刻到达，并且两人的到达时刻彼此独立（即一人到达时刻与另一人到达时刻沒有影响）。求这二人会面的概率。

解：設 x 和 y 分别为甲乙二人的到达时刻。要二人相遇的充要条件是：

$$|x-y|\leqslant 20$$



（图 3）

现在把 x 和 y 表成平面上笛氏坐标，以分为单位；所有可能結果都被一个边长为 60 的正方形里的点所表示。代表能够全面的点都布列在（图 3）的阴影区域內（这个阴影区域是根据上列不等式，先繪出两条平行綫而得。）故所求概率为阴影面积与全正方形面积之比。即为：

$$p=\frac{60^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 40^2+\frac{1}{2}\cdot 40^2\right)}{60^2}=\frac{5}{9}$$

§ 5 概率的統計定义

概率的古典定义建基在“等可能性”之上，前面也曾提出这种定义的局限性，特別是考虑自然科学和技术性質問題时，古典概率定义遭遇到不可克服的原則性的困难。譬如，我們根据判断事件等可能性的想法，来推导放射性物質原子在某段时間內蛻变的概率，或者断定生孩子得男孩的概率这是不可能的（至少目前是困难的）。

对于这类不适用古典定义或者用古典定义很难解决的問題，我們需要引入概率的統計定义去揭露条件組 K 与随机事件 A 的稳定規