离散数学丛书

运输网络术

运输网络术

运输网络术

运输网络术

刘彦佩 著

上海交通大学出版社

上海“九五”重点图书
离散数学丛书

运输网络术

Transportation Networks: Theory and Methods

刘彦佩 著

运 输 网 络 术

刘彦佩 著

上海交通大学出版社出版发行
上海市番禺路877号 邮政编码 200030
电话 64281208 传真 64683798
全国新华书店经销
常熟市印刷二厂·印刷
开本:850×1168(mm)1/32 印张:6 字数:152千字
版次:1998年11月 第1版
印次:1998年11月 第1次
ISBN 7-313-01967-X/O·134
定价:11.00元

内 容 提 要

本书通过剖析运输,推广和改进了我国于50年代提出的图上作业法,建立了一种统一的理论——运输网络术.并且,用它成功地解决了在超大规模集成电路(VLSI)设计中的布局、图的定向与划分,以及邮路或巡回路线问题等.由此可以建立有效的算法.同时,还显示了运输网络术在解决拼方、图的着色和曲面嵌入等方面出现的著名难题中的作用.这就说明了纯粹数学与应用数学本乃是一个有机的整体.虽然全书侧重理论分析,但为解决实际问题提供了不少有用的原则.在每章末节,均指出了必要的文献以及有待进一步研究的问题.

本书可作为大专院校理工科高年级学生的教材,同时也可作为科技工作者和中学以上的数理教师的参考书.

离散数学丛书编委会

序

提起运输问题,人们无疑总是把它视为一类典型的线性规划问题.自40年代起就开始受到数学界的注意.翻开当今文献宝库中任何一本着重介绍线性规划的书,多半可以查到关于运输问题的蛛丝马迹.

在50年代,我国数学界对于运输问题的研究也曾风靡一时.它是从研究粮食调运问题引起的.而且,从调运人员的经验中,总结出了具有我国特色的图上作业法.甚至还有专门介绍运输问题在各工业部门应用的一些小册子.不管怎样,关于由运输问题所引起的理论性的研究,以及它对其余问题的影响,却很少有人问津.

本书不打算介绍有关运输问题在文献中已有的诸多方面,而是企图着重讨论从研究运输网络的理论与方法入手,扩展到一些貌似完全不同的领域所引起的新发展.由此,揭示这些研究领域之间的内在联系.

在写法上,我们拟遵从这样的宗旨,主要介绍理论和方法的核心,而不详述证明的细节,以便用较短的篇幅反映更多的内容.同时也为有志作进一步研究的读者,提供一些基本思路.

本书分为九章.第一章介绍一些基本概念.第二章总结运输问题图上作业法的理论支柱,并将它作为本书的基本出发点.虽然,运输问题作为线性规划可以用单纯形方法,或等价地所谓表上作业法(或如西方人士所称的匈牙利方法),但是这些在许多线性规划的书中均可以查到,也就不提了.从第三章到第五章,主要反映本书作者在近几年来研究中的新发现.第六章是介绍我国60年代提出的“中国邮路问题”.它的有效解法也可以看作是图上作业法的直接产物.然而,这一点也许在流行的书中从未见到.最后三章,

即第七章到第九章,显示运输网络术在解决一些数学发展史上出现的难题中的作用.

为了便于读者追本穷源,举一反三,以及有的放矢地重点查阅有关文献,使得能从速掌握本书所述理论与方法,并且进而将它推广和提高,在每章的最后一节中,均提供了一些必要的注记.在那里,还提出了一些有待进一步研究的问题,和尽可能地展示了一些有关的解决途径.

不言而喻,纯粹数学中的理论与方法对于应用数学的一些分支的成型会起重要作用.然而,反之则似乎不是那样顺理成章.本书的最后三章却提供了一些典型实例,表明应用数学中的运输网络术这个电网络的产物,确能在解决纯粹数学的一些著名难题的过程中,从理论和方法上发挥了不可忽视的作用.这就说明了纯粹数学与应用数学本乃是一个有机的整体.

在本书出版之际,我要特别感谢那些在诸方面对本书的形成和出版直接或间接付出代价的单位和个人.没有他们的积极努力甚至默默奉献,本书可能难以及时问世.

在学术上,本书曾作为讨论班的内容系统地讲过.在讨论班上,颜基义教授自始至终都积极参加,并且提出了不少宝贵意见.刘新(博士)、刘莹(博士)、李安平(博士)、欧阳克毅(博士)、黄元秋(博士)、高丽岩以及刘鹰等还分别参加了部分或全部的校对工作.当然,书中现存的任何错处均是我本人的责任.

最后,我还应指出,本书中新的研究成果的取得是与意大利国家研究委员会和我国自然科学基金的资助分不开的.同时,在写作过程中,北方交通大学也给予了大力支持.

刘彦佩

1998 年 7 月

于北京上园村

目　　录

第一章　基本知识 …… 1
§1.1 图 …… 1
§1.2 网络 …… 7
§1.3 规划 …… 14
§1.4 注记 …… 19
第二章　运　输 …… 22
§2.1 运输问题 …… 22
§2.2 最优准则 …… 26
§2.3 图上作业法 …… 31
§2.4 注记 …… 38
第三章　布　局 …… 41
§3.1 布局问题 …… 41
§3.2 布局方程 …… 46
§3.3 布局准则 …… 53
§3.4 注记 …… 58
第四章　定　向 …… 61
§4.1 定向问题 …… 61
§4.2 定向方程 …… 66
§4.3 定向准则 …… 72
§4.4 注记 …… 77
第五章　划　分 …… 79
§5.1 划分问题 …… 79
§5.2 划分方程 …… 85
§5.3 划分准则 …… 88

§5.4 注记 …… 94
第六章 环 游 …… 96
§6.1 环游问题 …… 96
§6.2 环游方程 …… 100
§6.3 环游准则 …… 106
§6.4 注记 …… 112
第七章 拼 方 …… 114
§7.1 拼方问题 …… 114
§7.2 拼方方程 …… 118
§7.3 拼方准则 …… 123
§7.4 注记 …… 128
第八章 着 色 …… 130
§8.1 着色问题 …… 130
§8.2 着色方程 …… 134
§8.3 不可免集 …… 139
§8.4 注记 …… 144
第九章 嵌 入 …… 147
§9.1 一般形式 …… 147
§9.2 商嵌入 …… 152
§9.3 引线问题 …… 158
§9.4 注记 …… 165
名词索引 …… 167
中英对照 …… 167
英中对照 …… 174

第一章　基本知识

§1.1　图

一个图，记为 $G=(V,E)$，就是一个集合 V 和 V 上的一个二元关系 R，使得对于任何 $x,y\in V$ 满足关系 R，记为 xRy，当且仅当 $(x,y)\in E$. 其中，V 被称为 G 的节点集，E 为 G 的边集. V 中的元素被称为节点，E 中的元素为边. 若任何边 $(x,y)\in E$，均有 $(x,y)=(y,x)$，即无序的，则称 G 为无向图. 通常所说的图均指无向图. 若任何 $(x,y)\in E$ 均有 $(x,y)\neq(y,x)$，则称它为有向图. 有向图的边被称为有向边. 常用 $\langle x,y\rangle$ 表示为 x 指向 y 以区别 $\langle y,x\rangle$，即由 y 指向 x.

对于 G 的一条边 $(x,y)\in E$，x 和 y 称为它的端点，并且，可以将它视为由两个半边 $(x,y\rangle$ 和 $\langle x,y)$ 组成. x 被称为与边 (x,y) 和半边 $(x,y\rangle$ 关联，y 为与边 (x,y) 和半边 $\langle x,y)$ 关联. 对于 G 的一个节点 $v\in V$，与 v 关联的半边的数目被称为 v 的次，记为 $\rho(v)$. 因为半边的数目是边数的 2 倍，和在所有节点次之和中，每条半边出现且仅出现一次，从而总有

$$\sum_{v\in E}\rho(v)=2\varepsilon. \tag{1.1.1}$$

其中，$\varepsilon=|E|$ 为 G 的边数，也称为它的度.

若用 $\upsilon=|V|$ 表示 G 的节点数，或称为它的阶. 如果一个节点的次为奇数则称它为奇节点. 否则，为偶节点. 并分别用 V_{od} 和 V_{en} 表示 G 的奇节点和偶节点的集合，和分别用 $\upsilon_{\mathrm{od}}=|V_{\mathrm{od}}|$ 和 $\upsilon_{\mathrm{en}}=|V_{\mathrm{en}}|$ 表示 G 中奇节点和偶节点的数目. 则，由(1.1.1)式，有

$$\sum_{v\in V_{od}}\rho(v)=2\varepsilon-\sum_{v\in V_{od}}\rho(v)=0(\mathrm{mod}\,2). \qquad (1.1.2)$$

由此,即可得

定理 1.1.1 在任何一个图中,它的奇节点的数目 v_{od} 总为偶数.

在图 G 上的一个节点和边的序列

$$S(u,v)=ue_1u_1e_2u_2\cdots u_{l-1}e_lv, \qquad (1.1.3)$$

如果 $e_i\in E,i=1,2,\cdots,l$,使得 $e_i=(u_{i-1},u_i),u_0=u$ 和 $u_l=v$,则称它为连 u 和 v 的一个途径.因为在途径(1.1.3)中,允许 $e_i=e_j,i\neq j$,为区别这种情形,称所有边均互不相同的途径为径.在径上,允许 $v_i=v_j,i\neq j$,称所有节点均互不相同的径为一条路.因为只要 u 和 v 间存在一条途径,或者径均导致在 G 中有连 u 与 v 的路,称两个有路相连的节点为连通的.如果 G 的任何两个节点均是连通的,则称 G 本身也为连通的.若 $u=v$,则这时的途径、径和路 $S(u,v)$,分别称为迂、回和圈.

若图 $H=(V(H),E(H))$使得 $V(H)\subseteq V$ 和 $E(H)\subseteq E$,则称它为图 $G=(V,E)$的一个子图.进而,若还有 $V(H)=V$,则称它为 G 的一个支撑子图.还有一类子图是经常遇到的,称为导出子图.对于 $S\subseteq V$,若 S 中所有 G 的相邻节点对也为 $H(S,E(H))$的相邻节点对,则 H 被称为 G 的节点导出子图.对于边的子集 $S\subseteq E$,若 H 的节点均与 S 在 G 中关联,则 $H=(V(H),S)$ 被称为 G 的边导出子图.导出子图就是这两种子图之总称.

对于图的一种性质 P,假若 H 是 G 的这样的一个子图,使得 H 本身具有性质 P,但 G 的任何一个子图 H_0,只要 $H_0\supset H$,H_0 就不再具有性质 P,则称 H 为 G 对于 P 的极大子图.如果在 G 的具有性质 P 的子图中,H 的阶(或度)最大,则称它为 G 对于性质 P 的阶(或度)最大子图.当然,每一个最大子图,必为对于同一性质的极大子图.反之,一般不成立.

一个图的每一个极大连通图被称为它的分图(或连通片).若

一个图只有一个分图,即它本身,则它当然是连通的.因为任何一个图均是它的所有分图的无公共节点的并,可以只讨论连通图而不失一般性.下面,凡提及图均不言而喻是指连通的.

对于给定的阶,度最小的连通图就是树.容易验证,所有 υ 阶树的度均为 $\upsilon-1$.任何树均连通而且无圈.一个 υ 阶图中的所有极大子树均为支撑树.它们的度均相等,即 $\upsilon-1$.因此,这时极大(子)树皆最大(子)树.通常为简便,称一个图中的最大树为其上的树.对于 G 上的任何一个树,每一条不在树上的边,即非树边,均与这个树恰形成一个圈,并且称它为一个基本圈.由于基本圈的数目与树的选取无关,对于 υ 阶 ε 度的图这个数为 $\varepsilon-\upsilon+1$,则称它为此图的上秩.

对于图 $G=(V,E)$ 的任何一个节点子集 $S\subset V$,如果由 S 和 $\bar{S}=V-S$ 导出的子图,分别记为 $G[S]$ 和 $G[\bar{S}]$,同是连通的,则所有那些 G 的一端在 S 中,而另一端不在 S 中的边组成的集合被称为 G 的一个上圈.设 T 为 G 上的一个树,则 $\bar{T}=(V,E\setminus E(T))$,即由所有非树边在 G 上形成的那个支撑子图,被称为 G 的一个上树.也可以证明,任何 T 上的一条边与上树 $\bar{T}$ 恰形成一个上圈,并称它为 G 的一个基本上圈.又,图中的基本上圈的数目与树,或者由它所决定的上树的选取无关.从而,称它为 G 的秩.当然,υ 阶 ε 度的图的秩为 $\upsilon-1$,亦与 ε 无关.

若 $S\subset V$ 使得 $G-S=G[V-S]$ 不再是连通的,则称 S 为 G 的一个分离(节点)集,若 $|S|=1$,即只含一个节点,则称这个节点为割点.没有割点的连通图被称为块.假若在 G 的任何一个分离集中,节点的个数均不小于 $k\geqslant1$,则称 G 为 k-连通的.由此可见,块均为 2-连通的.对于 G 上两节点 u 和 v,若分离集 S 使得 u 和 v 在 $G-S$ 的不同的分图中,则也称 S 分离 u 和 v.

定理 1.1.2(Menger,1927) 对于图 $G=(V,E)$ 中的任两节点 $u,v\in V$,若记 $\mathscr{P}(u,v)$ 为由连 u 和 v 的无公共内节点的路的集合所形成的族,和 $\mathscr{S}(u,v)$ 为所有分离 u 和 v 的节点子集所形

成的族,则

$$\max\{|\mathbf{P}|\mid \mathbf{P}\in\mathscr{P}(u,v)\}\\=\min\{|S|\mid S\in\mathscr{S}(u,v)\}. \tag{1.1.4}$$

推论 1.1.1　对于一个 k-连通图中的任两节点 u 和 v,均至少有 k 条连 u 和 v 的无公共内节点的路.

图 $G=(V,E)$的一个边的子集 $M\subseteq E$,如果在 M 的边所导出的子图 $G[M]$中,没有一个节点的次大于1,则称 M 为 G 的一个对集.如果 M 是 G 的一个对集,而且 $G[M]$的节点集就是 V,则称它为 G 的一个完满对集.容易验证,假若 $G=(V,E)$有一个完满对集,则对于 G 的任何一个节点子集 $S\subseteq V$,均有

$$|S|\geqslant \mathrm{od}(G-S). \tag{1.1.5}$$

其中,$\mathrm{od}(G-S)$为 $G-S$ 中奇阶分图的数目.因为 G 上有完满对集 M,若要(1.1.5)式取等号,则一端在 S 中和另一端不在 S 中的所有边形成的边集 $E(S)$,必含 M 中所有与 S 关联的边(或者说,在 S 中没有同与它的两节点关联的边在 M 中),而且 $E(S)$的在 M 中的边,必恰与 $G-S$ 的奇阶分图 1-1 对应.进而,还有

定理 1.1.3(Tutte,1947)　一个图 $G=(V,E)$有一个完满对集,当且仅当对任何 $S\subseteq V$ 均有(1.1.5)式成立.

虽然从形式上,用这个定理判定一个图是否有一个完满对集,要检查 V 的所有子集.因为 V 中的子集有 $2^{\nu}(\nu=|V|)$个,即 ν 的一个指数函数.这样看来,似乎不可能通过有效的算法实现.在 ν 阶图上的一个算法之谓*有效的*,是指用它所需用的计算时间不超过 ν 的一个多项式函数.不过,Edmonds 根据这个定理的精神,却发现了一个有效算法,以判定一个图是否有完满对集.

一个图 $G=(V,E)$,若它的节点集可以划分为两个子集 V_1 和 V_2,使得 E 中的边全是一端在 V_1 中和另一端在 V_2 中,则称它为二部图,常记为 $G=(V_1,V_2;E)$.对于任何 $S\subseteq V$,记

$$N(S)=\{v\mid \exists e=(u,v)\in E,u\in S,v\notin S\}.$$

如果对任何 $S\subseteq V_1$,均有

$$|S| \leqslant |N(S)|, \tag{1.1.6}$$

则称二部图 $G=(V_1,V_2;E)$对于 V_1 是扩散的.在 $G=(V_1,V_2;E)$上的一个对集 M,若 V_1 中的任何一个节点均与 M 中的一边关联,则称 M 是包含 V_1 的.

推论 1.1.2　在一个二部图 $G=(X,Y;E)$上,有一个对集是包含 X 的,当且仅当 G 对于 X 是扩散的.

推论 1.1.3　一个二部图 $G=(X,Y;E)$有一个完满对集,当且仅当 G 不仅对 X 而且对 Y 均为扩散的.

若将图的节点视为平面上的点,两个节点之间的一条边,视为平面上以代表此两节点的两点为两端的一条开直线段,则任何一个图均可有这样的一种表示.事实上,只需将所用节点都置于一个圆弧上就可以了.当然,一般情形下,不可避免会出现两条代表边的线段的交叉,即有(至多)一个公共点.

当然,在上述的表示中,也可以用曲线段代替直线段,使得代表边的曲线段之间无公共点,或使得公共点出现的尽可能地少.假若一个图存在这样的一种表示,使得任何两条代表边的曲线均无公共点,则称这个图为*可平面的*.这种无公共点的表示被称为它的一个*平面嵌入*.图的平面嵌入有时也称为*平面图*.因为在平面图中,代表边的曲线间无公共点,无需再约定代表边的曲线段为开的.这时,总是将代表边的曲线段视为闭的,即包含它的两个代表节点的端点.由此,任何平面图对于整个平面的补,为由若干连通的区域组成.每个这种连通区域被称为它的*面*.若记 υ,ε 和 ϕ 分别为一个平面图的节点数、边数和面数,则总有关系

$$\upsilon - \varepsilon + \phi = 2. \tag{1.1.7}$$

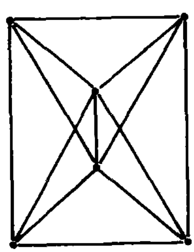
这就是人们熟知的 *Euler* 公式.

不是任何一个图均是可平面的.有两种重要的图,只要阶较大,均不可能是平面的.一种叫作*完全图*,即任何两个节点均相邻(即有边相连)的图.因为它只由阶确定,故总是记为 K_υ.另一种叫作*完全二部图*,即这样的一个二部图,使得任何一个出自那两个不

同节点子集的节点对，均是相邻的.因为它仅由这两个节点子集中的节点数 v_1 和 v_2 所决定，总将它记为 $K_{v_1v_2}$. 可以验证，当$v\geqslant5$时，K_v 全是非可平面的，当 $v_1, v_2\geqslant3$ 时，所有 $K_{v_1v_2}$全是非可平面的.当然 K_5 和 $K_{3,3}$分别为它们的子图.

若两个图 G_1 和 G_2，只要将它们中的连任何两节点 u 和 v 的这样的路$P=uu_1u_2\cdots u_lv$，使得 $u_i, i=1,2,\cdots,l$，在相应图中的次全为 2，均视为边(u,v)，则两个图是一样的，就称 G_1 和 G_2 是同胚的.早在 30 年代初，Kuratowski 就证明了：一个图是可平面的，当且仅当它没有一个子图与 K_5 或 $K_{3,3}$同胚.这就给出了可平面图的一个十分简单明了的刻画.

两个图 G_1 和 G_2，若存在它们的边之间的一个 1-1 映象，使得 G_1 的任何一个圈均相应 G_2 中的一个上圈，则称 G_1 为 G_2 的代数对偶.由于可以证明，若 G_1 是 G_2 是代数对偶，则在此对偶之下 G_2 的任何一个圈也必相应 G_1 的一个上圈.从而，G_2 也为 G_1 的代数对偶.例如，在图 1.1.1 中，(a)所示之图 G_1 是(b)所示之图 G_2 的代数对偶.而且，也容易验证，(b)所示之 G_2 为(a)所示的 G_1 的代数对偶.


(a) G_1

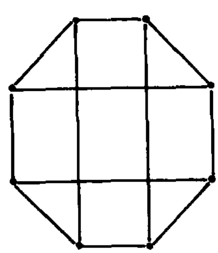

(b) G_2

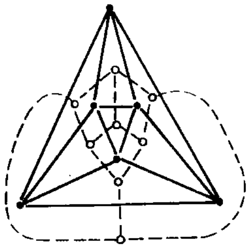
图 1.1.1

然而，并非任何图均有代数对偶.例如，可以验证，K_5 和 $K_{3,3}$均无代数对偶.

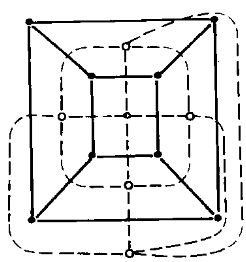
定理 1.1.4(Whitney,1932) 一个图 G 是可平面的，当且仅当 G 有一个代数对偶.

从图 1.1.1 可以看出，那里的 G_1 和 G_2 分别有如图 1.1.2 的 (a)和(b)中所示的平面嵌入 $\mu(G_1)$和 $\mu(G_2)$.

事实上，从它们的平面嵌入中，很容易发现它们是互为代数对偶的. 因为若将它们之一中的每一个面均取一个内点作为代表，并且当两面有一条公共的边界边时，就将它们代表节点之间连一条曲线，使得只通过此两面的内部，而且在公共边界边的一个内点处与这条边界边交叉. 如图 1.1.2 中的虚线所示，即得到相应图的代数对偶. 就此图而言，容易验证，$\mu(G_2)$的代数对偶即为 G_1，和 $\mu(G_1)$的代数对偶即为 G_2. 有时为区别，将这种从一个平面嵌入出发求得的代数对偶称为几何对偶. 从定理 1.1.4 可知，这两个对偶实则无异.



(a) $\mu(G_1)$



(b) $\mu(G_2)$

图 1.1.2

§1.2 网络

设在一个图 $G=(V,E)$的边集 E 上，引进一个权函数 $w(e)$，$e\in E$. 通常，$w(e)\geq 0$ 而且为整数. 则，这样的图被称为带权图.

对于 $G=(V,E)$的一个子图 H,它的权定义为

$$w(H) = \sum_{e\in E(H)} w(e). \tag{1.2.1}$$

若 $\mathscr{H}$为一个子图的给定类,则自然要问,如何求出 $\mathscr{H}$中的一个子图 H_0,使得

$$w(H_0) = \min_{H\in\mathscr{H}} w(H). \tag{1.2.2}$$

这就是所谓最小权子图问题.这个问题的难易程度与 $\mathscr{H}$本身的性质直接相关.而且,差异甚大.

若将 $\mathscr{H}$取为路,则这时的最小权子图问题也被称为最短路问题.一般而言,我们不考虑重边,即两节点有至少两边连接.任何两个不相邻节点之间的最短路,就是连此两节点的路上边本身所导出的子图.总可以假设,从某一给定节点作为始端,到 $A\subseteq V$ 中的所有节点的最短路已经确定.当然,A 可以取自只包括这个始端起.然后,看如何从已知到 A 中所有节点的最短路出发,求出由这个始端到 A 外一个节点的最短路.果能求出,则可以逐步扩大子集 A 直到 $A=V$,即可得从这个始端到所有节点的最短路.

对于图 $G=(V,E)$,$A\subseteq V$,记

$$\mathrm{Ne}(A) = \{e \mid \exists v\in A, e=(u,v)\in E, u\notin V\}.$$

定理 1.2.1(Dijkstra,1959) 设 $\mathrm{short}(v)$,$v\in A$,为从始端到 v 的最短路的长度(即权),和 $u_0\notin A$,使得

$$w(u_0,v_0) = \min_{\substack{(u,v)\in \mathrm{Ne}(A)\\ e=(u,v)}} w(e). \tag{1.2.3}$$

则 $\mathrm{short}(u_0)=w(u_0,v_0)+\mathrm{short}(v_0)$就是从这个始端到 u_0 的最短路长.

由这个定理即可得到求最短路的有效算法.

若取 $\mathscr{H}$为图 G 的所有支撑树的集合,这时的最小权子图问题也被称为最短连接问题,或最小树问题.事实上,只要将定理1.2.1中的集合 A,开始取为 e_0 的两个端点就可以了.这里,e_0 使得

$$w(e_0) = \min_{e\in E} w(e). \tag{1.2.4}$$