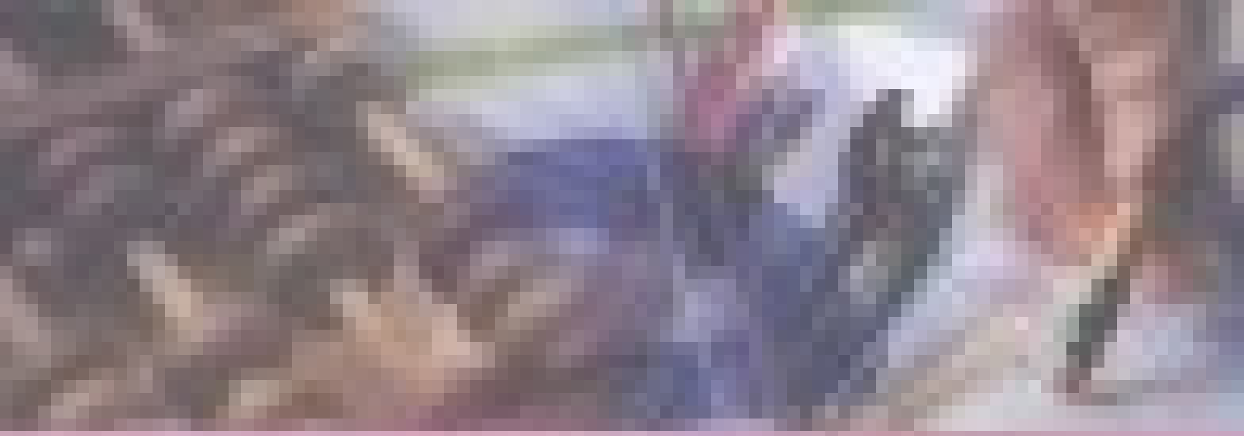
中等职业教育教材

SHUXUE

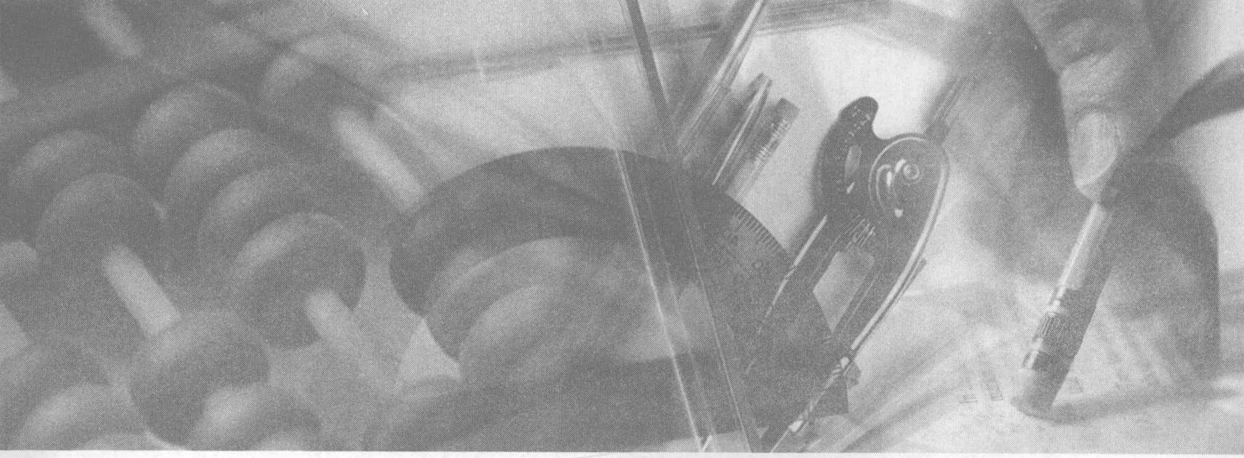
数学

丘　峰　主编

中国轻工业出版社



数 学



中等职业教育教材

数　学

（上　册）

主　编　丘　峰

副主编　张曙辉　郑　玲

编　者　苏洪发　雷　蕊　兰福荣

　　　　陈晓玲　林添华

中国轻工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学：上册 / 丘峰主编．—北京：中国轻工业出版社，2008.9

中等职业教育教材

ISBN 978-7-5019-6615-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．丘…　Ⅲ．数学课－专业学校－教材　Ⅳ．G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第140387号

责任编辑：沈　强　　责任终审：劳国强　　装帧设计：东方美迪

特约编辑：冯志国　　责任校对：燕　杰　　责任监印：胡　兵　张　可

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街6号，邮政编码100740）

印　　刷：中煤涿州制图印刷厂北京分厂

经　　销：各地新华书店

版　　次：2008年9月第1版第1次印刷

开　　本：787×1092　1/16　印张：10

字　　数：173千字

书　　号：ISBN 978-7-5019-6615-8/O·010　定价：18.00元

读者服务部邮购热线电话：010-65241695　010-85111729　传真：010-85111730

发行电话：010-85119845　65128898　传真：010-85113293

网　　址：http://www.chlip.com.cn

Email：club@chlip.com.cn

80570J4X101HBW

目　录

第一章　集合与逻辑用语

一　集　合

主要知识点：

1. 九个基本概念：集合、元素、子集、真子集、交集、并集、全集、补集、集合相等
2. 集合元素的三个特征：确定性、互异性、无序性
3. 两种表示法：列举法与描述法
4. 三种集合运算：求交集、求并集、求补集
5. 数学符号："$\in$"、"$\notin$"，"$\varnothing$"，"$\subsetneqq$"，"$\subseteq$"，"$\not\subset$"，"$\cap$"，"$\cup$"，"I"，"$\complement_I A$"

1.1　集合的概念及表示方法

在小学和初中，我们已经接触过一些集合，比如，自然数的集合，有理数的集合，一元一次不等式 $2x-3>5$ 的解的集合. 平面上与一个定点的距离等于定长的点的集合（即圆）……

那么，集合的含义是什么呢？其实集合与我们的生活息息相关，我们平时会遇到各种各样的事物，为了方便讨论，我们常在一定的范围内，按照一定的标准对一些事物进行分类，分类后，我们会用一些术语来称呼他们，比如，群体，全体，集合，等等.

一般地，我们把研究对象统称为元素，简称元. 把一些元素组成的总体叫做集合，简称集.

例如，"中国的直辖市"构成一个集合，这个集合的元素是北京、天津、上海、重庆这四个城市.

"方程 $x^2=1$ 的解的全体"构成一个集合，这个集合的元素是 $1,-1$ 这两个数.

"我校高一年级的全体学生"构成一个集合，这个集合的元素是我们学校高一年级的学生.

为了书写方便，我们常用大写拉丁字母来表示集合，如集合 A，集合 B 等.

下面给出一些常用的数集及其表示.

非负整数集（自然数集）：全体非负整数的集合，记作 $\mathbf{N}$；

非负整数集内排除 0 的集，也称**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

整数集：全体整数的集合，记作 $\mathbf{Z}$.

有理数集：全体有理数的集合，记作 $\mathbf{Q}$.

实数集：全体实数的集合，记作 $\mathbf{R}$.

集合的元素常用小写的拉丁字母表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，

记作 $a \in A$，读作"a 属于集合 A"；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$，读作"a 不属于集合 A". 例如，$0.3 \in \mathbf{R}$，$\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$.

我们考虑方程 $x+2=x+3$ 的解的全体构成的集合，显然这个集合不含任何元素，我们把这种不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

关于集合它还有以下特性：

(1)确定性：集合中的元素必须是确定的. 这就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了. 例如，给出集合{地球上的四大洋}，它只有太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋四个元素，其他对象都不是它的元素. 又如，"我国的小河流"就不能组成一个集合，因为组成它的对象是不确定的.

(2)互异性：集合中的元素又是互异的. 这就是说，集合中的元素是没有重复现象的，任何两个相同的对象在同一个集合中时，只能算作这个集合的一个元素. 例如，"book 中的字母"构成的集合中只有三个元素 b,o,k.

从上面的例子我们看到，可以用自然语言描述一个集合，除此之外还可以用下面的方法来表示集合.

列举法

列举法是把集合中的元素一一列举出来的方法，并置于花括号"{}"内，如{北京，天津，上海，重庆}，{b,o,k}. 用这种表示方法时元素间用逗号分隔，但列举时与元素的次序无关，例如，集合 $\{1,-1\}$ 与集合 $\{-1,1\}$ 表示同一个集合. 同此，如果两个集合所含的元素完全相同，则称这两个集合相等.

注：集合{b,o,k}的元素有 3 个. 一般地，含有有限个元素的集合叫做**有限集**.

描述法

描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

例如，不等式 $x-3>2$ 的解集可以表示为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x-3>2\}$.

我们约定，如果从上下文看，$x \in \mathbf{R}$ 是明确的，那么这个集合也可以表示为 $\{x \mid x-3>2\}$.

一般地，如果在集合 I 中，属于集合 A 的任一元素 x 都具有性质 $p(x)$，而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$，则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的一个特征性质. 此时集合 A 可以用它的特征性质描述为 $\{x \in I \mid p(x)\}$.

注：集合 $\{x \mid x-3>2\}$ 的元素有无限个. 一般地，含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

图示法

为了直观起见，我们可以用图形来表示集合，通常用一条封闭曲线所围成的区域来表示一个集合，封闭曲线内部的点表示这个集合的元素，这个图形称为 Venn 图(文氏图)，这种方法称为图示法.

对于有些集合用 Venn 图表示更加形象直观，如图 1-1：

注：边界用直线还是曲线表示没有关系，只要封闭并把有关元素全部包含在里边

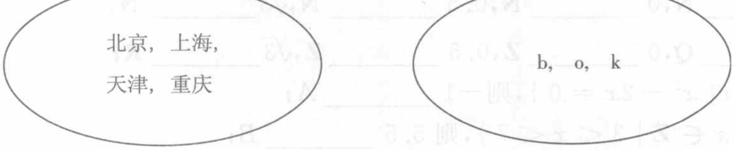


图 1-1

就行.

例 1 用列举法表示下列集合：

(1)$\{x|x$ 为小于 10 的质数$\}$；

(2)$\{x|\ x^2+2x-3=0\}$.

解 (1)$\{2,3,5,7\}$；(2)$\{1,-3\}$.

例 2 用描述法表示下列集合：

(1)正偶数的集合；

(2)不等式 $x^2-1\geqslant 0$ 的解集；

(3)三角形的全体构成的集合.

解 (1)$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$；(2)$\{x|\ x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$；(3)$\{x|x$ 是三角形$\}$.

例 3 试分别用列举法和描述法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-2=0$ 的所有实数根组成的集合；

(2) 由大于 10 小于 20 的所有整数组成的集合.

解 (1) 设方程 $x^2-2=0$ 的实数根为 x，并且满足条件 $x^2-2=0$，因此，用描述法表示为

$$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-2=0\}.$$

方程 $x^2-2=0$ 有两个实数根$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，因此，用列举法表示为

$$A=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}.$$

(2) 设大于 10 小于 20 的整数为 x，它满足条件 $x\in\mathbf{Z}$，且 $10<x<20$，因此，用描述法表示为

$$B=\{x\in\mathbf{Z}|10<x<20\}.$$

大于 10 小于 20 的整数有 11,12,13,14,15,16,17,18,19，因此，用列举法表示为

$$B=\{11,12,13,14,15,16,17,18,19\}.$$

习题

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x\mid x$ 是 15 的正约数$\}$；

(2)$\{x\in\mathbf{N}\mid 1<x<5\}$；

(3)$\{(x,y)\mid x\in\{1,2\},y\in\{1,2\}\}$.

2. 用描述法表示下列集合：

(1)$\{1,4,7,10,13\}$；

(2)奇数的集合；

(3)方程 $2x^2+3x-5=0$ 的解集.

3. 用“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1)1 ________ $\mathbf{N}$,0 ________ $\mathbf{N}$,0.5 ________ $\mathbf{N}$,$\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{N}$,

1 ________ $\mathbf{Q}$,0 ________ $\mathbf{Z}$,0.5 ________ $\mathbf{Z}$,$\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{R}$;

(2)若 $A=\{x \mid x^2-2x=0\}$,则-1 ________ A;

(3)若 $B=\{x\in\mathbf{Z} \mid 3<x<7\}$,则 5.5 ________ B;

(4)若 $C=\{x\in\mathbf{N} \mid -3<x<4\}$,则$-1$ ________ C.

1.2 子集与集合的相等

一般地,对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 叫作集合 B 的**子集**,记作:

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

读作"A 包含于 B",或"B 包含 A".

当集合 A 不包含于集合 B,或集合 B 不包含集合 A 时,则记作 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$)

任何一个集合都是它本身的子集,即 $A\subseteq A$.

我们还规定:**空集是任何集合的子集**,也就是说对于任何集合 A,都有 $\varnothing\subseteq A$.

想一想:符号"$\in$"与"$\subseteq$"的应用对象有什么不同?

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么,集合 A 叫作集合 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

我们还可以知道,**空集是任何非空集合的真子集**,也就是说,对于任何非空集合 A,总有 $\varnothing\subsetneqq A$.

图 1-2(1)表示 A 是 B 的子集,图 1-2(2)表示 A 不是 B 的子集.

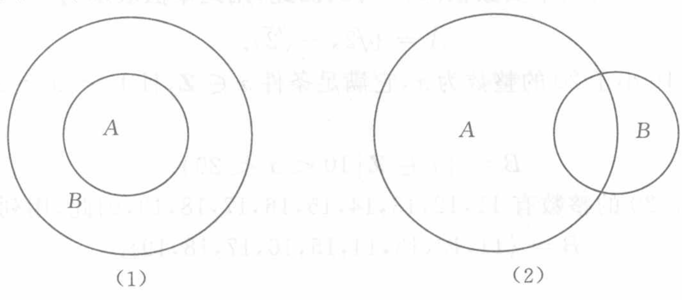


图 1-2

例 1 确定下列集合间是否具有包含关系:

(1)$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$;

(2)$A=\{$正方形$\}$,$B=\{$矩形$\}$,$C=\{$平行四边形$\}$;

(3)$A=\{-1,1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$.

分析 集合之间的包含关系要根据条件来确定,如果 A 是 B 的子集,那么 A 的各个元素都必须是 B 的元素,而不是 A 的部分元素是 B 的元素.因此,只要 A 中一个元素不是 B 的元素,那么 A 就不是 B 的子集.

解 (1)$A\subseteq B$,且 $A\subsetneqq B$;

(2)$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，$A\subseteq C$，即 $A\subseteq B\subseteq C$，且 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，$A\subsetneqq C$，即 $A\subsetneqq B\subsetneqq C$；

(3)$A\not\subseteq B$，且 $B\not\subseteq A$，即集合 A，B 不具有包含关系.

例 2 写出集合 $A=\{-1,0,1\}$ 的所有子集和真子集.

分析 集合 A 中的任意一个、两个、三个元素的集合及空集都是集合 A 的子集，由所有子集中去掉集合 A 本身就得到了集合 A 的所有真子集.

解 集合 A 的所有子集有 $\varnothing$，$\{-1\}$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{-1,0\}$，$\{0,1\}$，$\{-1,1\}$，$\{-1,0,1\}$，其中除 $\{-1,0,1\}$ 外，其余都是 A 的真子集.

> 想一想：如果集合 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 A 与 C 是什么关系？举例说明.

对于两个非空集合 A 与 B，如果它们是由完全相同的元素组成的，那么，我们说这两个集合相等，记作 $A=B$.

例如：若 $A=\{x\,|\,x^2-x=0\}$，$B=\{0,1\}$，那么 $A=B$，显然，如果 $A=B$，则有 $A\subseteq B$，同时有 $B\subseteq A$.

习题

1. 用符号"$\in$"，"$\notin$"，"$\subseteq$"，"$\subsetneqq$"，"$=$"填空：

a ________ $\{a,b,c\}$；

0 ________ $\{x\,|\,x^2=0\}$；

$\varnothing$ ________ $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2+1=0\}$；

$\{0,1\}$ ________ $\mathbf{N}$.

2. 下面八个关系式：

① $\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$；

② $\{0,1,2\}=\{2,0,1\}$；

③ $\{0\}\supseteq\varnothing$；④ $\varnothing\in\{0\}$；

⑤ $0\in\{0\}$；⑥ $\varnothing=\{0\}$；

⑦ $\{1\}\in\{0,1,2\}$；

⑧ $\varnothing\subseteq\{0,1,2\}$.

其中正确的是________.（填上你认为正确的序号即可）

3. 写出集合 $\{1,2,3\}$ 的所有子集，并指出哪些是它的真子集.

4. 若 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x\,|\,x^2+ax+b=0\}$；且 $A=B$，求 a，b 的值.

5. 已知 $A=\{$菱形$\}$，$B=\{$正方形$\}$，$C=\{$平行四边形$\}$，试写出 A，B，C 之间的关系.

1.3 交集与并集

(一)交集

一般地，对于两个集合 A 与 B，由它们的所有公共元素组成的集合，叫作 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B".

所谓公共元素，就是既属于 A 又属于 B 的元素，即 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

例如：{红，橙，黄，绿，青，蓝，紫}$\cap${红，黄，蓝，白}$=${红，黄，蓝}.

集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$，可用图 1-3(1)(2)中的阴影部分表示：

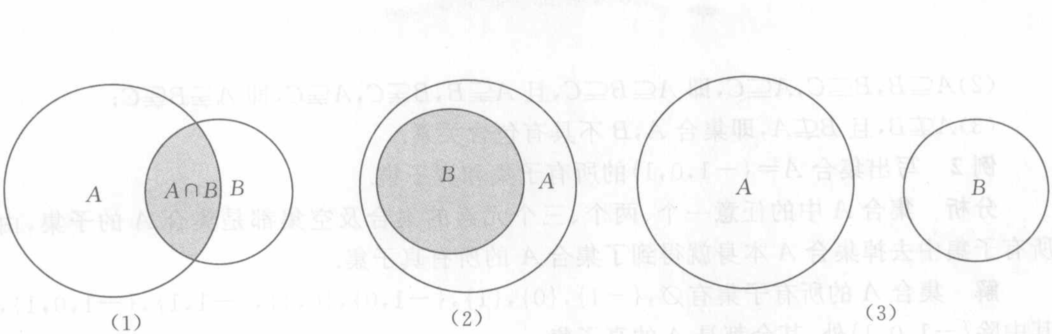


图 1-3

想一想：图 1-3(3) 中没有阴影，那么 $A\cap B$ 是什么？

例 1 已知 $A=\{6$ 的正因数$\}$，$B=\{4$ 的正因数$\}$，求 $A\cap B$.

解 因为 6 的正因数的集合 $A=\{1,2,3,6\}$，4 的正因数的集合 $B=\{1,2,4\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3,6\}\cap\{1,2,4\}=\{1,2\}$.

例 2 设 $A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x|x\geqslant 0\}\cap\{x|x<3\}=\{x|0\leqslant x<3\}$.

如图 1-4 所示：

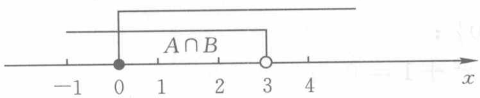


图 1-4

（二）并集

一般地，对于两个集合 A 与 B，由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合，叫作 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

例如：集合 $A=\{1,2,3,6\}$ 与 $B=\{1,2,4\}$ 的并集 $C=A\cup B=\{1,2,3,6\}\cup\{1,2,4\}=\{1,2,3,4,6\}$.

集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$，可用图 1-5 中的阴影部分表示：

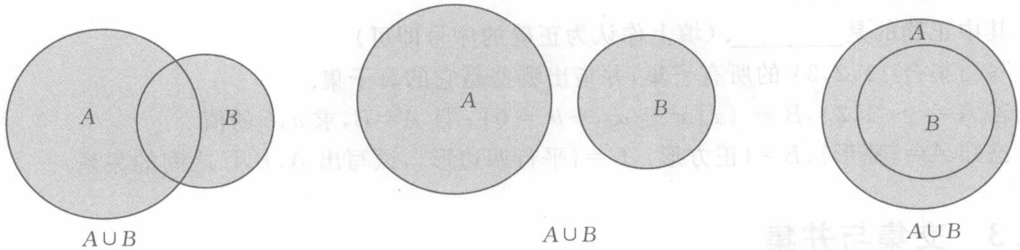


图 1-5

从交集的定义我们容易推出，对于任何集合 A,B，有 $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

从并集的定义我们也容易推出，对于任何集合 A,B，有 $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

例 1 已知集合 $A=\{$能被 2 整除的正整数$\}$，$B=\{$能被 3 整除的正整数$\}$，试判断元素 1,3,4,6,12 是否属于 $A\cap B$ 和 $A\cup B$?

解 因为 $A\cap B=\{$能被 6 整除的正整数$\}$，

$A\cup B=\{$能被 2 或 3 整除的正整数$\}$，

所以 6,12 属于 $A\cap B$,3,4,6,12 属于 $A\cup B$.

例 2 设 $A=\{$矩形$\}$,$B=\{$菱形$\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$

解 $A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}$

$=\{$有一个角是直角且有一组邻边相等的平行四边形$\}$

$=\{$正方形$\}$，

$A\cup B=\{$矩形$\}\cup\{$菱形$\}$

$=\{$矩形或菱形$\}$

例 3 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$,$B=\{x\mid x>0\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$,并用数轴上的相应点集表示.

解 $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<3\}\cap\{x\mid x>0\}$

$=\{x\mid 0<x<3\}$.

用数轴上点集表示,如图 1-6 表示:

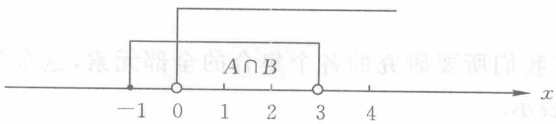


图 1-6

$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<3\}\cup\{x\mid x>0\}$

$=\{x\mid x\geqslant -1\}$.

用数轴上点集表示 $A\cup B$,请同学们自己画在下面:

习题

1. 设 $A=\{3,4,6,8\}$，$B=\{4,5,7,8\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　).

A. $\{4,5,6\}$　　B. $\{4\}$　　C. $\{4,8\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4x-5=0\}$,$B=\{x\mid x^2=1\}$，则 $A\cup B$ 等于(　　).

A. $\{-1,1,5\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-1,-1,1,5\}$　D. $\{-5,-1,1\}$

3. 已知 $A=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$,$B=\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$,则 $A\cup B=$______，$A\cap B=$______.

4. 学校里开运动会,设 $A=\{x\mid x$ 是参加 100 m 跑的同学$\}$,$B=\{x\mid x$ 是参加 200 m 跑的同学$\}$,$C=\{x\mid x$ 是参加 400 m 跑的同学$\}$. 学校规定,每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项,试用集合运算的观点说明这项规定,并解释以下集合运算的含义:

(1)$A\cup B$；

(2)$A\cap C$.

5. 已知集合 A 中有 2 个元素,B 中有 5 个元素,则集合 $A\cup B$ 中最多有几个元素？最少有几个元素？

6. 设集合 $A=\{x^2,2x-1,-4\}$,$B=\{x-5,1-x,9\}$. 若 $A\cap B=\{9\}$，求 $A\cup B$.

1.4 全集与补集

在一个由 12 人组成的排球队里，上场参赛的队员有 6 人，其余 6 人是替补队员，这里有三个集合：

S＝{一个排球队的全体队员}；

A＝{上场参赛的队员}；

B＝{替补队员}.

其中集合 A，B 是集合 S 的子集，排球队里任何一个队员不属于集合 A 就属于集合 B，但它总属于集合 S，这个集合 S 可以看作一个**全集**，记作 S. 其中所有不属于上场参赛的队员——替补队员所组成的集合 B，叫作集合 A 在全集 S 中的补集，同样，集合 A 也是集合 B 在全集 S 中的补集.

一般地，对于全集 S，集合 A 是 S 的子集，即 $A\subseteq S$，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作集合 A 在 S 中的**补集**，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$ 且 $x\notin A\}$.

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个**全集**，全集通常用 U 表示.

集合 A 在 S 中的补集 $\complement_S A$，可以用图 1-7 中的阴影部分表示出来，图中的矩形内部表示全集 S，圆内部分表示集合 A.

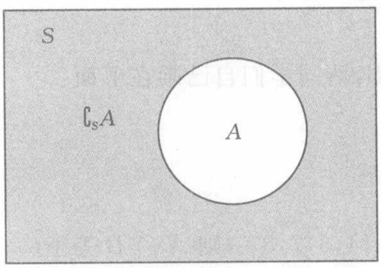


图 1-7

例 1 已知，$S=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,5\}$，求 $\complement_S A$.

解 $\complement_S A=\{2,3,4\}$.

例 2 已知 S＝{三角形}，A＝{直角三角形}，求 $\complement_S A$.

分析 三角形中按角分类有锐角三角形、钝角三角形、直角三角形，其中前面两种又总称为斜三角形.

解 $\complement_S A$＝{非直角三角形}＝{斜三角形}.

习题

1. 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{3,4,6,8\}$，$B=\{4,5,7,8\}$，则 $\complement_U(A\cap B)$ 等于(　　)

A. $\{4,8\}$　　B. $\{4\}$

C. $\{1,2,3,5,6,7,9\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

2. 设集合$U=\mathbf{Z}$，$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2=x\}$，则$A\cap \complement_U B$等于(　　)

A. $\{-1,2\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

3. 如图1-8，U是全集，A，B是U的子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)

A. $A\cap B$　　B. $B\cap(\complement_U A)$

C. $A\cup B$　　D. $A\cap(\complement_U B)$

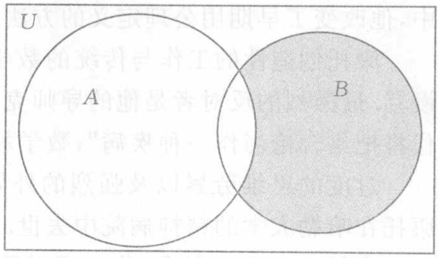


图1-8

4. 已知$U=\mathbb{R}$，且集合$A=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid 3x-7\geqslant 8-2x\}$，$A\cap(\complement_U B)=$______，$B\cap(\complement_U A)=$______.

5. 已知全集$U=\{0,-1,-2,-3,-4\}$，集合$M=\{0,-1,-2\}$，$N=\{0,-3,-4\}$，则$(\complement_U M)\cup(\complement_U N)=$______.

6. 设全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x<-1$或$x>1\}$，$B=\{x\mid x-2\geqslant 0\}$，判断$\complement_U A$与$\complement_U B$之间的关系.

7. 设集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求$\complement_U A$，$\complement_U B$.

8. 设集合$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid -1\leqslant x<5\}$，求$\complement_U A$.

拓展资料

康托与集合论

康托(Georg Cantor，1845—1918)是德国伟大的数学家，集合论的创立者.

康托出生在俄国的圣彼得堡，11岁时和父母一起移居德国，17岁时进入瑞士苏黎世大学，翌年转入柏林大学.此时的柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心.康托师从外尔斯特拉斯、库曼和克罗内克这几位著名的数学家.受导师的影响，康托对数论产生了兴趣，并集中精力对高斯所留下的问题作了深入的研究，1867年以数论方面的论文获博士学位.在1869年，康托取得在哈勒大学任教的资格，1879年任教授.

康托接受了数学家海涅的建议，研究方向从数论转到了函数的三角级数表示的唯一性，这是促使他建立集合论的最直接原因.函数可用三角级数表示，最早是由数学家傅立叶提出来的，此后对于间断点的研究越来越成为分析领域中引人注目的问题.从19世纪30年代起，不少数学家从事着对不连续函数的研究，都在一定程度上与集合这一概念挂上了钩，这为康托最终建立集合论创造了条件.1871年，康托给出了集合的定义，还定义了集合的并与交等.1874年，康托发表了《关于全体实代数数的特征》，标志着集合论的诞生.

在接下来的三年时间里，康托向神秘的无穷宣战，他成功地证明了一条直线上的点能和一个平面上的点一一对应，也能和空间中的点一一对应.这一结果是出人意料的，就连康托本人也觉得简直不可相信.从直观上看，平面上的点显然要比一条线上的点要多得多，怎么可能建立一一对应呢？可这又是明摆着的事实.

康托在1879年到1884年间主要研究线性连续统，相继发表了六篇系列文章，汇集成《关于无穷的线性点集》，里面给出了集合论的一些重要结果，讨论了由集合论产生的

哲学问题. 1883 年,康托将它以《集合论基础》为题作为专著单独出版.《集合论基础》是康托关于早期集合理论的系统阐述.

康托于 1895 年和 1897 年先后发表了两篇对超限数理论具有决定意义的论文,在文中,他改变了早期用公理定义的方法,采用集合作为基本概念.

康托创造性的工作与传统的数学观念发生了冲突,遭到了一些人的反对、攻击甚至谩骂. 最激烈的反对者是他的导师克罗内克;法国数学界权威庞加莱曾预言我们的"后一代将把集合论当作一种疾病";数学家施瓦兹由于反对集合论而与康托断交……

过度的思维劳累以及强烈的外界刺激使康托患上了精神分裂症. 1918 年 1 月 6 日,康托在哈勒大学的精神病院中去世.

康托一生受过磨难,曾一度对数学失去兴趣,转向哲学和文学,但始终不放弃集合论. 今天集合论已成为数学大厦的基石,它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支以及物理学等,康托也因此成为最伟大的数学家之一.

二 逻辑用语

1.5 逻辑联结词

下列语句的表述形式有什么特点? 你能判断它们的真假么?

(1) $2+4=7$;

(2) 若 $x^2=4$,则 $x=2$;

(3) 两个全等三角形的面积相等;

(4)3 能被 2 整除。

可以看到,这些语句都是陈述句,并且可以判断真假,其中语句(3)判断为真,语句(1)(2)(4)判断为假。

一般的,我们把语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题. 其中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题. 强调判断命题的两个基本条件:①必须是一个陈述句;②可以判断真假.

所以,上在语句中,(3)为真命题,(1)(2)(4)为假命题。

判断下列语句是否是命题,如果是,是真命题还是假命题?

①$12>5$; ②3 是 12 的约数;

③0.5 是整数; ④3 是 12 的约数吗?

⑤$x>5$; ⑥10 可以被 2 或 5 整除;

⑦菱形的对角线互相垂直且平分; ⑧0.5 是非整数.

(一)逻辑联结词

1. **逻辑联结词**:"或""且""非"这些词就叫做逻辑联结词.

2. **简单命题**:不含逻辑联结词的命题,如①②③.

3. **复合命题**:由简单命题与逻辑联结词构成的命题,如⑥⑦⑧.

常用小写的拉丁字母 $p,q,r,s,\cdots$ 表示命题,故复合命题有三种形式:p 或 q;p 且 q;