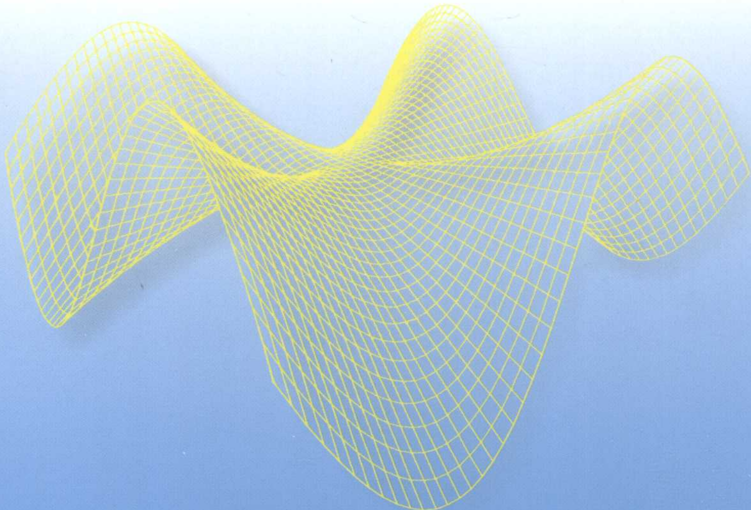
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Calculus

微 积 分（上）

主　编　宣立新
副主编　陈　洪　王顺凤　吴健荣



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微积分

（上）

主　编　宣立新

副主编　陈　洪　王顺凤　吴健荣

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材,以教育部工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求为依据编写的全国通用教材。

本书突出重要概念的实际背景和理论知识的应用。全书分上、下册,上册内容为:函数的极限与连续,导数与微分,微分中值定理和导数的应用,定积分与不定积分,定积分的应用,极限定义的精确化等六章。每节配有习题,每章最后一节为综合例题(选学内容,作为教材内容的提高或拓展),便于教师因材施教或学生自主阅读。书后的附录包括复数、极坐标、数学归纳法等基础知识,一些常用的中学数学公式,几种常用的曲线,积分表,并附习题参考答案。

本书以微积分的基本模型为背景,从极限的描述定义展开一元函数微积分的主要内容,在此基础上介绍极限的精确化定义。全书说理浅显,便于教也便于学。本书可供培养应用型人才的高等学校理、工、经管各类专业学生使用,也可作为技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上/宣立新主编.—北京:高等教育出版社,
2008.6
ISBN 978-7-04-023902-7

Ⅰ.微… Ⅱ.宣… Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 062163 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2008年6月第1版
印　　张	17	**印　　次**	2008年6月第1次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	21.50元

物料号　23902-00

前言

根据教育部工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求（以下简称《基本要求》），总结我们4年来参加“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题的子课题中关于数学课程改革的研究与实践的体会，特别是近4年高等数学课程教材改革的经验与教训，在高等教育出版社的指导下，我们编写了本教材。

本教材是教育部审定的“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”，该教材的初稿从2004年以来经过南京师范大学、南京工程学院等院校应用型本科的教学实践，取得良好的效果，受到师生的好评。这次本教材作为“十一五”国家级规划教材出版，我们编写组全体同志深感责任重大，反复讨论编写原则，我们一致认为：这套教材力求做到(1) 以最简洁明了的、易于接受的逻辑体系向读者提供微积分知识；(2) 优化微积分的重要概念、原理和方法的表述方式，化解微积分的教学难度，使这本教材既科学、又易学。具体说来，本教材力求具有以下特点：

1. 突出培养应用型人才的宗旨，注重重要概念的实际背景和强化高等数学理论知识的应用。

2. 强调微积分的思想和方法，全教材以微积分的两个基本问题为背景，分析解决这两个问题的思路，引进极限概念，在讨论微积分的过程中，始终突出微分、积分的思想和方法。全书十分重视微积分的应用，尽量采用有广泛应用价值的实际量的微元法，在一元函数微分的基础上，利用微小增量分析法，引进实际量的微元，一直贯穿到积分和微分方程的应用中，力求使学生会用微积分知识解决较简单的实际问题。

3. 在保证科学性的前提下，充分考虑教育大众化的新形势，本教材起点较低，由浅入深，保证全面落实《基本要求》，构建了学生易于接受的微积分系统。

(1) 极限部分先介绍描述定义，让读者尽快学习导数、微分与积分的知识，在此基础上再介绍极限的精确定义，使学生易于接受；

(2) 在两个重要极限之前，讨论连续的概念和性质，便于计算极限时进行变量代换、交换极限符号与函数符号的顺序等；

(3) 以导数的应用为主线，穿插讨论微分中值定理；

(4) 突出定积分，弱化不定积分，以定积分为主体将不定积分和定积分合并为一章；

(5) 多元函数积分部分,在讨论了二重积分的概念、计算、应用以后,以定积分、二重积分为基础,引入一般几何图形上的黎曼积分,将三重积分,第一型线、面积分的概念、性质统一处理,增强了积分知识之间的内在联系,提高了教学效率。第二型线、面积分不同于通常教材的处理方法(与第一型线、面积分毫无关联地用分割、取近似、求和、取极限来定义),以实际问题为背景,从第一型的线、面积分引入并展开对坐标的线、面积分的全部内容,简洁、紧凑、明了。

4. 为兼顾读者对微积分学习的不同要求,采取必学与选学相结合的原则。必学部分是主体,是面向全体读者的,按照《基本要求》全面安排;选学部分是面向数学基础较好的读者,供有较高学习要求、或者是打算报考硕士研究生的读者阅读,选学部分安排在每章的最后一节"综合例题"(标以*号)内. 这些例题综合性较强、题型新颖、富有启发性、有一定难度. 从我们实践的情况看,这样安排效果好,深受考研读者的欢迎;"综合例题"也可供教师习题课时选用。

5. 充分注意与中学教材的衔接,在本书的附录中补充介绍了复数、极坐标、数学归纳法,供有关院校使用。另外把一些常用的中学数学公式汇总在附录中,供读者查阅。

本书兼顾了理工、经济管理各类的教学要求,可作为理工、经济管理类各专业的教材。在使用本书时,参照各专业对高等数学教学的基本要求进行取舍。如经济管理类的专业,多元函数积分部分只讲二重积分,级数部分不讲傅里叶级数。

本书第二、三两章由南京信息工程大学王顺凤副教授编写,第四、五两章由苏州科技学院吴健荣教授编写,第九章由南京工程学院陈洪副教授编写,第十二章由南京师范大学吴金林副教授编写,其余各章由南京师范大学中北学院宣立新教授编写。上册:主编宣立新,副主编陈洪、王顺凤、吴健荣;下册:主编宣立新,副主编陈洪、吴金林。全书的所有编写人员认真讨论了各章的书稿,提出修改意见。全书的框架、统稿、定稿由宣立新负责,陈洪协助完成。

南京师范大学数学与计算机科学学院博士生导师杨作东教授仔细审阅了全部书稿,提出了宝贵的修改意见,全体编写人员向杨作东教授表示衷心的感谢。

由于我们编写人员的水平所限,因此书中必有不少缺点和错误,敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编者

2008年1月

目　录

第一章　函数的极限与连续

微积分是17—19世纪在全世界范围内，在文化、科学、技术诸多领域中最重大的成就之一，至今它仍然是人类文明史上的重大成果，并在现代科学、技术中有广泛、重要的应用.《微积分》研究的内容是函数的微积分及其应用，而极限是研究函数的微积分的主要工具.本章将在中学数学的基础上对函数和函数的极限作必要的复习与补充，给出微积分产生的两个基本问题，引进函数的连续概念，为学习函数的微积分打好基础.

第一节　函　　数

一、常量、变量与常用数集

现实世界中的事物往往表现为各种形式的量.其中有的量，取定适当的单位以后，在考察的过程中可用固定的数值来表示，这种量称为常量；还有一些量，在考察的过程中取不同的数值，这种量称为变量.通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,t 等表示变量.

如圆的周长与直径的比(圆周率)π 是一个常量，圆的直径则是一个变量；又如一架客机在飞行过程中，乘客人数是一个常量，而飞机飞行的高度则是一个变量.

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，数集是表示变量取值范围的常用方法.

在本书中，变量总是在实数范围内讨论.常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}_+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还有各种类型的区间.设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，

开区间　$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

左半开区间　$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$；

右半开区间　$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间　$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\}$；　$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\}$；

$(-\infty,b)==\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$；　$(-\infty,b]==\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

此外，为了讨论函数在一点邻近的某些性态，引入点的邻域概念.

定义1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid |x-a|<\delta\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的集合，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 又用 $U(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

显然 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念及其表示法

为了便于书写，本书用以下一些符号表示常用词语：

符号“$\forall$”表示“对任意的”或者“对每一个”；符号“$\exists$”表示“存在”或者“有”.

定义2 设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，$\forall x\in D$，变量 y 按照某个对应关系（如 f）总有确定的实数与之对应（记作 $f(x)$），则称 $y(=f(x))$ 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量，y 称为因变量. D 称为函数 $y(=f(x))$ 的定义域. 数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域并记作 $f(D)$.

由定义2可见，两个函数的对应关系相同、定义域也相同时就是同一个函数，而与函数的自变量、因变量选用的字母无关. 由于函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同，因此它们是两个不同的函数；由于函数 $y=2\lg x$、与 $y=\lg(x^2)$ 的定义域不同，因此它们也是两个不同的函数；但是函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是同一个函数，而且 $y=f(t)$ 与 $u=f(x)$ 也是相同的函数.

例1 某商场2006年第一季度各月毛线的零售量(kg)如下表：

月份 t	1	2	3
零售量 s	84.1	95.3	62.4

上表表示了该商场2006年第一季度毛线月零售量 s 与月份 t 之间的函数关系.

例2 某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量，由气温自动记录仪描得一条曲线（如图1-1），这个图形表示了气温 T 和时间 t（从0时开始）之间的函数关系，记录的时间范围是[0,24)(h).

例3 数学式

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数，它的图像如图1-2所示.

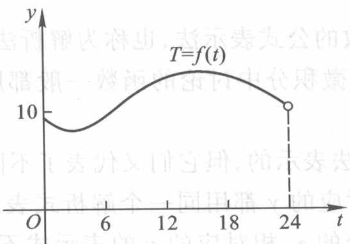


图 1－1

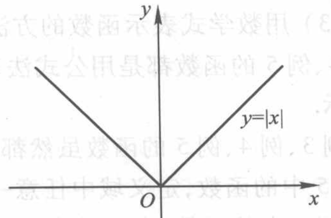


图 1－2

例 4 数学式

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ -x-1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数，它的图像如图 1－3 所示.

函数的定义域，对于具有实际意义的函数来说，则要按题意来确定，如例 1 中函数的定义域 $D=\{1,2,3\}$，例 2 中函数的定义域 $D=[0,24)$，又如圆的周长 l 是半径 r 的函数 $l(r)=2\pi r$，它的定义域是 $(0,+\infty)$；对于抽象地用公式表达的函数，函数的定义域是自变量所能取的使公式有意义的一切值. 如例 3 中函数的定义域 $D=\mathbf{R}$. 例 4 中的函数，其自变量的取值范围在函数的表达式中已经给定了，它的定义域 $D=[-1,1)$.

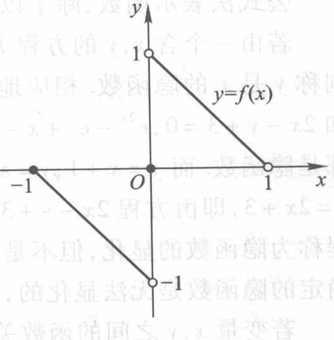


图 1－3

例 5 确定函数 $y=\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域.

解 该函数的定义域 D 为满足不等式组

$$\begin{cases}1+x>0,\\ x\neq 0\end{cases}$$

的 x 的集合，即 $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

表示函数时，要把它的定义域和对应关系表述清楚. 一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的方法有：表格法、图示法和公式法（解析法）.

（1）以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法，如例 1 和数学用表中的函数都是用表格法表示的.

（2）以图形表示函数的方法称为函数的图示法，如例 2 的函数就是用图示

法表示的.

(3) 用数学式表示函数的方法称为函数的公式表示法,也称为解析法. 如例3、例4、例5的函数都是用公式法表示的. 在微积分中讨论的函数一般都用公式法表示.

例3、例4、例5的函数虽然都是用公式法表示的,但它们又代表了不同的情形. 例5中的函数,定义域中任意一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示; 而例3、例4中的函数,定义域中某些不同部分的 x,相对应的 y 的表示式不相同. 对定义域的某些不同部分,对应关系用不同的式子表示的函数,称为分段函数. 例3、例4的函数都是分段函数,不过例3中的分段函数可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$, 即对应关系可以合并成一个式子来表示.

必须注意:分段函数是用几个式子表示一个(不是几个)函数. 在科技、工程中经常用到分段函数,如在等温过程中,气体压强 P 与体积 V 间的函数关系是

$$P=\begin{cases}\dfrac{k}{V}, & V\geqslant V_0,\\ \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & V<V_0\end{cases}\quad (V_0,\ k,\alpha,\beta,\gamma \text{ 都是常数}).$$

公式法表示函数,除了以上直接用自变量的式子表示以外,还有以下形式.

若由一个含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数(满足函数的定义),则称 y 是 x 的隐函数. 相应地,把直接由自变量的式子表示的函数称为显函数. 如 $2x-y+3=0$, $e^{2x}-e^y+x-y=0$(e 是一个大于1的常数)等方程确定的函数都是隐函数. 而 $y=x+1$, $y=\sin x$ 等都是显函数. 由方程 $2x-y+3=0$ 可以解得 $y=2x+3$,即由方程 $2x-y+3=0$ 确定的隐函数可化为显函数 $y=2x+3$,这个过程称为隐函数的显化,但不是每个隐函数都可以显化,如方程 $e^{2x}-e^y+x-y=0$ 确定的隐函数是无法显化的,因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式.

若变量 x,y 之间的函数关系是通过参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad (t\in T)$$

给出的,这样的函数称为由参数方程确定的函数,简称参数式函数,t 称为参数.

如物体作斜抛运动时,运动的曲线(如图1-4)表示的函数就可写作参数式函数:

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}$$

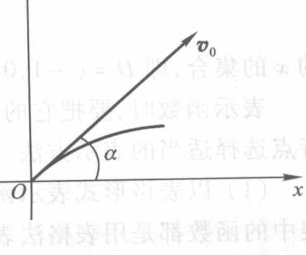


图 1-4

其中 α 为初速度 v_0 与水平方向的夹角,$v_0=|\boldsymbol{v}_0|$.

三、单值函数与多值函数

在以上函数的定义2中,如果$\forall x\in D$,与之对应的y的值总是唯一的,则称这种函数为单值函数,否则称为多值函数. 可以看出中学里定义的函数就是单值函数,因此我们这里的函数定义是中学定义的推广. 前面的例1~例5都是单值函数,但是方程$x^2+y^2=1$确定的隐函数,对每个$x\in(-1,1)$,y有两个确定的值$\pm\sqrt{1-x^2}$与之对应,因此该隐函数y是x的多值函数且是二值函数. 这个二值函数可以分成两个单值函数

$$y_1=\sqrt{1-x^2},y_2=-\sqrt{1-x^2}$$

来讨论,这两个单值函数称为原来函数的单值分支. 又如方程$x^2-(y-1)^2=0$确定的二值函数$y=1\pm x$也可以分成两个单值分支:$y_1=1+x,y_2=1-x$.

对于多值函数,直接研究它们的函数值的变化规律是困难的. 一般情形下多值函数可以先按它们的单值分支来讨论,然后综合得到多值函数的整体性质. 因此研究函数时,关键是讨论单值函数,以后无特殊说明,函数都是指单值函数.

四、函数的几种特性

为了了解函数的整体形态,或为了简化对函数的讨论,常涉及函数的以下性质(设下面的函数为$f(x)$,其定义域为D):

1. 有界性

设数集$X\subset D$,$\exists$常数M,$\forall x\in X$,相应的函数值满足$f(x)\leqslant M(\geqslant M)$,则称$f(x)$在$X$上有上(下)界$M$. 如果$f(x)$在$X$上既有上界又有下界,则称$f(x)$在$X$上有界. 如果$f(x)$在$X$上不是有界的,则称$f(x)$在$X$上无界. 如果$f(x)$在$D$上有界. 则称$f(x)$为有界函数. 例如函数$\sin x$是有界函数. 函数$\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的,但它在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是有界的.

2. 单调性

设区间$I\subset D$,$\forall x_1,x_2\in I$,$x_1<x_2$,恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加(或单调减少)的.

在D上单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 从几何直观上看,单调增加(减少)的函数,其图像自左向右是上升(下降)的.

3. 奇偶性

设D关于原点对称,$\forall x\in D$,都有$f(-x)=-f(x)$,则称函数$f(x)$为奇函数;$\forall x\in D$,都有$f(-x)=f(x)$,则称函数$f(x)$为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于y轴对称.

4. 周期性

设∃常数 $T\neq0$，$\forall x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 当周期函数有最小正周期时，其周期通常指它的最小正周期.

周期函数若以 $T(>0)$ 为周期，则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T]$ $(n\in\mathbf{Z})$ 上函数的图像是相同的.

例 6　讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的特性.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|=\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|<\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$；

(3) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0,$$

因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的、单调增加的奇函数，从而 $f(x)$ 不具有周期性.

五、函数的反函数与复合函数

1. 函数的反函数

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$\forall y\in f(D)$，总有唯一确定的 $x\in D$ 使 $f(x)=y$，得到一个以 y 为自变量、x 为因变量的函数，称它为函数 $f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 $f(D)$，值域为 D.

习惯上，函数常用 x 为自变量，y 为因变量；因此函数 $y=f(x)$ 的反函数常记作 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 为对称.

必须指出，反函数是单值函数，单值函数未必有反函数，如单值函数 $y=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有反函数. 如果函数 $y=f(x)$ 的自变量与因变量之间是一一对应的（一个 x 对应唯一的 y，不同的 x 对应不同的 y），这时函数 $y=f(x)$ 必有反函数 $y=f^{-1}(x)$. 如函数 $y=x^2$ 在 $x\geqslant0$ 的条件下有反函数 $y=\sqrt{x}$.

例 7　反三角函数的定义.

解　对正弦函数 $y=\sin x$，$\forall y\in[-1,1]$，有无穷多个 x 与其对应，因此 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有反函数，但 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有反函数，并称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$. 正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$. 余切函数在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$. 反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数统称为反三角函数.

2. 复合函数

先看一个例子. 设 $y=u^2$，$u=\sin x$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $u=\sin x\in[-1,1]$；又由 $y=u^2$，有 $y=\sin^2 x\in[0,1]$，即通过中间媒介 u，y 是 x 的函数，称 $y=\sin^2 x$ 是 $y=u^2$，$u=\sin x$ 的复合函数. 必须注意，并不是任意两个函数都可以复合，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合.

定义 4　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，$D=\{x\in X \mid \varphi(x)\in U\}\neq\varnothing$，则 $\forall x\in D$，通过 $u=\varphi(x)$，变量 y 有确定的值 $f(u)$ 与之对应，得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，该函数称为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，D 是它的定义域，u 称为中间变量.

如自由落体运动的物体，其动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$，速度 $v=gt$，它们的复合函数 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

复合函数还可以有两个以上函数的复合. 函数的“复合”和“四则运算”是由简单函数（由常数、基本初等函数经有限次四则运算得到的函数）构造复杂函数的重要方法. 反之，复杂函数又可“分解”成简单函数的复合或四则运算的结果. 以后常用这种“分解”法简化函数的讨论. 因此能熟练分析复杂函数的构造并化成简单函数的复合或四则运算是非常重要的.

例 8　函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0,\\ 2-x, & x<0,\end{cases}$　求 $f[f(3)]$.

解　$f[f(3)]=f[1-3]=f(-2)=2-(-2)=4$.

例 9　设函数 $f(x)=x^3$，$\varphi(x)=\sin\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$. 求 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$.

解　由 $f(x)$、$\varphi(x)$ 的表达式，$\forall x\geqslant 0$，

$$f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^3=\sin^3\sqrt{x};\quad \varphi[f(x)]=\sin\sqrt{f(x)}=\sin\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

例 10　分别指出函数 $y=\sin 5x$，$y=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

解　$y=\sin 5x$ 是由 $y=\sin u$，$u=5x$ 复合而成的；

$y=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\cos v$，$v=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 复合而成的.

六、初等函数

1. 基本初等函数及其图像

函数 $y=x^{\alpha}$（常数 $\alpha\in\mathbf{R}$）称为幂函数. 如 $y=x^{n}$（$n\in\mathbf{N}_{+}$）、$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$y=x^{-1}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 等等情形，可见幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域及其性质与 α 的取值有关，但 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内都有意义. 图 1－5 中画出了 $\alpha=\pm1$、$\alpha=2$、$\alpha=\dfrac{1}{3}$ 的情形.

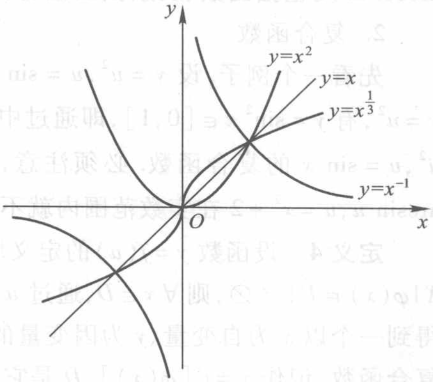


图 1－5 幂函数 $y=x^{\alpha}$

函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）称为指数函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，图像如图1－6所示.

函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）称为对数函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，图像如图 1－7所示.

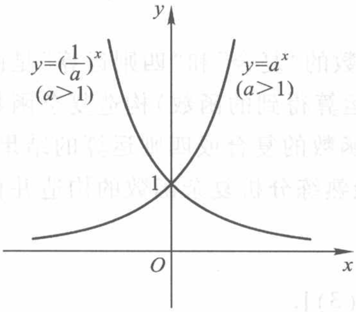


图 1－6 指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）

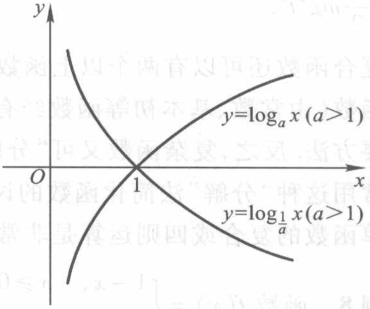


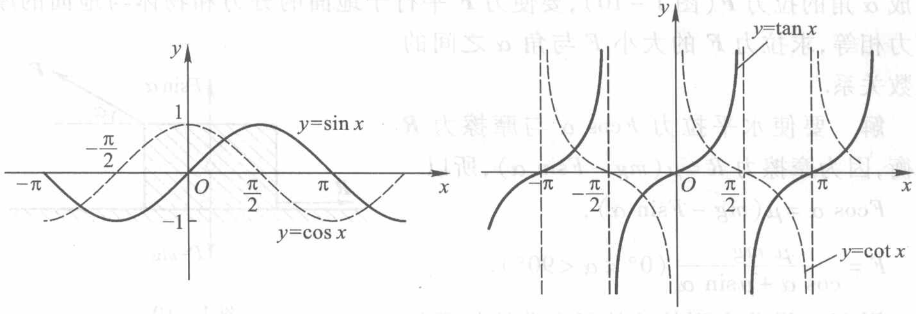
图 1－7 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0,a\neq1$）互为反函数.

常用的三角函数有：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$（图 1－8(a)）；正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$（图 1－8(b)）；正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

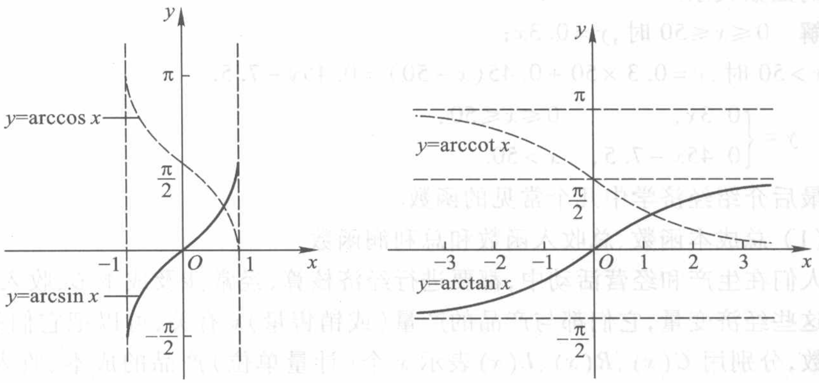
常用的反三角函数有：反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数. 其定义可见例 7，反正弦函数、反余弦函数的图像如图 1－9(a) 所示，反正切函数、反余切函数的图像如图 1－9(b) 所示.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等五类函数统称为基本



(a) 正弦函数与余弦函数　　(b) 正切函数与余切函数

图 1－8



(a) 反正弦函数与反余弦函数　　(b) 反正切函数与反余切函数

图 1－9

初等函数.

2. 初等函数

定义 5　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合构成的、可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y = 2x^2 - 1$,$y = \sin\dfrac{1}{x}$,$y = |x| = \sqrt{x^2}$ 等等都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

七、建立函数关系的实例

一些实际问题,常用分析该问题中的变量之间的等量关系来建立函数关系.

例 11　已知一物体的质量为 m,它与地面的摩擦系数是 μ,设有一与水平方

向成 α 角的拉力 $\boldsymbol{F}$(图 1-10),要使力 $\boldsymbol{F}$ 平行于地面的分力和物体与地面的摩擦力相等,求拉力 $\boldsymbol{F}$ 的大小 F 与角 α 之间的函数关系.

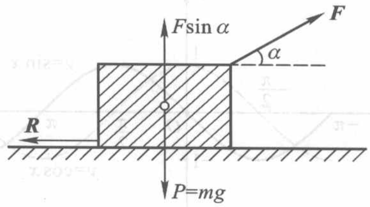


图 1-10

解 要使水平拉力 $F\cos\alpha$ 与摩擦力 $\boldsymbol{R}$ 平衡,因为摩擦力 $R=\mu(mg-F\sin\alpha)$,所以

$$F\cos\alpha=\mu(mg-F\sin\alpha),$$

$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\ (0°<\alpha<90°).$$

例 12 设北京到某地的行李费按如下规定收费,当行李不超过 50 kg 时,按基本运费 0.30 元/kg 计算;当超过 50 kg 时,超过部分按 0.45 元/kg 收费,试求北京到该地的行李费 y(元)与行李量 x(kg)之间的函数关系.

解 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时,$y=0.3x$;

$x>50$ 时,$y=0.3\times 50+0.45(x-50)=0.45x-7.5$.

所以 $$y=\begin{cases}0.3x, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.45x-7.5, & x>50.\end{cases}$$

最后介绍经济学中几个常见的函数.

(1) 总成本函数、总收入函数和总利润函数

人们在生产和经营活动中,都要进行经济核算,经常涉及成本 C、收入 R、利润 L 这些经济变量,它们都与产品的产量(或销售量)x 有关,可以把它们看成 x 的函数,分别用 $C(x)$、$R(x)$、$L(x)$ 表示 x 个(计量单位)产品的成本、收入和利润,并依次称为总成本函数、总收入函数和总利润函数.

一般地,总成本由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(x)$ 两部分组成,即 $C(x)=C_1+C_2(x)$,其中固定成本 C_1 与产量 x 无关,如设备维修费、企业管理费等;可变成本 $C_2(x)$ 随产量 x 的增加而增加,如原材料费、能源费等. 总成本函数、总收入函数和总利润函数之间有以下的重要关系:$L(x)=R(x)-C(x)$.

(2) 需求函数、供给函数

市场对某种商品的需求量 Q 与该商品的价格 p 有密切的关系,如果不考虑其他因素的影响,需求量 Q 可以看成是价格 p 的函数,并称它为需求函数,记作 $Q=Q(p)$.

市场对某种商品的供给量 S 与该商品的价格 p 也有密切的关系,如果不考虑其他因素的影响,供给量 S 同样可以看成是价格 p 的函数,并称它为供给函数,记作 $S=S(p)$.

例 13 设生产某种产品 x 件的总成本为 $C(x)=20+2x+0.5x^2$(单位:万元),每售出一件该产品的收入是 20 万元,求售出 20 件该产品时的总利润和平