普通高等教育“十一五”规划教材

线性代数

（第三版）

■ 何苏阳 吕巍然 王子亭 主编

中国石油大学出版社

普通高等教育“十一五”规划教材

线 性 代 数

（第三版）

何苏阳　吕巍然　王子亭　主编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/何苏阳等主编.—3版.—东营:中国石油大学出版社,2008.3

ISBN 978-7-5636-2559-8

Ⅰ.线… Ⅱ.何… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第032426号

书　　名: 线性代数(第三版)

作　　者: 何苏阳　吕巍然　王子亭

责任编辑: 宋秀勇(电话　0546—8392139)

封面设计: 九天设计

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257062)

网　　址: www.uppbook.com.cn

电子信箱: yibian8392139@163.com

排 版 者: 中国石油大学出版社排版中心

印 刷 者: 东营市新华印刷厂

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话　0546—8392563)

开　　本: 180×235　印张:14　字数:282千字

版　　次: 2008年8月第1版第1次印刷

定　　价: 19.80元

第三版前言

本书的第二版自2004年出版以来，受到了同行的教师和学生的认同，认为内容体系安排较为合理，也指出了某些方面的不足。因此在这次修订中，我们对教材体系未加变动，主要是做了如下工作：

1. 为了更加便于读者自学，增加了各章内容小结。

2. 对习题安排作了较大的调整，除了每一章各小节后的习题外，我们将每一章末的总习题分成了A、B两类题，其中A类题为思考题、填空题和单项选择题，B类题为计算证明题，这两类习题均有一定的难度。在书末的附录中给出了自2000年至2007年的硕士研究生入学试题中的线性代数部分的题目。

3. 在内容上，针对线性代数考研大纲的要求，作了少量补充。

4. 扩充了数学试验的内容，目的是让读者学会用MATLAB软件做线性代数的计算。

中国石油大学出版社十分关心本书的再版工作，在此谨表示衷心的感谢。

编　者

2008年2月

再版前言

本书初版自2000年出版以来，已经作为教材使用过多次，这次我们根据在教学中积累的一些经验和同行们提出的改进意见，将其中部分内容做了修订。

在修订过程中，我们主要作了如下调整和更新：

1. 对原书体系作了适当调整，如将矩阵的秩的概念由原来的第三章提前至第二章，并紧接着介绍初等变换不改变矩阵秩的结论，这样处理的好处是分散了难点，也降低了难度。

2. 修订版中适当增加了部分内容（其中有些打了 * 号），比如行列式计算的拉普拉斯法则，线性空间中的一些结论等，这是为了更好地适应目前工科数学要"理化"的趋势，以及读者考研的需要。

3. 增加了一些例题和习题。为了便于教学，将习题分为了两大类：一类列于每章的各小节之后，这类习题可作为课外作业使用；另一类列于每一章之后，其难度较前者稍大一些，主要供读者进一步加深、提高使用。

4. 为扩大知识面和增加读者对线性代数的应用背景的了解，我们给出了若干选读内容，分列于各章之后，这部分内容主要是供读者自己阅读。

讲授本书第一至五章中不含 * 号部分的内容约需32课时，讲完全书约需48课时。

编者对宋光兴教授、张爱芹副教授提出的宝贵意见深表感谢，此外还要感谢数学与计算科学学院领导和石油大学出版社对本书的关心和扶植。

编　者

2004年4月

目 录

第1章 n阶行列式 …… (1)
1.1 排列的逆序数与对换 …… (1)
1.1.1 全排列及其逆序数 …… (1)
1.1.2 排列的对换及其性质 …… (2)
习题1.1 …… (2)
1.2 n阶行列式的定义 …… (2)
1.2.1 二阶、三阶行列式 …… (2)
1.2.2 n阶行列式的定义 …… (3)
1.2.3 行列式的列顺序表示 …… (5)
习题1.2 …… (6)
1.3 行列式的性质 …… (6)
习题1.3 …… (10)
1.4 行列式按行(列)展开(降阶法) …… (11)
1.4.1 按一行(列)展开 …… (11)
*1.4.2 按k行(k列)展开——拉普拉斯(Laplace)定理 …… (16)
习题1.4 …… (17)
1.5 克莱姆法则 …… (18)
1.5.1 克莱姆法则 …… (18)
1.5.2 齐次线性方程组 …… (20)
习题1.5 …… (21)
第1章小结 …… (22)
总习题一 …… (22)
选读 行列式计算的常见方法 …… (26)
第2章 矩阵 …… (33)
2.1 矩阵及其运算 …… (33)
2.1.1 线性变换与矩阵 …… (33)
2.1.2 矩阵的运算 …… (35)
习题2.1 …… (41)
2.2 逆阵 …… (43)
习题2.2 …… (46)

2.3 分块矩阵……(47)
习题 2.3 ……(50)
2.4 初等变换与初等矩阵……(51)
2.4.1 矩阵的初等变换 ……(51)
2.4.2 初等矩阵 ……(51)
习题 2.4 ……(55)
2.5 矩阵的秩……(56)
2.5.1 矩阵的秩 ……(56)
2.5.2 线性方程组与系数矩阵的秩 ……(56)
习题 2.5 ……(62)
第 2 章小结 ……(62)
总习题二 ……(63)
第 3 章 向量组的线性相关性和秩 ……(67)
3.1 向量及其线性相关性……(67)
3.1.1 向量及其运算 ……(67)
3.1.2 向量的线性相关性 ……(67)
习题 3.1 ……(72)
3.2 线性相关性的判定定理……(73)
习题 3.2 ……(75)
3.3 向量组的秩和最大无关组……(76)
3.3.1 向量组的等价 ……(76)
3.3.2 向量组的秩和最大无关组 ……(77)
3.3.3 向量组的秩与矩阵秩的关系 ……(78)
习题 3.3 ……(80)
3.4 向量空间……(81)
习题 3.4 ……(85)
第 3 章小结 ……(85)
总习题三 ……(86)
第 4 章 线性方程组 ……(90)
4.1 齐次线性方程组……(90)
习题 4.1 ……(95)
4.2 非齐次线性方程组……(95)
习题 4.2 ……(100)
第 4 章小结 ……(101)
总习题四……(101)

第5章 相似矩阵及二次型 …… (106)
5.1 向量的内积 …… (106)
5.1.1 向量的内积和长度 …… (106)
5.1.2 向量组的正交规范化 …… (106)
5.1.3 正交矩阵 …… (109)
习题5.1 …… (109)
5.2 方阵的特征值和特征向量 …… (110)
习题5.2 …… (114)
5.3 相似矩阵与矩阵的对角化 …… (114)
5.3.1 相似矩阵 …… (114)
5.3.2 矩阵的对角化 …… (115)
习题5.3 …… (118)
5.4 实对称矩阵的相似矩阵 …… (118)
习题5.4 …… (121)
5.5 二次型及其标准形 …… (122)
习题5.5 …… (126)
5.6 化二次型为标准形的其他方法 …… (127)
5.6.1 配方法 …… (127)
*5.6.2 初等变换法 …… (128)
5.7 正定二次型 …… (131)
习题5.7 …… (133)
第5章小结 …… (134)
总习题五 …… (135)
第6章 线性空间与线性变换 …… (138)
6.1 线性空间的概念 …… (138)
6.1.1 线性空间的定义 …… (138)
6.1.2 线性空间的性质 …… (140)
6.1.3 子空间 …… (141)
习题6.1 …… (142)
6.2 线性空间的维数、基与坐标 …… (142)
6.2.1 维数、基与坐标 …… (142)
6.2.2 基变换与坐标变换 …… (144)
习题6.2 …… (147)
6.3 线性变换的概念 …… (148)
6.3.1 线性变换的定义 …… (148)

6.3.2 线性变换的性质与运算 …… (149)
习题 6.3 …… (150)
6.4 线性变换的矩阵表示 …… (151)
习题 6.4 …… (158)
第 7 章 线性代数 MATLAB 实验 …… (159)
7.1 MATLAB 基本知识介绍 …… (159)
7.1.1 概 述 …… (159)
7.1.2 MATLAB 基础知识介绍 …… (159)
7.1.3 MATLAB 的编程 …… (164)
7.2 基于 MATLAB 的线性代数实验 …… (165)
7.2.1 实验 1—矩阵和行列式的基本运算 …… (165)
7.2.2 实验 2—初等变换及线性相关性 …… (167)
7.2.3 实验 3—矩阵的秩与 n 维向量空间 …… (169)
7.2.4 实验 4—特征值和特征向量 …… (171)
7.2.5 实验 5—解线性方程组 …… (173)
7.2.6 实验 6—线性空间与线性变换 …… (175)
第 7 章小结 …… (176)
附录 A 线性代数常用数学名词英汉对照 …… (178)
附录 B 2000～2007 年研究生入学试题线性代数部分 …… (181)
附录 C 习题答案和提示 …… (194)

第 1 章　n 阶行列式

1.1　排列的逆序数与对换

1.1.1　全排列及其逆序数

引例　用 1,2,3 三个数字可以组成多少个没有重复的三位数？

解　这相当于说把三个数字分别放在百位、十位与个位，有几种不同的放法？显然，百位上可以从 1,2,3 三个数字中任选一个，所以有 3 种放法，十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有 2 种放法. 而个位上只有 1 种放法. 因此，共有 6 种放法.

在数学上把考察的对象叫做元素，例如上例中的数字 1,2,3 叫做元素. 上述问题就是：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

类似地考虑 n 个元素的情况，把 n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法. 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列，n 个不同元素的所有排列的种数为

$$P_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 = n!.$$

对于 n 个不同的元素，规定各元素之间有一个标准顺序，当两个元素的先后顺序与标准顺序不同时，就说有 1 个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个**排列的逆序数**. 逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为一个 n 级排列，并规定从小到大为标准顺序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，将每个元素依次向前比较，则可计算排列的逆序数. 考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果排在它前面且大于它的元素的个数为 t_i，则称元素 p_i 的逆序数为 t_i. 全体元素的逆序数之和

$$t = t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数. 简言之，依次向前比较求出各元素的逆序数，然后累加.

例 1　求排列 32514 的逆序数.

解　$t(32514)=0+1+0+3+1=5.$

例 2　求排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数，并判别奇偶性.

解　$t(n(n-1)\cdots21)=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，

当 $n=4k+1,4k+4$ 时，为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时，为奇排列，其中 $k=0,1,2,\cdots$.

1.1.2 排列的对换及其性质

在一个排列中，将其中某两个元素的位置对调，而其余元素不动，这种作出新排列的过程叫做**对换**，将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性(对换改变排列的奇偶性).

证 先证相邻对换的情形. 设排列为 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$，对调 a 与 b 后，变为 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数在对换后并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情况. 设排列为 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，先作 m 次相邻对换将其调成 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再作 $(m+1)$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$. 即经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 调成了排列 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为零)，因此知推论成立.

习 题 1.1

1. 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性：

(1) 542163；

(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$.

2. 选择 i,j 使排列 $6i51j4$ 为偶排列.

3. 设排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 t，试求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数.

4. 证明：在所有的 n 级排列中，奇偶排列各占一半.

1.2 n 阶行列式的定义

1.2.1 二阶、三阶行列式

观察二阶行列式和三阶行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{2}$$

二阶、三阶行列式的上述计算法也称为**“对角线法则”**,以下我们着重分析三阶行列式. 注意到(2)式右边的每一项皆为三个元素的乘积,并且这三个元素是位于不同行不同列的. 任意一个乘积项除符号外均可表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,每个乘积项的元素按第 1 个下标(行标)排成标准顺序,第 2 个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,其符号可用 $(-1)^t$ 表示,其中 t 为列标排列的逆序数. 由上知,三阶行列式可简记为

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

1.2.2　n 阶行列式的定义

把上述三阶行列式的定义推广到 n 阶,则有如下定义:

定义 1　令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{3}$$

(3) 式右边共有 $n!$ 项,每项为左边不同行、不同列的所有 n 个元素的乘积,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,称(3)式左边为一个 **n 阶行列式**,右边所计算出的结果叫做此 n 阶行列式的值.

n 阶行列式常简记为 $D=\det(a_{ij})$. 当 $n=1$ 时,为一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$;当 $n=2,3$ 时,则分别化为(1)、(2)式情形.

在行列式的定义中,含有这样三个步骤:① 取项(任取位于不同行不同列的 n 个元素);② 冠符(将元素按行标排列,其列标排列的逆序数为 t,即得到一般项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$);③ 求和(这样的项共有 $n!$ 项,对这些项求和则得到行列式的值). 按此定义,二阶行列式和三阶行列式的计算与对角线法则相同,而高阶行列式不能用对角线法则计算. 用定义来计算 n 阶行列式需要计算 $n!$ 项的和,故对于高阶行列式来说,计算是相当复杂的. 但当行列式中有相当多的元素是零时,则只需计算非零项即可,如以下所讨论的对角行列式和三角行列式.

例 3 证明对角行列式(所有的非对角元为零,只有对角元可能非零)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 注意行列式的取项要求. 由于第 1 行只有一个非零元,故只能取元素 $a_{11}=\lambda_1$,同样第 2 行只能取 $a_{22}=\lambda_2$,…,第 n 行只能取 $a_{nn}=\lambda_n$,而如此取项各元素对应的列指标排列的逆序数为 $t(123\cdots n)=0$,相应的符号(冠符)为+,因而有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

对于斜对角行列式,与对角行列式相同,第 1 行只能取第 n 个元素,…,第 n 行只能取第 1 个元素,对应项的逆序数为

$$t(n(n-1)(n-2)\cdots 1) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2,$$

因此,该项的符号(冠符)为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,所以行列式的值为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

例 4 证明下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 根据行列式的取项规则,每项中的 n 个元素必须是位于不同行不同列的. 因此,第 1 行只能取 a_{11},第 2 行只能取 a_{22},…,第 n 行只能取 a_{nn},该项的列指标排列的逆序数为 $t(123\cdots n)=0$,因此

$$D = (-1)^0 a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　$D=D_1D_2$.

证　记 $D=\det(d_{ij})$，其中

$$d_{ij}=a_{ij}\qquad (i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,k),$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}\qquad (i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项

$$(-1)^l d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{(k+1)r_{k+1}}\cdots d_{(k+n)r_{k+n}},$$

由于当 $i\leqslant k,j>k$ 时，$d_{ij}=0$，因此 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 只有在 $1,2,\cdots,k$ 中选取时，该项才有可能不为零. 而当 $r_1,\cdots,r_k$ 在 $1,\cdots,k$ 中选取时，$r_{k+1},\cdots,r_{k+n}$ 只能在 $k+1,\cdots,k+n$ 中选取. 于是 D 中可能不为零的项可以记作 $(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}$，这里，$p_i=r_i$，$q_i=r_{k+i}-k$，而 l 为排列 $p_1p_2\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数. 以 t,s 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_k$ 及 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，应有 $l=t+s$. 于是

$$\begin{aligned} D&=\sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\\ &=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\\ &=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}D_2=D_1D_2. \end{aligned}$$

1.2.3　行列式的列顺序表示

在上面的 n 阶行列式定义中，一般项中各元素是按行标排成标准顺序的，因此也称为行列式的行顺序表示. 相应地，行列式也有列顺序表示.

对于 n 阶行列式定义中的任一个乘积项 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 后成 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$，这时这一项的值不变，而行标排列和列标排列同时作了一次对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 t_1 与 t 奇偶性相反，从而有 $(-1)^{t_1}=-(-1)^t$，故 $(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这表明交换乘积项中两个元素的次序，行标排列与列标排列同时作了一次对换，而行标排列与列标排列之和并不改变奇偶性. 经过一次对换是如此，经过多次对换当然还是如此. 于是，经过若干次对换，使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）；行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又若 $p_i=j$，则 $q_j=i$（即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$）. 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定. 由此可得

定理 2　n 阶行列式也可表示为

$$D = \sum (-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

其中 s 为行标排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

证　按行列式的定义有 $D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$. 记

$$D_1 = \sum (-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

按上面的讨论知:对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$,总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等;反之,对于 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$,也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 与之对应且相等,于是 D 和 D_1 中的项可以一一对应并相等,从而 $D = D_1$.

习 题 1.2

1. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.
2. 试确定 6 阶行列式中项 $a_{23}a_{41}a_{35}a_{16}a_{52}a_{64}$ 的符号.
3. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

4. 计算下列数字元素行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

5. 证明:若行列式中有一行(或一列)元素全等于 0,则此行列式等于零.
6. 证明:在一个 n 阶行列式中,如果等于 0 的元素个数大于 n^2-n,那么这个行列式等于零.

1.3　行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**(也记为 D').

性质 1 行列式与它的转置行列式相等(行列式转置不变).

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

而由定理 2,有 $D=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$,故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由此性质可知,行列式中的行和列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $\det(a_{ij})$ 交换 i,j 两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$,于是

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1,则$(-1)^{t}=-(-1)^{t_1}$,故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行(列)相同,则此行列式为零.

证 把这两行互换,有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行(列)的所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变. 例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i+kc_j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用行列式的性质可以把行列式化简,一般方法是通过某行(列)加上另一行(列)的适当倍数,把行列式中的对角元以下的元素全化为零(化零技术),从而将行列式化成三角行列式. 此方法通常称为**消元法**. 在消元过程中,选取合适的对角元可简化计算.

例 6 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解