精选精编最新试题解析

（高 中）

数 学

修订版

祝厚元 周沛耕
刘彭芝 主编

首都师范大学出版社

精选精编最新试题解析

高中数学

（修订版）

主编　祝厚元　周沛耕　刘彭芝
编者　华黔　张墐　寰尤　曾同

首都师范大学出版社

（京）新208号

图书在版编目（CIP）数据

高中数学／祝厚元等主编.-2版-北京：首都师范大学出版社，1995.7

（精选精编最新试题解析）

ISBN 7-81039-326-X

Ⅰ.高… Ⅱ.祝… Ⅲ.高中-数学课-试题-指导读物 Ⅳ.G634.606

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第06718号

首都师范大学出版社

（北京西三环北路105号 邮政编码100037）

三河科教印刷厂印刷 全国新华书店经销

1995年7月第3版 1995年7月第1次印刷

开本787×1092 1/32 印数 0,001—31,000册

字数 240千 印张 11.75

定价 8.50元

修订说明

《精选精编最新试题解析》丛书自1989年出版及1992年修订以来，多次重印，受到读者欢迎。该书贵在“精”和“新”，为适应近两年高考内容、题量与“稳中有变”的形势，我们组织作者再次进行修订。

修订后的丛书在保留原丛书受读者欢迎特点的前提下，删去陈旧内容，调整、补充了三分之一以上的新内容，其主要变化可归纳为：1.增加了能力考查题和客观试题，以适应近两年来高考“从以考查知识为主向以考查能力为主过渡”，“从主观试题为主向客观试题为主过渡”的特点。2.增加了题目的信息量并给予应试者及时阅读并做出正确判断及解答能力的指导，以适应高考出现的“新情境试题”。3.加强基础知识和基本技能的全方位训练，使基础知识概括化、系统化、灵活化。4.准确地针对教学中的重点、难点，选择典型例题进行审题、解题方法的训练。为了方便读者，书末附有习题答案。5.原丛书14本，因生物和地理大多数地区不考，故此次只修订其中的12本。

本丛书由北京大学附属中学、清华大学附属中学、人民大学附属中学、首都师范大学附属中学、北京101中学和科大附中工作在教学第一线富有教学经验的高级教师和一级教师编写。

愿此次修订的《精选精编最新试题解析》丛书对广大师生的教与学提供更为有效的帮助。新修订的本套丛书得到了首

都师范大学出版社的大力支持和帮助，在此一并致谢。

编　者

1995年5月

目　录

第一篇　代　　数

第一章　函　　数

集合、对应、映射、函数、反函数的概念；函数的对应关系、定义域和值域；函数的奇偶性、单调性、周期性；函数图象：$\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D(f)\}$的画法；幂函数、指数函数、对数函数的性质，图象及其在解题中的应用都是本章的重点内容，必须熟练掌握。

例1　设全集$I=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，集合$A=\{0,1,2,3,\}$，集合$B=\{2, 3, 4\}$，求$\bar{A} \cup \bar{B}$和$C=\{x \mid x \in B$且$x \overline{\in} A\}$。

解　$\because \bar{A}=\{4\}$，$\bar{B}=\{0, 1\}$，故$\bar{A} \cup \bar{B}=\{0, 1, 4\}$，而集合$C=\bar{A} \cap B=\{4\}$。

例2　如果函数$f(x)=x^2+bx+c$对任意实数t都有$f(2+t)=f(2-t)$，那么（　　）。

（A）$f(4)<f(2)<f(1)$　　（B）$f(1)<f(2)<f(4)$

（C）$f(2)<f(4)<f(1)$　　（D）$f(2)<f(1)<f(4)$

解　选（D），这是因为对任意x若函数$f(x)$满足$f(a+x)=f(b-x)$时，有下面的关系：

（1）若$a=b$，则函数$f(x)$的图象关于$x=a$对称；

（2）当$a \neq b$时，函数$f(x)$的图象关于$x=\frac{a+b}{2}$对称。

现在$f(2+t)=f(2-t)$　$(x\in R)$，故知$f(x)=x^2+bx+c$有对称轴：$x=2$且当$x\geqslant 2$时此二次函数$f(x)$递增，所以$f(2)<f(3)<f(4)$，而由对称性$f(3)=f(1)$，故选(D)。

例3　已知函数$y=f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ $(x\in[-3,\ 0])$，求它的反函数$f^{-1}(x)$；分别画出$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图象，并说明二者之间的关系。

解　$\because y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$，$x\in[-3,\ 0]$，

$$\therefore x^2=9-\frac{9}{4}y^2，\text{又}\because x\leqslant 0，$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}，\ y\in[0,\ 2]，$$

$$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}，\ x\in[0,\ 2]。$$

$f(x)$和$f^{-1}(x)$的图象分别是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$和$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$在第二象限和第四象限内含端点的二条弧。它们关于直线$y=x$对称。

注　(i)当反解方程$y=f(x)$时，若x无唯一解，则反函数$x=f^{-}(y)$不存在。

(ii)当反函数存在时，解析式中必须注明其定义域。

(iii)要注意反函数的两种表达形式：$x=f^{-1}(y)$和$y=f^{-1}(x)$表示的是同一定义域上的同一函数关系(区别只是后者是"从习惯"：将因变量用y表示，自变量用x表示而已！)。

(iv)$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象在形式上是同一曲线，但变量x、y的含义不同：前者x是自变量，y是因变量；而在

后者正好相反。

$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图象关于$y=x$对称，其中x表示自变量，y表示因变量。

$y=f^{-1}(x)$与$x=f^{-1}(y)$都是$y=f(x)$的反函数，但图象却是关于直线$y=x$对称。

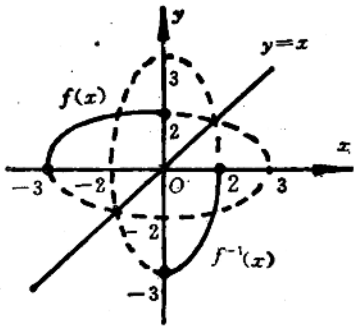


图 1-1-1

例4 设有三个函数，第一个是$y=\varphi(x)$，它的反函数就是第二个函数，而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线$x+y=0$对称，那么第三个函数是（　　）。

（A）$y=-\varphi(x)$；　　（B）$y=-\varphi(-x)$；

（C）$y=-\varphi^{-1}(x)$；　　（D）$y=-\varphi^{-1}(-x)$。

解 易知第二个函数是$x=\varphi(y)$，根据曲线$f(x,\ y)=0$，关于直线$y=-x$对称的曲线是$f(-y,\ -x)=0$(即将原方程中的x、y代之以$-y$、$-x$即可)的解析几何知识，可知第三个函数应是$-y=\varphi(-x)$，即$y=-\varphi(-x)$，故选(B)。

例5 设$f(x)$、$g(x)$互为反函数，且$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，求证$g(m\cdot n)=g(m)+g(n)$。

证明 设$y=f(x)$，则$x=f^{-1}(y)=g[f(x)]$，

$\therefore$　$m=g[f(m)]$，$n=g[f(n)]$。　　(1)

又$\because$　$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，

$\therefore$　$m+n=g[f(m+n)]=g[f(m)\cdot f(n)]$　　(2)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{由(1)} & m+n=g[f(m)]+g[f(n)]\\ \text{由(2)} & m+n=g[f(m)\cdot f(n)]\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$\therefore$　$g[f(m)\cdot f(n)]=g[f(m)]+g[f(n)]$。

以m、n分别替换$f(m)$和$f(n)$，$\therefore g(m\cdot n)=g(m)+g(n)$。

注 设$y=f(x)$有反函数$y=g(x)$，则有$x=f^{-1}(y)=g(y)$，$\therefore x\equiv g[f(x)]$；同样$y\equiv f[g(y)]$。有关反函数的证论题，往往需用此关系。

例6 设函数$g=f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x^2-2x+3$，试求$f(x)$在R上的解析式，并画出它的大致图象。

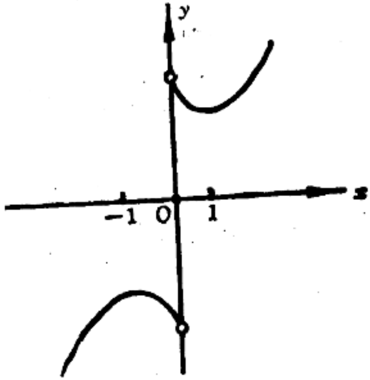


图 1-1-2

解 $\because$ $f(x)$是R上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，当$x=0$时，就有$f(0)=0$。

当$x<0$时，$\because -x>0$，$\therefore f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2-2(-x)+3]=-x^2-2x-3$（$\because x>0$，$f(x)=x^2-2x+3$）。

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3, & (x>0)\\ 0, & (x=0)\\ -x^2-2x-3. & (x<0)\end{cases}$$

图象如图1-1-2

例7 证明：定义在对称区间$(-l,l)$内的任何函数$f(x)$，必可表示成偶函数$H(x)$与奇函数$G(x)$之和的形式，且这种表示法是唯一的（其中$l>0$）。

证明 (i) 设$H(x)=[f(x)+f(-x)]/2$，$G(x)=[f(x)-f(-x)]/2$，则$H(x)$、$G(x)$分别为$(-l,l)$上的偶函数和奇函数，且满足$f(x)=H(x)+G(x)$。

(ii)若上述$H(x)$与$G(x)$的表达式不唯一，设存在偶函数$H'(x)\neq H(x)$，奇函数$G'(x)\neq G(x)$，有

$$f(x)=H'(x)+G'(x)$$

$\therefore$ $$H(x)-H'(x)=G'(x)-G(x) \qquad (1)$$

以$-x$代x，又有

$$H(x)-H'(x)=G(x)-G'(x) \qquad (2)$$

由（1），（2）$\therefore H(x)=H'(x)$，$G(x)=G'(x)$。

此与$H(x)$、$G(x)$表达不唯一的假设矛盾，$\therefore$原结论真。

例8 若$F(x)$是奇函数，讨论$G(x)=F(x)\cdot\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$的奇偶性和单调性。

解 $\because G(-x)-G(x)=F(-x)\cdot\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)-F(x)\cdot\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-F(x)\cdot\left(\frac{1-a^x}{a^x-1}+1\right)=0$，$\therefore G(x)=G(-x)$，故$G(x)$是偶函数，而偶函数在其定义域上不是单调函数。

注 在判定函数$f(x)$的奇偶性时，请注意：

$f(-x)=-f(x)\Longleftrightarrow f(-x)+f(x)=0$；

$f(-x)=f(x)\Longleftrightarrow f(-x)-f(x)=0$。

有时用右边的等价关系判定函数的奇偶性，可以大大减少计算量。

例9 已知函数$f(x)$定义域为R，对任意$x\in$R都有$f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，则$f(x)$是周期函数。

证明 $\because f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，$x\in$R

$\therefore f(x+1)=f(x)+f(x+2)=f(x)+f(x+1)+f(x+3)$

$\therefore$ $$f(x)+f(x+3)=0 \qquad (1)$$

以$x+3$代x，$\therefore f(x+3)+f(x+6)=0 \qquad (2)$

由（1）（2），$\therefore f(x)=f(x+6)$　$(x\in\mathrm{R})$。

$\therefore$　$f(x)$是以6为一个周期的周期函数。

例10　a，m是实数，$x=2^m+2^{-m}$，a是常数，$y=4^m+4^{-m}-2a(2^m+2^{-m})$，求$y$的最小值。

解　$\because y=(2^m+2^{-m})^2-2a(2^m+2^{-m})-2$，由于$x=2^m+2^{-m}$，则$x\geqslant2$，$y=x^2-2ax-2$。

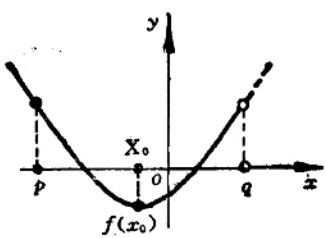
（1）若$a\geqslant2$，则$x_{顶}=a\geqslant2$在定义域中，$\therefore$当$x=a$时，$y_{\min}=-(a^2+2)$；

（2）若$a<2$，$\because x_{顶}<2$，$\therefore$当$x\geqslant2$时，定义域位于函数$y=x^2-2ax-2$的单调增区间，$\therefore$当$x=2$时，$y_{\min}=f(2)=2^2-4a-2=2-4a$。

注　求二次函数$y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$的最值时，一定要注意它的定义域D(f)：

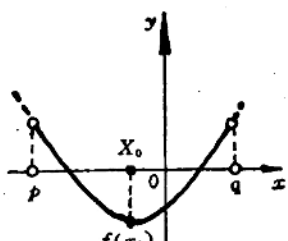
(i) 当$\mathrm{D(f)}\in\mathrm{R}$，$f(x_{顶})$是一个最值；

(ii)当$\mathrm{D(f)}\in[p,\ q]$，且$x_{顶}\in[p,\ q]$，则$f(x_{顶})$是一个最值，且有另一最值在端点p或q处取到。（可比较$f(p)$、$f(q)$的大小决定。）若$x_{顶}\overline{\in}[p,\ q]$，则$f(p)$，$f(q)$是两个最值。



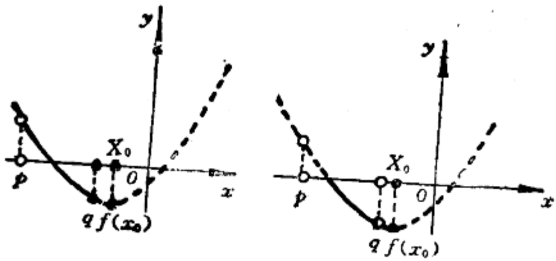
$\mathrm{D(f)}=[p,\ q)$，$x_0\in[p,\ q)$

二个最值



$\mathrm{D(f)}=(p,\ q)$，$x_0\in(p,\ q)$

一个最值



$D(f)=(p,\ q]$，$x_0\overline{\in}(p,\ q]$　　$D(f)=(p,\ q)$，$x_0\overline{\in}(p,\ q)$

一个最值　　　　　　　　无最值

图　1-1-3

(iii)当D(f)是开区间，半开区间的情况，最值可能是$f(x_{顶})$(若$x_{顶}\in D(f)$)，也可能是f(端)。具体情况要具体讨论。以$a>0$为例，参见图1-1-3。

例11　已知$f(x)=x^2+ax+b$，a、$b\in R$，$A=\{x|x=f(x),\ x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],\ x\in R\}$。

（1）若$a=1$，$b=2$，求$A\cup B$、$A\cap B$；

（2）若$A=\{-1,\ 3\}$，求B；

（3）若$A=\{a\}$，求a的值。

解　设$x_0\in A$，则$x_0=f(x_0)\Longrightarrow x_0=f[f(x_0)]\Longrightarrow x_0\in B$，$\therefore A\subseteq B$。故$A\cup B=B$，$A\cap B=A$。

（1）当$a=1$，$b=2$时，$\because$方程$x=x^2+x+2$，即$x^2+2=0$无实根，$\therefore A=\phi$；

又$\because$方程　$x=(x^2+x+2)^2+(x^2+x+2)+2$，

即　　　$(x^2+x+2)^2+x^2+4=0$，

显然无实根，$\therefore B=\phi$。

（2）若$A=\{-1,\ 3\}$，$\therefore$方程$x=x^2+ax+b$，即$x^2+(a$

$-1)x+b=0$，由韦达定理$b=-3$，$a=-1$。

又∵ 方程$x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$，即 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$，∴ $x=\pm(x^2-x-3)$，∴ $x^2=3$ 或 $(x+1)(x-3)=0$，故$x=\pm\sqrt{3}$或$x=-1$或3。

∴ $B=\{-1, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$。

（3）∵$x^2+ax+b=x$有实根a，且只有实根a，∴a是重根。

$$\therefore \begin{cases} a^2+a^2+b-a=0 \\ a\cdot a=b \\ a+a=-(a-1) \end{cases} \Longrightarrow a=\frac{1}{3}.$$

例12 已知$f(e^x+1)=2e^x+1$，$\varphi(\lg x)=\lg\frac{x^2}{10}$，$f(x)$与$\varphi(x)$是否同一函数？

解 ∵ $f(e^x+1)=2e^x+1=2(e^x+1)-1$，

∴ $f(x)=2x-1$，$x\in(1, +\infty)$。

$\varphi(\lg x)=\lg\frac{x^2}{10}=2\lg x-1$，∴ $\varphi(x)=2x-1$，$x\in \mathrm{R}$

（∵ $\lg x\in \mathrm{R}$）

尽管f，φ的表达式相同，但定义域不同，故不是同一函数。

例13 若干个至少具有以下三性质之一的幂函数：（1）是奇函数；（2）是R 上的增函数；（3）函数图象经过坐标原点。已知具性质（1）的函数有12个，具有性质（2）的有10个，具有性质（3）的有14个。求1）这些幂函数共有多少个？2）这些幂函数中，幂指数小于零的有几个？

解 1）设分别符合题设的三个条件的幂函数的集合是A、B、C。依题意，$n(A)=12$，$n(B)=10$，$n(C)=14$。设

某幂函数 $x^{\alpha}\in B$，∴ x^{α}是R上的一个增函数．∵ 第四象限无幂函数图象，∴ x^{α}必是一、三象限内的幂函数，又是增函数，故知$x=0$有意义，且 x^{α} 是奇函数，∴ $x^{\alpha}\in A\cap C$，∴ $B\subseteq A\cap C$*．反之若某幂函数x^{β}是过原点的奇函数，即$x^{\beta}\in A\cap C$，同样由于第四象限无幂函数图象，∴ x^{β}是第一三两象限的幂函数，又∵ 它过原点，∴ x^{β}还是增函数，∴ $x^{\beta}\in B$，$\Longrightarrow A\cap C\subseteq B$**．由 *，**，∴ $B=A\cap C$，∴ $A\cup B=A$。

又∵ $n(A\cup B\cup C)=n(A\cup C)=n(A)+n(C)$
$-n(A\cap C)$
$=n(A)+n(C)-n(B)=12+14-10=16$(个)，

故所求幂函数共16个。

2）当幂函数是负数时，∵ 图象不过原点，∴ 该函数$\overline{\in}C$，故这类函数的个数是 $16-14=2$(个)。

例14 设减函数$y=f(u)$定义于D，$u=\varphi(x)$是 D' 上的增函数，Z是$\varphi(x)$的值域且$Z\subseteq D$，求证 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在D'上的减函数。

证 任取x_1、$x_2\in D'$且$x_2>x_1$，由题意，∵ $u=\varphi(x)$是D'上的增函数，∴ $u_2=\varphi(x_2)>u_1=\varphi(x_1)$。又 $y=f(u)$是 D 上减函数且$Z\subseteq D$(∴ $y=f(u)$也是 Z 上的减函数)，∵ $u_2>u_1$，∴ $y(u_2)<y(u_1)$，即 x_1、$x_2\in D'$且 $x_1<x_2$ 时，有$f[\varphi(x_2)]<f[\varphi(x_1)]$，∴ 在$D'$上，$f[\varphi(x)]$是减函数。

注 有关复合函数单调性问题可简记为"同增、异减"，即若内外两层函数的单调性一致时，最终函数是定义域上的增函数，否则便是减函数。

例15 设$f(x)$是定义在区间（$-\infty$，$+\infty$）上以2为周期的函数，对$k\in$Z，用 I_k 表示区间$(2k-1，2k+1]$。已知

$x \in I_0$ 时，$f(x)=x^2$．（1）求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式；（2）对自然数k，求集合 $M_k=\{a\,|$ 使方程 $f(x)=ax$ 在I_k上有两个不相等的实根$\}$．

解　（1）∵　$f(x)$是以2为周期的函数，∴　当$k\in Z$时，$2k$是$f(x)$的周期，∵　$x\in I_k$时，$x-2k\in I_0$：$(-1,1]$．∴　$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$，即对$k\in Z$，当$x\in I_k$时，$f(x)=(x-2k)^2$．

（2）欲使$f(x)$在区间$I_k(k\in N)$上恰与直线 $y=ax$有两个不同交点，如图1-1-4显见，只须直线 $y=ax$ 夹在直线OA和 x 轴之间，即$0<a\leqslant\dfrac{(2k+1-2k)^2}{2k+1}=\dfrac{1}{2k+1}$　$(k\in N)$

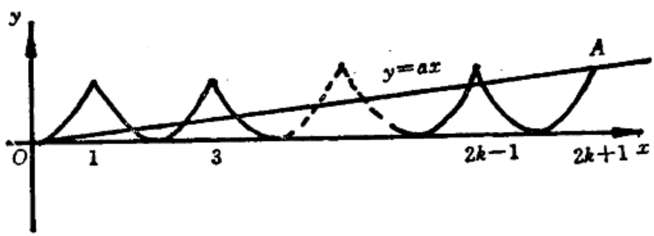


图　1-1-4

下面，我们证明方程 $(x-2k)^2=ax(*)$(其中 $k\in N$)在区间I_k恰有两个不等实根．

$*$即　$x^2-(4k+a)x+4k^2=0$，$\Delta_x=a(a+8k)$，当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}(k\in N)$时，$\Delta>0$，方程$*$有两根 $\dfrac{4k+a\mp\sqrt{\Delta}}{2}$．

设$f(x)=x^2-(4k+a)x+4k^2$．

∵　这两根在区间$(2k-1,\ 2k+1]$$(k\in N)$的充要条件是$a$满足：

$$\begin{cases} a(a+8k)>0 \quad (\text{或} f(x_{\text{顶}})<0), \\ f(2k-1)>0 \\ f(2k+1)\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$$

$$\therefore \quad M_k=\left\{a \mid 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1},\ k\in \mathrm{N}\right\}.$$

例16 设$f(x)=x^2\log_2\dfrac{4(t+1)}{t}+2x\log_2\dfrac{2t}{t+1}+\log_2\dfrac{(t+1)^2}{4t^2}$，在定义域R上恒正，求$t$的取值范围。

解 显然$\dfrac{t+1}{2t}>0$，才能使$f(x)$有意义，由于$x\in\mathrm{R}$，$f(x)>0$恒正，

$$\therefore \quad x^2\log_2\frac{8(t+1)}{2t}+2x\log_2\frac{2t}{t+1}+2\log_2\frac{t+1}{2t}>0$$

$$\Longleftrightarrow\left(3+\log_2\frac{1+t}{2t}\right)x^2-2x\log_2\frac{t+1}{2t}+2\log_2\frac{t+1}{2t}>0$$

$\Longleftrightarrow 3x^2+(x^2-2x+2)\log_2\dfrac{1+t}{2t}>0$恒成立。

$\because \quad x^2-2x+2>0,\ -3x^2/(x^2-2x+2)\leqslant 0,$

$\therefore \quad \log_2\dfrac{1+t}{2t}>\dfrac{-3x^2}{x^2-2x+2}$恒成立，只须$\log_2\dfrac{1+t}{2t}>0$即可，即只须$\dfrac{1+t}{2t}>1$即可，解之得：$0<t<1$。

注 如果已知函数$\varphi(t)$恒大于$f(x)$，又已知$f(x)$的最大值是M，则欲求t的变化范围，只须解不等式$\varphi(t)>M$。类似地，若已知$\varphi(t)$恒小于$f(x)$，而$f(x)$的最小值为m，欲求