

高 等 学 校 教 材

高等数学

下 册

南开大学数学科学学院
刘光旭 张效成 赖学坚 编



高等教育出版社

内容提要

本书是为一般高等院校物理学类、电子信息科学类、电气信息类相关专业的本科生(兼顾对数学要求偏高的工科类专业)所编写的高等数学教材。全书分上、下册。上册内容主要包括一元函数微积分学和常微分方程初步。下册内容主要包括空间解析几何、多元函数微积分学和级数。本书理论的讲述逻辑清晰、条理分明;例题的选取层次有序,并力求做到富有典型性、综合性、启发性和趣味性;习题的编排难易适中,有A类、B类阶梯之分。书后附有习题答案与提示,供教师和学生参考使用。

本书是作者多年教学经验的总结和体现。它具有注重基础、突出重点、例题丰富、简明实用、便于讲授、便于学生理解和掌握、教学要求把握适度等特点。在基础理论的系统讲解、综合计算能力的严格训练以及实际应用能力的培养等方面都力求做到适合相关专业的教学要求。讲授本书有较大的灵活性,教师可根据课程的教学要求对内容作适当取舍。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/刘光旭,张效成,赖学坚编. —北京:
高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023872-3

I. 高… II. ①刘…②张…③赖… III. 高等数学-高等
学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第059097号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 董达英 封面设计 王 晔 责任绘图 吴文信
版式设计 余 杨 责任校对 胡晓琪 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 24.75
字 数 460 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008年6月第1版
印 次 2008年6月第1次印刷
定 价 28.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23872-00

目 录

第 7 章 向量代数与空间解析几何	1
§ 1 向量代数	1
1.1 空间直角坐标系	1
1.2 向量的概念	3
1.3 向量的线性运算	3
1.4 向量的坐标表示	5
1.5 向量的模和方向余弦的坐标表示式	7
1.6 向量的三种乘积运算	8
习题 7.1	15
§ 2 空间的平面与直线	17
2.1 平面的方程表示	17
2.2 点到平面的距离	19
2.3 两平面间的夹角	20
2.4 空间直线的方程	20
2.5 两直线的夹角	23
2.6 直线与平面的夹角	23
2.7 点到直线的距离	23
2.8 异面直线的距离	24
习题 7.2	26
§ 3 几种常见的二次曲面与空间曲线简介	27
3.1 曲面方程的建立	28
3.2 由方程研究曲面的特征	31
3.3 空间曲线简介	36
3.4 常见空间区域的图形	38
习题 7.3	42
第 8 章 多元函数微分学	45
§ 1 多元函数的极限与连续	45
1.1 n 维欧氏空间	45
1.2 二元函数的极限与连续性	49
习题 8.1	57
§ 2 偏导数	61
2.1 偏导数	61

2.2 全微分	67
习题 8.2	71
§3 多元复合函数的微分法	74
3.1 复合函数求导法则	74
3.2 重复运用链式法则,求多元复合函数的高阶偏导数	78
3.3 多元函数一阶全微分的微分形式不变性	79
习题 8.3	80
§4 隐函数的微分法	83
4.1 由一个方程所确定的隐函数	84
4.2 由方程组所确定的隐函数	86
习题 8.4	90
§5 多元函数的泰勒公式	93
习题 8.5	96
§6 方向导数与梯度	97
6.1 方向导数	97
6.2 梯度	100
习题 8.6	101
§7 偏导数的应用	103
7.1 几何应用	103
7.2 多元函数的极值	107
习题 8.7	116
第9章 重积分	119
§1 二重积分	119
1.1 二重积分的概念	119
1.2 二重积分的性质	121
1.3 在直角坐标系下计算二重积分	124
1.4 在极坐标系下计算二重积分	131
1.5 二重积分的一般换元公式	137
习题 9.1	141
§2 三重积分	144
2.1 三重积分的概念与性质	144
2.2 在直角坐标系下计算三重积分	146
2.3 在柱坐标系下计算三重积分	149
2.4 在球坐标系下计算三重积分	153
2.5 三重积分的一般换元公式	157
习题 9.2	160
§3 重积分的应用举例	163

3.1 几何应用举例	163
3.2 物理应用举例	169
习题 9.3	175
第 10 章 曲线积分与曲面积分	177
§ 1 曲线积分	177
1.1 第一型曲线积分	177
1.2 第二型曲线积分	181
习题 10.1	187
§ 2 曲面积分	189
2.1 第一型曲面积分	190
2.2 第二型曲面积分	194
习题 10.2	202
第 11 章 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式	205
§ 1 格林公式	205
1.1 格林公式	205
1.2 曲线积分与路径无关的条件	212
习题 11.1	223
§ 2 高斯公式	225
习题 11.2	231
§ 3 斯托克斯公式	233
习题 11.3	239
§ 4 梯度、散度和旋度	241
4.1 数量场的梯度	241
4.2 向量场的散度	242
4.3 向量场的旋度	243
习题 11.4	245
第 12 章 无穷级数	247
§ 1 常数项级数的概念和性质	247
1.1 基本概念	247
1.2 柯西收敛原理(柯西准则)	250
1.3 收敛级数的基本性质	251
习题 12.1	254
§ 2 正项级数及其收敛判别法	255
习题 12.2	264
§ 3 任意项级数的审敛法	265
3.1 交错级数	265
3.2 绝对收敛与条件收敛	267

IV 目 录

3.3 绝对收敛级数的性质	269
习题 12.3	270
§ 4 函数项级数	271
4.1 基本概念	271
4.2 函数项级数一致收敛的判别法	274
4.3 一致收敛级数的性质	275
习题 12.4	277
§ 5 幂级数	278
5.1 幂级数的收敛半径与收敛域	279
5.2 幂级数的运算与性质	282
习题 12.5	288
§ 6 泰勒级数及其应用	289
6.1 泰勒级数	289
6.2 函数展开成幂级数	292
6.3 幂级数展开的应用举例	300
6.4 欧拉公式	302
习题 12.6	303
§ 7 傅里叶级数	304
7.1 三角函数系的正交性	305
7.2 傅里叶级数	306
7.3 傅里叶级数的收敛定理	307
7.4 任意周期函数的傅里叶级数	314
7.5 正弦级数与余弦级数	317
7.6 傅里叶级数的复数形式与频谱分析	320
7.7 均方差与贝塞尔不等式	324
习题 12.7	324
第 13 章 广义积分与含参变量积分	326
§ 1 无穷限积分	326
1.1 无穷限积分的概念	326
1.2 非负函数无穷限积分的判别法	328
1.3 绝对收敛	332
习题 13.1	332
§ 2 瑕积分	333
2.1 瑕积分的概念	333
2.2 瑕积分的判别法	335
习题 13.2	337
§ 3 含参变量积分	338
习题 13.3	343

§ 4 欧拉积分	345
4.1 Γ 函数	345
4.2 B 函数	347
4.3 Γ 函数与 B 函数的关系	348
习题 13.4	350
部分习题答案与提示	352

第7章 向量代数与空间解析几何

在古代,点和数是完全不同的数学对象.研究点的学问(比如欧几里得(Euclid)几何)与研究数的学问(比如代数方程的求解)之间也没有什么联系.法国数学家笛卡尔(Descartes)首先在空间设立坐标系,在点与有序实数组之间建立了一一对应.这样就有可能用代数方程表示几何图形.反过来,几何图形也可以表示代数方程.

用代数方法研究几何问题的学问就是解析几何.向量及其代数运算是解析几何中的重要工具,这些知识称为向量代数,向量代数在研究空间直线与平面,以及在力学、物理学中都起着重要的作用.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何的知识对今后学习多元函数微积分同样是非常必要的.

§1 向量代数

1.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间定点 O , 作三条互相垂直的数轴, 它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位. 三条轴分别称为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 统称为坐标轴. 三条轴的正方向要符合右手法则, 即让右手的拇指、食指、中指互相垂直, 三个手指依次表示 z 轴、 x 轴、 y 轴. 如此的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系. 其中点 O 叫坐标原点. 每两个坐标轴所决定的平面称为坐标平面, 分别称为 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面. 这三个平面把整个空间分成了八个部分, 每一部分称为一个卦限. 把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限, 依逆时针顺序得 I, II, III, IV 四个处于 xy 平面上方的卦限, 对应于 xy 平面下方就依次得到 V, VI, VII, VIII 四个卦限(图 7.1).

坐标系最重要的作用就是建立起一个空间中点与三元有序实数组之间的对应关系.

在空间直角坐标系中, 空间中任一点 M 的位置可由它关于坐标轴的相对位置唯一确定. 方法是: 过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面, 这些平面与三个坐标轴的交点分别为 P, Q, R . 设 $OP = x, OQ = y, OR = z$, 则称有序数组 (x, y, z) 为

点 M 的直角坐标, 记为 $M(x, y, z)$ (见图 7.2). x, y, z 称为点 M 的三个坐标分量. 这样, 点 M 就与一个有序数组对应起来. 反之, 任给一个有序数组 (x, y, z) , 我们便可以分别在三个坐标轴上得到点 P, Q, R , 过此三点分别作垂直于 x, y, z 轴的平面, 三个互相垂直的平面交于一点 M , 点 M 就是有序数组 (x, y, z) 所唯一确定的点. 这样, 在空间直角坐标系下, 空间中的点就与由三个数组成的有序数组一一对应了.

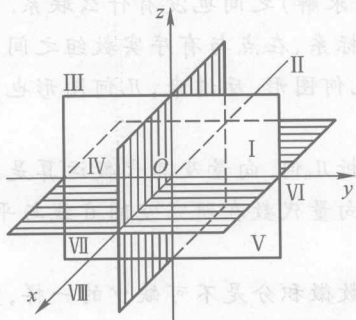


图 7.1

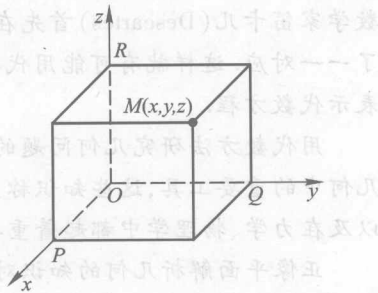


图 7.2

显然, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, 各坐标轴上点的坐标分量至少有两个分量为 0, 如 x 轴上点的坐标是 $(x, 0, 0)$, 各坐标面上点的坐标至少有一个分量是 0, 如 xy 平面上点的坐标是 $(x, y, 0)$.

2. 两点间的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 我们可用两点的坐标来表示它们之间的距离 d , 如图 7.3 所示. 过点 M_1, M_2 分别作垂直于坐标轴的六个平面, 这些平面构成以 M_1M_2 为对角线的长方体. 由立体几何知识, 我们知道

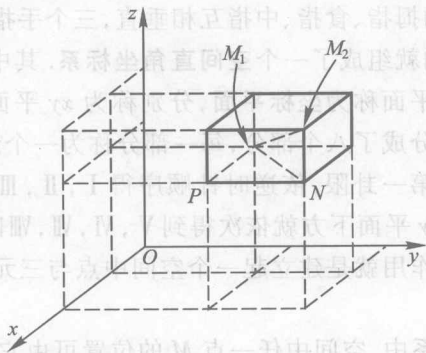


图 7.3

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

所以两点间的距离公式为

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1.2 向量的概念

在实际问题中,有些量只有大小,没有方向,例如时间、长度、质量、面积等.它们在取定一个单位后,可以用一个数来表示.这种量称为**数量**(或**标量**).还有一些量既有大小,又有方向,例如力、速度、加速度等.这种既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

向量可以用有向线段表示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向,如以 M_1 为始点, M_2 为终点的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$.有时也用一个黑体字母来表示向量,例如 \mathbf{a}, \mathbf{b} .

在许多涉及向量的实际问题中,可以不考虑向量的起点位置,只考虑其大小和方向,称这样的向量为**自由向量**.下面讨论的向量,均指自由向量.若向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的方向相同或相反,则称向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 平行,记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;若向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 大小相等且方向相同,则称向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 相等,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.也就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.例如图

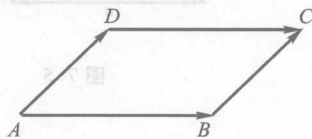


图 7.4

7.4, $ABCD$ 为一平行四边形,我们认为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.因此,一个向量在保持大小、方向都不变的条件下可以自由地平行移动,简称**平移**.以后,为了方便,我们常把向量平移到同一起点来考虑.

向量的大小或长度称为向量的**模**,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 与 $|\mathbf{a}|$.模等于 1 的向量称为**单位向量**.模等于零的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$.零向量没有确定的方向,规定零向量的方向是任意的.在直角坐标系中,以坐标原点 O 为起点,向已知点 M 引向量 \overrightarrow{OM} ,则称此向量为点 M 的**向径**(或**矢径**),常用黑体字母 \mathbf{r} 表示.

设 \mathbf{a} 为一向量,与 \mathbf{a} 的模相等而方向相反的向量叫做 \mathbf{a} 的**反向量**(或**负向量**),记作 $-\mathbf{a}$.

1.3 向量的线性运算

与空间中的点相比,向量有更好的数学性质,因为向量有运算,而点没有,比如,任何两点就没法相加得到一个新的点,点也没有倍数的概念,但向量却有.向

量的性质正是通过各种运算体现出来的.

1. 向量的加减法

力是向量的物理原型. 我们知道, 力的合成可按平行四边形法则或三角形法则进行. 因此, 向量的加法也应遵循同样的法则.

若将向量 b 平移, 使其起点与 a 的终点重合 (图 7.5), 则以 a 的起点为起点、以 b 的终点为终点的向量 c 称为向量 a 与 b 的和, 记作

$$c = a + b.$$

两个向量的加法可以推广到任意有限个向量的情形. 这只需将第一个向量放置好, 然后将其余向量依次首尾相接, 最后, 从第一个向量的起点至最末一个向量的终点的向量就是这些向量的和. 这种求和法称为多边形法则或折线法则.

向量 a 与向量 b 的负向量之和称为 a 与 b 的差, 记作 $a - b$, 即

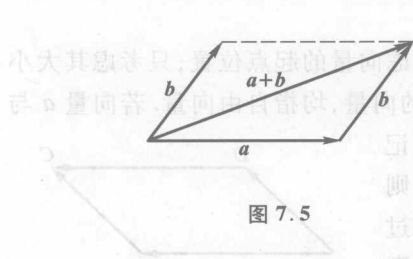


图 7.5

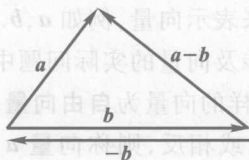


图 7.6

$$a - b = a + (-b).$$

由 $a - b = a + (-b) = (-b) + a$ 及加法的三角形法则, 容易作出向量 $a - b$. 从图 7.6 看出, 若将 a, b 的起点放在一起, 则以 b 的终点为起点、以 a 的终点为终点的向量就是 $a - b$.

任意两个向量之间, 满足三角形不等式, 即有

定理 1.1 设 a, b 为任意两个向量, 则

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

证 当 a 与 b 不平时, 由三角形两边之和大于第三边就可推知不等式成立. 当 a 与 b 平时, $|a + b| = ||a| \pm |b|| \leq |a| + |b|$.

2. 数与向量的乘法

一个实数 λ 与一个向量 a 相乘 (简称数乘) 就得到一个向量 λa , 它与 a 平行且长度是 a 的 $|\lambda|$ 倍. 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的指向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的指向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, λa 为零向量. 由上可知, 零向量与任何数的数乘向量总是零向量. 对于非零向量 a , 任何与它平行的向量 b 都存在唯一实数 λ , 使得 $b = \lambda a$. 对任何向量 a 总有 $1a = a, (-1)a = -a$. 而对任意的实数 λ, μ 和任意的向量 a, b, c , 有以下性质成立.

性质 1 (交换律) $a + b = b + a$.

性质2 (结合律) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

性质3 (零元存在性) $0+a=a+0=a$.

性质4 (负元存在性) $a+(-a)=0$.

性质5 (第一分配律) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.

性质6 (第二分配律) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$.

性质7 (数量结合律) $\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)=(\lambda\mu)a$.

1.4 向量的坐标表示

以上我们用几何方法引进了向量的概念及其线性运算. 几何方法虽然比较直观, 但对于向量的计算并不方便. 为了便于计算, 我们引进向量的坐标表示, 即用一个有序数组来表示向量, 从而可以把向量的运算化为数的运算.

我们先来定义空间中一点在轴上或在平面上的投影.

设 A 是空间中一点, 过点 A 作一垂直于 u 轴的平面 α , 则 α 与 u 轴的交点 A' 称为点 A 在 u 轴上的投影 (图 7.7). 设 B 为空间中一点, 过 B 作垂直于平面 π 的直线 l , 则把 l 与平面 π 的交点 B' 称为点 B 在平面 π 上的投影 (图 7.8).

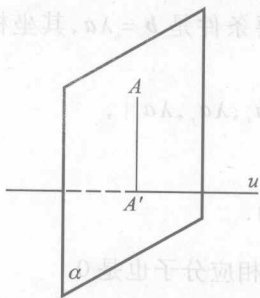


图 7.7

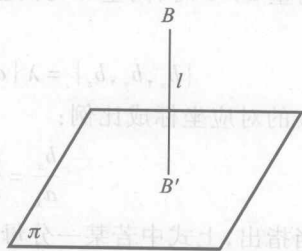


图 7.8

在空间取定直角坐标系 $Oxyz$, 在 x, y, z 轴的正方向上分别取三个单位向量, 记作 i, j, k , 称为坐标向量. 设 a 为空间任一向量, 将它平移, 使其起点在坐标原点 O , 终点在点 $P(x, y, z)$, 并设点 P 在 x, y, z 轴上的投影分别为 A, B, C , 在 xy 平面上的投影为点 M (图 7.9), 则根据向量的加法, 得

$$a = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

而 $\overrightarrow{OA} = xi, \overrightarrow{OB} = yj, \overrightarrow{OC} = zk$, 于是得到

$$a = \overrightarrow{OP} = xi + yj + zk.$$

我们把上式右端称为向量 a 的坐标分解式或坐标表示式, 其中 x, y, z 称为向量 a 的分量.

显然,给定向量 \boldsymbol{a} ,就确定了点 P 及 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 三个分向量,进而确定了 x, y, z 三个有序数;反之,给定三个有序数 x, y, z ,也就确定了向量 \boldsymbol{a} 与点 P .于是点 P 、向量 \boldsymbol{a} 与三个有序数组 $\{x, y, z\}$ 之间就有一一对应的关系:

$$P \leftrightarrow \boldsymbol{a} \leftrightarrow \{x, y, z\}.$$

据此,我们就把有序数 x, y, z 称为向量 \boldsymbol{a} (在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$.

利用向量的坐标,可把向量的加法、减法以及向量与数乘的运算化为数的运算.

$$\text{设} \quad \boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$$\text{即} \quad \boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k},$$

从而

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

当向量 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ 时,向量 \boldsymbol{b} 与向量 \boldsymbol{a} 平行的充要条件是 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$,其坐标表示式为

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda \{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\},$$

即 \boldsymbol{b} 与 \boldsymbol{a} 的对应坐标成比例:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \quad (= \lambda).$$

应当指出,上式中若某一分母为 0,则应认为相应分子也是 0.

例 1.1 (定比分点公式) 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$,在直线 AB 上求点 M ,使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 如图 7.10 所示,由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

$$\text{因此} \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$$

$$\text{从而} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$$

以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A 、点 B 的坐标)代入,即得

$$\overrightarrow{OM} = \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right\}.$$

这就是点 M 的坐标.

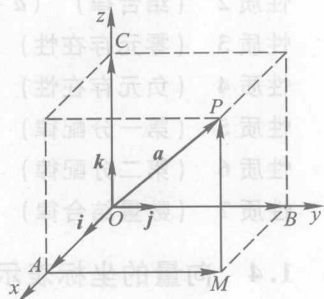


图 7.9

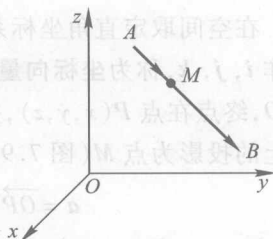


图 7.10

本例中的点 M 叫做有向线段 \overrightarrow{AB} 的 λ 分点. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

1.5 向量的模和方向余弦的坐标表示式

1. 向量的模

设向量 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$, 则由两点距离公式有

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中 $O(0, 0, 0)$ 为 \mathbf{a} 的起点, $P(x, y, z)$ 为 \mathbf{a} 的终点.

2. 方向余弦

定义 1.1 非零向量 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ 与三条坐标轴正向的夹角 (指在 $[0, \pi]$ 之间的那个角) 称为向量 \mathbf{a} 的方向角, 分别记作 α, β, γ . 而把 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦.

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$, 点 P 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影分别为 A, B, C . α, β, γ 为 \mathbf{a} 的方向角 (图 7.11). 因为 $PA \perp OA, PB \perp OB, PC \perp OC$, 所以

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

从这里容易写出方向余弦所满足的关系式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

因为

$$\mathbf{a} = \{x, y, z\} = \{|\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \cos \beta, |\mathbf{a}| \cos \gamma\} = |\mathbf{a}| \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

所以 \mathbf{a} 的单位向量

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

这表明, \mathbf{a} 的方向余弦所组成的向量 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 就是 \mathbf{a} 的单位向量.

3. 方向数

与向量 \mathbf{a} 的方向余弦成比例的一组实数 l, m, n 即

$$\frac{l}{\cos \alpha} = \frac{m}{\cos \beta} = \frac{n}{\cos \gamma},$$

称为向量 \mathbf{a} 的方向数. 设其比值等于 k , 则有

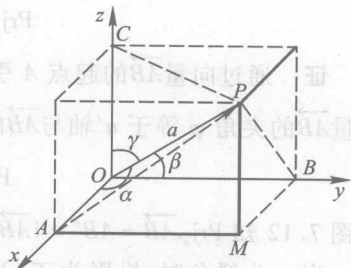


图 7.11

或 $k = \pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. 所以若已知 \boldsymbol{a} 的方向数, 则可求出 \boldsymbol{a} 的方向余弦:

$$\cos \alpha = \frac{l}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \cos \beta = \frac{m}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \cos \gamma = \frac{n}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

其中要同时取正号或同时取负号.

1.6 向量的三种乘积运算

在介绍向量乘积运算之前, 先给出空间中向量 \vec{AB} 在 u 轴上投影的概念.

设向量 \vec{AB} 的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B' , 则 u 轴上的有向线段 $\vec{A'B'}$ 的数值 (记做 $\lambda = A'B'$) 叫作向量 \vec{AB} 在 u 轴上的投影, 记作

$$\text{Prj}_u \vec{AB} = A'B',$$

u 轴称为投影轴. 如果 u 轴的单位向量是 \boldsymbol{e} , 则有 $\vec{A'B'} = \lambda \boldsymbol{e}$.

关于向量的投影, 有下面两个定理.

定理 1.2 向量 \vec{AB} 在 u 轴上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦, 即

$$\text{Prj}_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi.$$

证 通过向量 \vec{AB} 的起点 A 引 u' 轴与 u 轴平行, 且有相同正方向, 则 u 轴与向量 \vec{AB} 的夹角 φ 等于 u' 轴与 \vec{AB} 的夹角, 且有

$$\text{Prj}_u \vec{AB} = \text{Prj}_{u'} \vec{AB}.$$

由图 7.12 知 $\text{Prj}_{u'} \vec{AB} = AB'' = |\vec{AB}| \cos \varphi$, 所以 $\text{Prj}_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$.

当 φ 为锐角时, 投影为正; 当 φ 为钝角时, 投影为负; 当 φ 为直角时, 投影为 0.

容易得知, 相等的向量在同一轴上的投影相等. 读者不难推证如下定理.

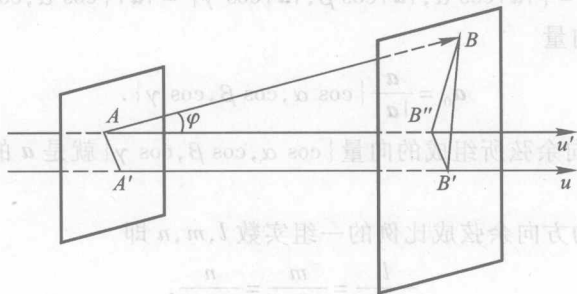


图 7.12 相等向量对其轴投影的相等性

定理 1.3 有限个向量的和在 u 轴上的投影等于各向量在 u 轴上投影的和, 即

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2 + \cdots + \text{Prj}_u \mathbf{a}_n.$$

1. 两向量的数量积

由物理学可知, 一个物体在恒力 \mathbf{F} (大小和方向均不变) 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 , 若以 s 表示位移 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 则力 \mathbf{F} 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |s| \cos(\widehat{\mathbf{F}, s}) = |\mathbf{F}| |s| \cos \theta,$$

其中 θ 为向量 \mathbf{F} 与 s 的夹角.

以此为背景, 我们引进两个向量的数量积.

定义 1.2 向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的模及它们的夹角的余弦的乘积称为向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的数量积, 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

数量积的记号中用一点“ \cdot ”表示乘积, 因此向量间的数量积也叫做向量间的点积 (亦称为内积).

前面讲的功 W 就是力 \mathbf{F} 与位移 s 的数量积, 即

$$W = \mathbf{F} \cdot s.$$

对任意向量 \mathbf{a} , 由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, 因此通常记 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$.

由数量积的定义可得

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

由投影的表达式 $\text{Prj}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 可知

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_a \mathbf{b} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}),$$

或

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_b \mathbf{a} \quad (\mathbf{b} \neq \mathbf{0}),$$

即向量的点积等于一向量的模乘以另一向量在这向量 (设它是非零向量) 上的投影.

规定零向量与任何向量垂直. 不难求出: 两向量垂直 (即 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) 的充要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

读者不难证明数量积满足如下运算律:

(1) 交换律:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

(2) 与数乘的结合律:

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{b} &= \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

(3) 分配律:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}.$$