

斛兵博士文丛

HUBING BOSHI WENCONG

合肥工业大学研究生科技创新基金资助出版

广义 Ball 曲线曲面的 几何造型研究

著 江 平 ◎ 导师 檀结庆

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

广义 Ball 曲线曲面的几何造型研究/江平著. —合肥:合肥工业大学出版社, 2008. 12

(斛兵博士文丛)

ISBN 978-7-81093-869-3

I. 广… II. 江… III. 几何—计算机辅助设计 IV. TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 195464 号

广义 Ball 曲线曲面的几何造型研究

江 平 著 策划编辑 马国锋 责任编辑 孟宪余

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2008 年 12 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	印 次	2008 年 12 月第 1 次印刷
邮 编	230009	开 本	710 毫米×1000 毫米 1/16
电 话	总编室:0551—2903038	印 张	10.5
	发行部:0551—2903198	字 数	160 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	中国科学技术大学印刷厂
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发 行	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-869-3

定价: 28.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换。

《斛兵博士文丛》出版委员会学术委员会

主任委员：徐枋巍

副主任委员：陈心昭 赵 韩

委 员（按姓氏笔画为序）：

史铁钧 刘全坤 陈心昭

张崇巍 杨伯源 费业泰

赵 韩 钟玉海 徐枋巍

出版编辑委员会

主任委员：吴玉程 马国锋

委 员：朱 红 王其东 高 隽

孟宪余 王 磊 李军鹏

黄 飞 权 怡

出版说明

为贯彻教育部《关于实施研究生教育创新计划 加强研究生创新能力培养 进一步提高培养质量的若干意见》(教研〔2005〕1号)文件精神,培养研究生创新意识、创新能力,提高研究生培养质量,合肥工业大学设立了研究生科技创新基金,以支持和资助研究生的教育创新活动,为创新人才的成长创造条件。学校领导高度重视研究生教育创新,出版的《斛兵博士文丛》就是创新基金资助的项目之一。

《斛兵博士文丛》入选的博士学位论文是合肥工业大学2007年度部分优秀的博士学位论文。为提高学位论文的出版质量,《斛兵博士文丛》以注重创新为出版原则,充分展示我校博士研究生在基础与应用研究方面的成绩。

《斛兵博士文丛》的出版,得到了校学位委员会、学术委员会和有关专家的大力支持,也得到了研究生导师和研究生的热情支持,我们谨此表示感谢,希望今后能继续得到他们的支持与帮助。

我们力求把这项工作做好,但由于学识水平有限,书中难免存在不足之处,敬请读者给予批评指正。

合肥工业大学研究生学位论文出版编辑委员会

2008年12月

总 序

当今世界科学技术突飞猛进，知识经济飞速发展，以经济和科技为基础的综合国力的竞争日趋激烈。而科技的竞争、经济的竞争乃至综合国力的竞争，归根结底是人才的竞争。面对新的形势、新的要求，党中央先后作出了实施“科教兴国”、“人才强国”战略和走自主创新道路，建设创新型国家的重大决策。胡锦涛同志在党的十七大报告中又提出，建设人力资源强国和创新型国家是我国全面夺取建设小康社会新胜利的两大新目标。高等学校是国家创新体系的重要组成部分，肩负着培养自主创新型人才的历史使命。研究生教育处于高等教育的最高层次，是国家培养高层次创新型人才的主要渠道。研究生，特别是博士研究生的科研工作，一般处于本学科的前沿，具有一定的创造性。为鼓励广大研究生，特别是博士研究生选择具有重大意义的科技前沿课题进行研究，进一步提高研究生的创新意识、创新精神、创新能力，激励、调动我校博士研究生及其指导教师进一步重视提高博士学位论文质量和争创优秀博士学位论文的主动性和积极性，展示我校博士研究生的学术水平，为他们的尽快成才搭建平台，学校经过精心策划，编辑出版了《斛兵博士文丛》。

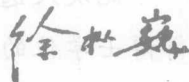
此次入选《斛兵博士文丛》的论著，均为2007年毕业并获得博士学位的博士研究生学位论文，是在广泛动员、严格把关的基础上，根据质量第一、公平公开、规范评审的原则认真遴选出来的。同时这些论著注重坚持基础研究与应用研究并举，是兼顾

理论价值与实践意义的最新研究成果。可以说，这套《斛兵博士文丛》（第二卷）虽然也可能有这样或那样的不足，但基本反映了我校博士研究生所具有的坚实的理论基础、系统的专门知识，以及较高的学术造诣和分析能力；体现了他们崇尚学术、追求真理、勇于创新的科学精神，实事求是、严谨认真的治学态度，不断进取、追求卓越的学术品格；展现了我校“勤奋、严谨、求实、创新”的校风学风。

建校63年来，学校充分发挥人才培养、科学研究和服务社会的功能，为国家和社会培养了一大批杰出人才，一代又一代的莘莘学子在这里勤奋耕耘、茁壮成长。出版《斛兵博士文丛》也是我校实施研究生教育创新工程、培养研究生创新精神、提高研究生创新能力的一个重要举措。合肥工业大学经过63年的建设和发展，逐步形成自身的办学特色，也取得许多令人瞩目的成就。我们正在不断改善办学条件，逐步完善相关政策，营造有利于高层次创新型人才尽快成长的良好环境，确保学校多出人才、快出人才、出好人才。

我衷心希望广大研究生特别是博士研究生，发扬我校优良的传统、校风、学风，在合肥工业大学自由宽松、开放和谐、充满生机和活力的学术环境中奋发努力、锐意进取、勇于创新，通过自己的辛勤劳动和刻苦钻研写出更好的论文，为进一步提高我校的学术水平、科研创新能力和综合实力作出更大的贡献，努力把学校建设成为国内先进、国际知名的创新型高水平大学。

合肥工业大学校长
教授、博士生导师



二〇〇八年十一月

致 谢

本文是在导师檀结庆教授的悉心指导下完成的。在攻读博士学位期间，檀老师在学习和研究方面给了我精心的指导和莫大的帮助。檀老师渊博的知识、敏锐的科学洞察力、严谨的治学态度、为人师表的品格、孜孜不倦的进取精神和开拓创新的科学精神，一直感染并激励着我，给我留下了深刻印象，导师在学业上的教诲将是我一生的精神财富，导师的言传身教将使我终身受益。值此论文完成之际，谨向导师致以诚挚和深切的谢意！

在学习期间和论文撰写过程中，曾得到许多老师和同学的帮助，在此不胜感激。特别要感谢的是冯玉瑜教授、王国瑾教授、陈发来教授、朱功勤教授、鄢弘毅教授，感谢他们在各方面对我的鼓励和热忱帮助。

感谢王强、赵前进、苏本跃、汪忠庆、张伟红、侯萌萌，他们在学习和生活上都给予了我很多的帮助，让我能在非常和谐融洽的环境里完成自己的课题研究，感谢讨论班的所有成员。同时要向关心我生活、学业的同事及朋友表示真诚的谢意。

特别感谢父母、姐姐和哥嫂一直以来对我的关怀和爱护，本人能顺利完成学业，跟他们的巨大支持和培养是分不开的。特别感谢我可爱的儿子王齐振，他是我一直以来不断进取、努力学习的动力。

最后，要感谢评阅、评议博士论文和出席博士论文答辩会的各位专家学者，感谢他们在百忙中能给予指导。

江 平

2008年5月1日于逸夫楼

摘 要

在计算机辅助几何设计中,定义在千变万化的拓扑结构上的自由曲线曲面存在着千变万化的形式,而广义 Ball 曲线曲面则是其中一种在曲线求值及升降阶的计算速度方面明显优于 Bézier 曲线的曲线曲面。本文主要是基于不同形式曲线曲面之间的转换,并结合区间(圆域)算法、曲线曲面的降阶等问题,对广义 Ball 曲线曲面几何造型的相关问题进行了较深入的研究。研究成果主要体现在以下几个方面:

1. 在 WSGB 基函数的对偶基的基础上,得到了 WSGB 曲线与 Bézier 曲线之间的互换关系式,同时也就得到了 Bézier 曲线与 Said-Ball 曲线、Wang-Ball 曲线之间的互换。另外,还给出了一种 WSGB 曲线的显式细分算法,从而避免了转换成幂基及求逆的过程。还给出了几个相关的组合恒等式以及幂函数在 WSGB 基下的 Marsden 恒等式。同时,由 WSGB 基与 Bernstein 基之间的转换公式,还给出了 WSGB 曲线的包络算法(几何生成算法)。

2. 刘松涛和刘根洪([刘 96])、邬弘毅([邬 98])曾分别利用菱形算法与直接展开法给出了三角域上 Said-Ball 曲面与 Bézier 曲面之间的转换公式。而本文通过引入一族三角域上带位置参数 H 的广义 Ball 基和广义 Ball 曲面,利用相邻两曲面的基函数之间的关系,给出三角域上 Said-Ball 曲面与 Bézier 曲面之间互相转换的递归算法。该算法计算量小,编程简单,更有助于广义 Ball 曲面的推广应用。最后还在计算复杂性方面与[刘 96]的菱形算法与[邬 98]的直接展开法这两种不同的算法进行了比较。

3. 目前,Bézier 曲线曲面降多阶方法中多采用求逆矩阵的方法得到逼近曲线的控制点表达式,这无疑会导致计算的复杂性。Tchebyshev 多项式的最小零偏差性质在研究曲线曲面降阶时起到了非常重要的作用,有鉴于此,本文给出了 Tchebyshev 多项式与 Bernstein 基函数之间的转换递推算

法,将其应用于 Bézier 曲线曲面的降阶处理,避免了求近似最佳一致逼近曲线时需要逆矩阵的麻烦,且该算法稳定、计算量小。

4. 给出了区间 Said-Ball 曲线的边界表示,并分别用线性规划法及最佳一致逼近法讨论了区间 Ball 曲线的降阶算法。实验结果表明,用最佳一致逼近法效果显然比线性规划法好。若利用线性规划法得到的区间曲线不能达到预期的误差,则可以先对曲线在 $t=1/2$ 处做细分,再逐段用线性规划法降阶,而且用线性规划法对 $n(n \geq 3)$ 次区间 Ball 曲线降阶时,降阶后的曲线必定插值端点,而利用最佳一致逼近法则不一定,若要实现插值端点,则必须增加约束条件。

5. 讨论了圆域 Said-Ball 曲线的降阶问题。首先给出圆域 Said-Ball 曲线的定义,讨论了圆域 Said-Ball 曲线的相关性质,在提出圆域 Said-Ball 曲线的降阶问题后,主要利用最佳一致逼近法给出一般的降阶和保端点插值的降阶算法。当降阶算法不能达到预期效果时,我们同样可以采用先对圆域 Said-Ball 曲线细分的方法再分段进行降阶。

6. 给出了 WSGB 曲线两种不同的降阶算法,即:扰动法和最佳一致逼近法;给出了两种方法所得降阶曲线与原曲线的逼近误差与相对逼近误差,并通过实例对两种降阶算法进行了比较。

关键词: 广义 Ball 曲线,区间算法,Tchebyshev 多项式,降阶,三角域 Said-Ball 曲面

ABSTRACT

Free curves/ surfaces defined in different topological structure have different expressions in CAGD, and generalized Ball curves are more efficient than Bzier curves in calculation, the degree elevation and reduction. Based on the transformation between the different curves/ surfaces, and the interval (disc) arithmetical and the degree reduction of the curves and surfaces, this dissertation focuses on the research about the geometrical modeling of the generalized Ball curves/ surfaces. The achieved main results are as follows:

1. By means of the dual functionals of the generalized Ball basis of Wang-Said type, we investigated the basis transformation formula between Bernstein basis and WSGB basis, and at the same time, worked out the basis transformation formulae between Bernstein basis and Wang-Ball and Said- Ball basis. We discussed the explicit subdivision algorithms for WSGB curves of degree $n = 2m + 1$, including the subdivision algorithm for Wang-Ball curves with $L = m - 1$ and the subdivision algorithm for Said-Ball curves with $L = 0$. In the last part, we also constructed the envelope algorithm of the WSGB curves. As a result, the curves of higher degrees can be generated from the curves of lower degrees with envelope technique.

2. By introducing a family of generalized Ball bases and generalized Ball surfaces with position parameter Hand using the relation between the bases of adjacent surfaces, this dissertation presents a new algorithm for conversion of Said-Ball surfaces and Bzier surfaces on triangular domain, which is easy for programming.

3. Considering the fact that orthogonal Tchebyshev polynomials, which produce the least zero-deviation approximation, play important roles in the degree reduction of curves and surfaces, we worked out a recursive conversion algorithm between the Tchebyshev polynomials and Bernstein polynomials instead of computing the inverse matrices in the process of degree reduction of Bzier curves and surfaces as required in many current existing methods, which proves more stable and more economical than other methods.

4. The boundary of interval Ball curves of degree n is discussed and two algorithms for the degree reduction of interval Ball curves are given by means of the linear programming method and best approximation method respectively. If the interval curves obtained by linear programming method fail to be controlled within the expected error, then the subdivision techniques can be used.

5. The basic concepts of disk Said-Ball curves are given in a form suitable for the study. The control points of disk Said-Ball curves are disks, rather than rectangles as in the interval Said-Ball curves. To solve the degree reduction problem of disk Said-Ball curves, we design an algorithm involving both cases: non-interpolating endpoints and interpolating endpoints of disk Said-Ball curves. Some examples are provided to demonstrate the efficiency of the algorithm.

6. The degree reduction of generalized Ball curves of Wang-Said type by perturbation and the best uniform approximation are respectively discussed, the approximation error and relative approximation error are analyzed, and the comparison between these two methods is made by some examples.

Keywords: Generalized Ball curves, Degree reduction, Said-Ball surfaces on triangular domain, Interval arithmetic, Tchebyshev polynomials

目 录

总序	(001)
致谢	(001)
摘要	(001)
Abstract	(001)
第 1 章 绪 言	(001)
1.1 参数曲线曲面造型技术的发展历史	(001)
1.2 广义 Ball 曲线	(002)
1.2.1 Wang-Ball 曲线	(005)
1.2.2 Said-Ball 曲线	(006)
1.2.3 Said-Bézier 型广义 Ball 曲线(SBGB 型曲线)	(011)
1.2.4 Wang-Said 型广义 Ball 曲线(WSGB 型曲线)	(016)
1.3 Bézier 曲线、曲面的降阶	(027)
1.4 区间算法	(030)
1.5 本文的内容安排	(033)
第 2 章 WSGB 型广义 Ball 曲线的细分和包络	(035)
2.1 WSGB 型广义 Ball 曲线的细分	(035)
2.1.1 奇数次 WSGB 型广义 Ball 曲线的细分	(035)
2.1.2 偶数次 WSGB 型广义 Ball 曲线的细分	(043)
2.1.3 计算 WSGB 型曲线的细分矩阵的算法	(046)
2.1.4 WSGB 基函数下的 Marsden 恒等式	(050)

2.1.5	数值实例	(054)
2.2	WSGB 型曲线的包络	(055)
2.2.1	n 次 WSGB 型曲线由 $n-1$ 次 WSGB 曲线族的包络 ...	(055)
2.2.2	n 次 WSGB 型曲线由 $n-s(s \geq 1)$ 次 WSGB 曲线族的包络	(057)
2.2.3	数值实例	(057)
2.3	结论	(059)
第 3 章	三角域上 Said-Ball 曲面与 Bézier 曲面之间一种新的转换算法	(060)
3.1	Bézier 曲面到广义 Ball 曲面的转换公式	(060)
3.2	三角域上一族带位置参数的广义 Ball 曲面	(063)
3.3	三角域上 Bézier 曲面与广义 Said-Ball 曲面的递归算法	(065)
3.4	算法与实例	(069)
3.5	本文算法与原算法计算量的比较	(071)
3.6	结论	(073)
第 4 章	区间 Said-Ball 曲线的边界及降阶	(074)
4.1	区间算法与区间 Said-Ball 曲线	(074)
4.2	区间 Said-Ball 曲线的边界	(075)
4.3	区间 Said-Ball 曲线的降阶	(078)
4.3.1	线性规划法	(079)
4.3.2	最佳一致逼近法	(081)
4.3.3	保端点插值的最佳一致逼近法	(084)
4.4	实例	(087)
4.5	结论	(090)
第 5 章	圆域 Said-Ball 曲线的降阶	(091)
5.1	圆域 Said-Ball 曲线	(091)
5.1.1	圆域算法	(091)
5.1.2	圆域 Said-Ball 曲线	(092)

5.1.3 圆域 Said-Ball 曲线的性质	(092)
5.2 圆域 Said-Ball 曲线的降阶	(094)
5.2.1 圆域 Said-Ball 曲线的一般降阶	(095)
5.2.2 圆域 Said-Ball 曲线的保端点插值降阶	(098)
5.3 边界误差	(099)
5.4 实例	(101)
5.5 结论	(104)
第 6 章 Wang-Said 型广义 Ball 曲线的降阶	(105)
6.1 引言	(105)
6.2 WSGB 型曲线的降阶	(107)
6.2.1 扰动法	(108)
6.2.2 最佳一致逼近法	(111)
6.3 误差	(112)
6.4 数值实例	(113)
6.5 结论	(116)
第 7 章 Tchebyshev 多项式与 Bernstein 多项式的互换及其在曲线曲	
面降阶上的应用	(117)
7.1 Tchebyshev 多项式与 Bernstein 多项式的互换	(117)
7.2 Bézier 曲线的近似最佳一致降多阶	(125)
7.2.1 一般的降多阶	(125)
7.2.2 保端点插值的降多阶	(128)
7.3 Bézier 曲面的近似最佳一致降多阶	(128)
7.4 结论	(132)
第 8 章 总结与展望	(133)
8.1 全文总结	(133)
8.2 今后研究工作展望	(134)
参考文献	(135)
攻读博士学位期间发表的论文	(147)

第1章 绪 言

本章首先简单介绍计算机辅助几何设计的应用背景,及参数曲线曲面造型技术的发展历史,重点阐述了本文所要研究的广义 Ball 曲线曲面、区间算法及曲线曲面的降阶变换。

1.1 参数曲线曲面造型技术的发展历史

计算机辅助几何设计,简称 CAGD(Computer Aided Geometric Design),起源于飞机、船舶的外形放样(Lofting)工艺,主要研究在计算机图像系统的环境下对曲面信息的表示、逼近、分析和综合。它已与微分几何、代数几何、函数逼近论、拓扑学、抽象代数、矩阵论、微分方程、最优化、数值分析等数学分支以及计算机辅助设计/加工、数据结构、数控、程序设计、计算机动画等有着紧密联系,成为一门新兴的交叉学科与边缘学科。现在其应用范围除了航空、造船、汽车这三大制造业外,还涉及 CAD/CAM、建筑设计、生物工程、医疗诊断、航天材料、电子工程、机器人、服装鞋帽模型设计等技术领域。随着计算机图形学的发展,还广泛应用于计算机视觉、地形地貌、军事作战模拟、动画制作、多媒体技术等领域。

CAGD 由 Coons(1912—1979)、Bézier(1910—1999)等大师于 20 世纪 60 年代奠定理论基础。1962 年,法国雷诺(Renault)汽车公司工程师 Bézier 提出一种通过控制多边形设计曲线的思想,建立了 UNISURF 自由曲线曲面设计系统([Bez71]、[Bez72]、[Bez74]、[Bez86])。Bézier 方法生成的曲线曲面具有一系列优良性质,如几何与仿射不变性、凸包性、保凸性、对称性、端点插值性等;且有如 de Casteljau 求值、离散、升阶、插值、包络生成等简单易用

的算法,很好地控制了整体形状([GR74a],[Far90]).

另一方面,B样条(B-spline)曲线曲面由于具有局部性及连续阶可调性而逐步成为几何造型的核心技术.B样条最初是由 Schoenberg 于 1946 年提出来的([Sch46]).Clark ([Cla75],[Cla76]),de Boor([Boo72])和 Cox([Cox71])分别对 B样条曲线做了研究.1963 年美国波音(Boeing)飞机公司的 Ferguson 首先在飞机设计上应用了以 $(1, t, t^2, t^3)$ 为基函数参数三次曲线([Fer64]).1964 年,美国麻省理工学院(MIT)的 Coons 给美国国防部的技术报告中引入了超限插值的概念([Coo64]),后来进一步利用 Hermite 基来定义插值算子,得到了 Coons 混合曲面([Coo67]).1974 年,美国通用汽车公司的 Gordon 和 Riesenfeld 构造了等距节点 B样条曲线([GR74b]).它不但继承了 Bézier 曲线的所有优点,而且具有形状局部可调及连续阶数可调等 Bézier 曲线所没有的特性.B样条作为 CAGD 中形状描述方法引入后,1980 年 Boehm 和 Cohen 等人给出了 B样条曲线的节点插入技术([CLR80],[Boe80]);Tiller 论述了有理 B样条曲线曲面的具体应用([Til83]).此后,L. Piegl 和 W. Tiller 更系统地探索了有理 B样条曲线曲面的构造和形状调整问题,并系统论述了 NURBS (Non-Uniform B-Spline)方法([Pie85],[Pig89],[PT95b]).

现在,曲面表示和造型已经形成了以非均有理 B样条(NURBS)参数化特征设计和隐式代数曲面表示这两类方法为主体,以插值、拟合、逼近这三种手段为骨架的几何理论体系.

在计算机辅助几何设计中,自由曲线曲面可以定义在千变万化的拓扑结构上,存在着千变万化的形式,而本文所讨论的广义 Ball 曲线曲面则是其中一种在曲线求值及升降阶的计算速度方面,明显优于 Bézier 曲线的曲线曲面.

1.2 广义 Ball 曲线

CONSURF 系统中,1974 年,英国数学家 Ball 定义有理三次参数曲线([Bal74])

$$B(t) = \sum_{i=0}^3 b_i(t) \sigma_i b_i / \sum_{i=0}^3 b_i(t) \sigma_i, 0 \leq t \leq 1$$

这里

$$(b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t)) = ((1-t)^2, 2(1-t)^2 t, 2(1-t)t^2, t^2).$$

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1-f, f, f, 1-f), 0 < f < 1.$$

并以此作为 Warton 前英国航空公司的 CONSURF 机身曲面造型系统的数学基础([Bal74],[Bal75],[Bal77]). 这一系统的建立, 彻底改革了传统的飞机外形设计中繁琐费时的手工放样工艺.

王国瑾 1987 年提出了一种广义 Ball 曲线([王 87]), 现被称为 Wang-Ball 曲线. 高次 Wang-Ball 基函数区别于其他的基函数, 它的首尾为二次函数, 从两头向中间逐步提高, 相邻的基元素一般相差二次. Wang-Ball 基的引入给高次曲线、曲面求值的快速算法提供了一种强有力的工具. 类似于 Bézier 曲线, Wang-Ball 曲线也具有计算稳定性、对称性、凸包性、端点插值性、几何作图性、几何不变性、可离散性等良好的几何性质, 同样适用于参数化特征设计, 而且在求曲线上的值及升降阶的计算速度方面, 明显优于 Bézier 曲线.

1989 年, 马来西亚数学家 Said([Sai89]) 和英国数学家 Goodman T. N. T. ([GS89],[GS91a],[GS91b]) 在共同研究的过程中, 将 Ball 的三次曲线的原型推广到任意奇数次, 得到另外一种现被称为 Said-Ball 的广义 Ball 基函数和曲线, 并指出新曲线的许多良好性质. 由于这种广义 Ball 基函数是由 Hermite 插值导出, 因此只局限在奇数次数. 1996 年, 胡事民等人([HWJ96]) 将奇次广义 Ball 基函数推广到偶数次的情况, 定义了任意次数的广义 Ball 曲线, 并称之为 Said-Ball 曲线, 并讨论了它们的简单性质. Othman 和奚梅成、丁友东等([丁 00],[刘 96],[OG97],[奚 97]) 分别独立地讨论了广义 Ball 曲线的对偶基及其应用.

胡等([HJ92],[HWJ93],[HWJ96]) 将以上两种广义 Ball 曲线与 Bézier 曲线在递归求值、包络性质、升降阶算法等方面作了系统的对比研究. 结果表明, 在求值及升降阶的计算速度上, Said-Ball 曲线优于 Bézier 曲线, 而 Wang-Ball 曲线又优于 Said-Ball 曲线. 在递归求值算法上([PD00]、