■ 丘成桐　孙理察　著

微分几何讲义

Lectures on Differential Geometry

高等教育出版社
Higher Education Press

■ 丘成桐　孙理察　著

微分几何讲义

Lectures on Differential Geometry

高等教育出版社
Higher Education Press

图书在版编目（CIP）数据

微分几何讲义 / 丘成桐，孙理察著. —北京：高等教育出版社，2004.12

ISBN 7-04-016142-7

I.微… II.①丘…②孙… III.微分几何–高等学校–教材 IV. 0186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 124831 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 郭 伟 **封面设计** 王凌波
版式设计 郑轩辕 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.com.cn
电　　话	010-58581000		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 12 月第 1 版
印　　张	30.75	印　　次	2004 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	490 000	定　　价	56.00 元

物料号：16142-00

序

本书主要部分源于钟家庆兄的笔记，当时我和孙理察每周两讲，由于孩子都还在襁褓中，准备工作有一定的困难，但是作者二人兴致勃勃，在准备这些讲座时还发展了一些新的定理。以后到了圣地亚哥，我有十五个博士生在课上听讲，很遗憾的是没有学生留有完整的讲稿。以后张恭庆和丁伟岳重整这部分讲稿时，已不能将当时作者二人的讲辞全部还原，这是很可惜的。事隔二十年，作者二人已无从追忆当年创作的细节。

所幸国内学者包括当时做笔记的几位学者和我们的学生，确也在这本书上得到一些好处，宛然成一流派，称为几何分析。遗憾的是书中有一部分精要的地方未受到重视，尤其是李伟光和我发展的在抛物方程的不等式，在国外由美国的 Hamilton、苏联的 Perelman 得出几何学上的深入发展，解决了一些重要的问题。毕竟几何分析的一个主要目标是了解几何结构，不特分析而已矣。盼望本书读者能够了解这一点。

讲稿在中国先行出版，到九十年代才出版英文版 *，并加上几篇我的个人著作，以补不足。这次中文新版增加了三篇我近年的文章和演讲辞：《几何学的未来发展》、《几何与分析回顾》、《复几何的历史及前景》，另对原中文版第一、二、三、六章作了较大的改动，使本书渐臻完善。

作者原意再写极小子流形和 Monge-Ampère 方程在几何上的应用，时光荏苒，作者二人自从加州分开后，竟无机会再聚在一起续写前书，调和映射一书已有英文版，希望中文版在不久即可面世。

当年帮忙整理此书的钟家庆教授早已仙逝，最为可惜，其余诸子则在中国学坛上担当重任，月旦人物，然而学如流水，未足自负，书中多处尚需发展。希望以后能够有一个安静而有学术气氛的地方，了却未完成的心愿。本书新版，再加上我在交通大学的一篇《几何学的未来发展》的演讲辞，或可从宏观的角度来看几何的发展。

*中文版《微分几何》，科学出版社，1988；英文版 *Lectures on Differential Geometry*, International Press, 1994.

本书承蒙浙江大学沈一兵、王斯雷二位参考英文版认真翻译、校订；台湾交通大学林松山整理《几何学的未来发展》；浙江大学徐浩翻译《几何与分析回顾》、《复几何的历史及前景》二文．在此一并表示感谢．

丘成桐

二零零四年十一月一日

原　序

我们知道，在数学的各个分支中，几何学自古以来一直被数学家们所重视．其原因在于：几何学研究的是自然现象的某种表现形式，而自然现象具有很真实的感觉，所以它们一直是数学家灵感的重要源泉．因此，几何学和数学的其他分支有着极为密切的关系；当然也由于自然科学的发展而得到推动．20 世纪 30 年代 Einstein 提出的广义相对论，近 20 年来 Yang-Mills 提出的规范场论等等，都是几何学和物理结合的最好例子．

几何学的主要部分是微分几何学．近代微分几何学研究流形上的解析结构和这种结构所蕴含的几何现象．这些可以说是由 Gauss 和 Riemann 等人所奠基的．自从 Riemann 提出 Riemann 几何以后，局部几何学就有了飞速的发展，产生了张量分析．同时， Klein 发表了著名的爱尔朗根纲领，由群论角度研究空间变换群的不变量，从而引进了各种不同的几何学．另外，复变函数的单值化理论促进了 Riemann 曲面的研究．这种种理论以及经典的曲面理论，构成了 20 世纪微分几何发展的基础．

在 20 世纪，微分几何的发展极其迅速，大致可分为四个不同方面．

第一方面，Cartan 和 Weyl 作了 Lie 群和 Riemann 对称空间的分类，Cartan 将联络的概念推广，将 Klein 的理论和 Riemann 几何融合，又引进了外微分，发展了 Cartan-Kähler 理论，因此，使局部微分几何大大地推进了一步；

第二方面，由于拓扑学和代数几何的蓬勃发展， de Rham, Hodge, Kodaira, Hopf, Lefschetz, Whitney, Weil, 陈省身 (S. S. Chern) 等人将它们和微分几何建立起密切的关系，从而发展了整体微分几何；

第三方面，由于古典几何学的影响，凸曲面几何学、综合几何学、积分几何学在 Alexandroff, Cohn-Vossen, Pogorelov, Busemann, Rauch, Santalo 等人的领导下，有了很大的进展；

第四方面，由于微分方程理论的逐渐成熟，几何学家开始应用分析方法来解决几何问题，反过来，微分几何理论又提供了大量有意义的微分方程，而研究这些方程，往往要提出新的观点和方法，所以分析学家也密切注意着几何学的发展，在这方面的领导人有 Hadamard, Morse Lewy, Morrey, Bochner, Nash, Moser, Nirenberg, Efimov. 他们的工作，奠定了近 20 年来非线性偏微分方程在几何中的应用的基础.

本书将介绍上述的主要工作，读者可以发现，微分几何是一个整体的学问，上述四个方面实际上是很自然地融合在一起的，因此，第一册的目的在于研究 Riemann 流形上整体微分方程理论，并且导出曲率与拓扑之间的关系. 在第一册中，我们只讨论一个方程的情形. 在陆续出版的第二册和第三册中，我们会涉及方程组的问题，例如，我们将要涉及 Hodge 理论、极小子流形、调和映射、规范场、 Kähler 流形、 Monge-Amperé 方程，其中将讨论几何与拓扑、代数几何、广义相对论和高能物理之间的关系.

第一册包含六章内容，前四章讨论 Laplace 算子，它是微分几何中最重要的算子. 这是由于很多重要的非线性算子在线性化后，往往是某个 Riemann 度量的 Laplace 算子. 在具体讨论中，我们往往要用线性算子去逼近非线性算子，所以我们希望给出尽量不依赖于 Riemann 度量的各种估计，我们考虑的空间，可能是有界函数空间，也可能是平方可积函数空间. 我们知道，在经典调和分析中，主要是考虑 $\mathbb{R}^n$ 及其中的有界域上的调和函数，它们的推广应该是完备 Riemann 流形，其中有非负 Ricci 张量的流形对应于 Euclid 空间、有负曲率的流形对应于有界域. 原则上来说，经典调和分析中的主要定理在流形上都应该有相应的推广. 本书前两章，就是讨论其中比较重要的推广. 值得注意的是，我们往往要提出新的方法来进行这种推广. 同时，我们发现，很多几何问题又都可以用这种分析方法来解决. 当 Laplace 算子作用在平方可积函数空间时，最重要的是研究此算子的谱分析. 当流形为紧时，谱是离散的，所以在第三章中，我们研究特征函数及谱的性质；在第四章中，我们研究热核，目的也在于研究谱的性质，也希望研究波动核的性质，其原因自然是由于它提供了谱和测地线之间的关系. 当流形非紧时，我们对谱的性质知道得仍然很少，特别是关于连续谱的情形. 这些希望以后能够涉及.

第五、六章主要考虑由于保角形变所导出的非线性偏微分方程. 这方面，从 Poincaré 起，就不断有工作，我们首先讨论了 Yamabe 问题. 当然，只限于紧流形的情形. 在非紧流形的情形， Yamabe 问题还没有完全解决，希望以后也能涉及. 在第六章考虑保角平坦 Riemann 流形的性质. 在那里，读者可以发现，在纯量曲率恒正的情形，对这种流形可以有一个比较清楚的了解；但是在

负纯量曲率的情形，则仍然是一个困难的问题.

由于整体微分几何方面没有一本比较合适的教科书，特别是以拓扑、代数几何为基础，以分析为主要工具的系统教材，我们这本书可以说是这方面的一个尝试.

本书是作者的一系列演讲，其中前部分是 1983 年在 Princeton 讲的四章，由钟家庆整理讲稿，后部分是 1984 年及 1985 年在 San Diego 讲的四章，第五章由许以超和丁伟岳整理讲稿，第六章的主要结果是作者们在此期间获得的，此章由张恭庆整理讲稿. 整理讲稿的各位数学家都是学有专长，往往在整理期间加上他们极宝贵的意见，使本书生色不少. 另外，作者的学生田刚、曹怀东、李俊等人进行了修改，在此一并表示感谢. 由于水平有限，书中错误及不妥之处自属难免，还望读者多多提出宝贵意见.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

孙理察 (Richard Schoen)

1986 年 2 月 1 日于加州大学圣地亚哥分校

目　录

第一章 比较定理与梯度估计

1.1 比较定理

比较定理是流形上分析的基本工具之一，其本质是通过对 Jacobi 场与流形曲率的联系，以及流形曲率的性质进行分析而获得关于流形的更一般的性质. 另一方面，从 Jacobi 方程看，它又是微分方程在几何中的应用. 例如，比较定理之一——Bonnet 定理，就是应用 Sturm-Liouville 理论的结果. 在微分几何中，有各种形式的比较定理，这方面的详细叙述可参见 Cheeger, Ebin 的书 ([10]).

设 M 是 n 维完备的 Riemann 流形；其 Riemann 度量记为

$$ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

其中 $\{x^i\}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是局部坐标. 熟知 (M, ds^2) 上的 Laplace-Beltrami 算子定义为

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

其中， $g = \det(g_{ij})$，$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

M 上有一个自然的函数，即关于一固定点的距离函数. 任取固定点 $p \in M$，定义

$$\rho(x) = \text{dist }(p, x), \forall x \in M.$$

显然， $\rho(x)$ 不仅是连续的，而且是 Lipschitz 连续函数．由测度论可知，$\rho(x)$ 几乎处处可微．

对固定点 $p \in M$，考虑指数映射 $\exp_p : T_pM \to M$，其存在性是熟知的 Hopf-Rinow 定理以及 M 的完备性的直接推论．对于任一向量 $X \in T_pM$，设 $\gamma(t) = \exp_p(tX)\,(t \geqslant 0)$ 是从 p 出发的沿方向 X 的光滑测地线（即 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = X$）．当 t 很小时，γ 是连接 $\gamma(t)$ 与 p 的惟一极小测地线，且 $d\exp_p|_{tX} : T_{tX}(T_pM) \to T_{\exp_p(tX)}M$ 是微分同胚．但随着 t 值增大时，这种性质可能不成立．

令 $t_0 = \sup\{t > 0 \,|\, \gamma$是连接$\gamma(t)$和$p$的惟一极小测地线$\}$．如果 $t_0 < +\infty$，我们称 $\gamma(t_0)$ 为相对于 p 的沿 γ 的割点 (cut point)．所有相对于 p 的割点构成割迹 (cut locus)，我们记此割迹为 $\mathrm{Cut}(p)$．

显然，对于任一 $X \in T_pX, ||X|| = 1$，在测地线 $\exp_p(tX)(t > 0)$ 上至多有一割点，因此 $\mathrm{Cut}(p)$ 是 S^{n-1} 中一闭子集在指数映射 $\exp_p$ 下的象，所以其 n 维测度为 0．

进一步，记 $\mu(X) = \mathrm{dist}\,(p, \gamma(t_0))$ 为沿 γ 至割点的距离，其中 $X \in S^{n-1} \subset T_pM$．

定义

$$E = \{tX | 0 \leqslant t < \mu(X), X \in S^{n-1} \subset T_pM\},$$

则 $\exp_p : E \to \exp_p(E)$ 是微分同胚，因而诱导 M 的一个正规标架，显然，这是 M 以 p 为原点的可能的最大正规标架，且

$$M = \exp_p(E) \cup \mathrm{Cut}\,(p).$$

从定义可看出， $\exp_p(E)$ 是以 p 为中心的星形区域 (star domain)，而前面定义的相对于 p 的距离函数 $\rho(x)$，在 $\exp_p(E)$ 中是光滑的．

在 $\rho(x)$ 的可微点上，因为测地线以弧长为参数，故有

$$|\nabla\rho| = 1,$$

即 $\sum g^{ij}\rho_i\rho_j = 1$，其中 ρ_i 为 ρ 沿 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 方向的协变微分．

熟知，在 M 中任意一点 p 处的 Ricci 曲率 是一个双线性型

$$\mathrm{Ric} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

在 p 点的切空间 T_pM 中取单位正交标架 $\{e_i\}, \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, 如果 $e = \sum a^i e_i$, 则

$$\mathrm{Ric}(e,e) = \sum R_{ij}a^i a^j,\ R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j).$$

如果取 $e = e_n$, 则

$$\mathrm{Ric}(e,e) = \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e),$$

其中 $K(e_i, e)$ 是由 e, e_i 所张成的二维平面所对应的截面曲率.

设 $f \in C^2(M)$.f 的 Hesse 形式记作 $H(f)$, 定义如下: 设 X, Y 是过点 $x \in M$ 的两切向量. 将 X, Y 扩充成在 x 的邻域内可微的向量场 $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$, 定义

$$H(f)(X,Y) = (\widetilde{X}\widetilde{Y}f)(x) - (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}f)(x). \tag{1.1.1}$$

此处 ∇ 表示 M 的 Riemann 联络. 容易验证, $H(f)(X,Y)$ 不依赖于扩充向量场 $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ 的选择.

固定 $p \in M$, 对任何 ρ 的割迹之内的点 x, 记连接 p 和 x 的极小测地线为 σ, 使 $\sigma(0) = p, \sigma(r) = x$. 任取 $X \in T_xM$ 使得 $\langle X, \dfrac{\partial}{\partial r}\rangle(x) = 0$. 因为 x 不是 p 的共轭点, 我们可以将 X 扩充成沿 σ 的一个 Jacobi 场 $\widetilde{X}$, 满足 $\widetilde{X}(\sigma(0)) = 0, \widetilde{X}(\sigma(r)) = X, \left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0 (0 \leqslant t \leqslant r)$ (参见 [10]). 这样, 有

$$\begin{aligned}
H(r)(X,X) &= \widetilde{X}\widetilde{X}r - (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X})r \\
&= X\left\langle \widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle.
\end{aligned}$$

最后一步是由于 $\left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right] = 0$. 因此, 在 x 点上, 有

$$\begin{aligned}
H(r)(X,X) &= \int_0^r \frac{d}{dt}\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle\, dt \\
&= \int_0^r (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}|^2 + \langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle)\, dt.
\end{aligned}$$

但由于 $\widetilde{X}$ 是 Jacobi 场, 即

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X} + R(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

所以

$$H(r)(X,X)=\int_0^r\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}|^2-\left\langle R(\widetilde{X},\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t},\widetilde{X}\right\rangle\right)dt. \tag{1.1.2}$$

注 在 Jacobi 场的理论中，上述表达式正是向量场 $\widetilde{X}$ 沿 σ 的“指标形式”(index form)$I_0^r(\widetilde{X})$ （可参见 [10] ）.

定理 1.1（ Hesse 比较定理） 设 M_1 和 M_2 是两个 n 维完备 Riemann 流形， $\gamma_i:[0,a]\to M_i,\ (i=1,2)$ 是两条以弧长为参数的测地线. 记 M_i 上以 $\gamma_i(0)$ 为起点的距离为 ρ_i. 设 $\gamma_i(a)$ 在 $\gamma_i(0)$ 的割迹 之内，假定 $\forall t\ (0\leqslant t\leqslant a)$, 有

$$\text{截面曲率}K_1\left(X_1,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\geqslant\text{截面曲率}K_2\left(X_2,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right),$$

其中 X_i 分别是 $T_{\gamma_i(t)}M_i$ 中与切向量 $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}$ 正交的单位向量，则

$$H(\rho_1)(X_1,X_1)\leqslant H(\rho_2)(X_2,X_2), \tag{1.1.3}$$

此处 X_i 是 $T_{\gamma_i(a)}M_i$ 中的单位向量，且 $\left\langle X_i,\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle(\gamma_i(a))=0$.

证明 沿 γ_i 作正交的单位平行向量场 $E_1^{(i)},\cdots,E_n^{(i)}$, 使

$$E_n^i=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\quad(i=1,2).$$

由 (1.1.2)，有

$$H(\rho_i)(X_i,X_i)=\int_0^a\left(|\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\widetilde{X}_i|^2-\left\langle R(\widetilde{X}_i,\frac{\partial}{\partial\gamma_i})\frac{\partial}{\partial\gamma_i},\widetilde{X}_i\right\rangle\right)d\gamma_i,$$

其中 $\widetilde{X}_i$ 是沿 γ_i 的 Jacobi 场，$\widetilde{X}_i(\gamma_i(0))=0,\widetilde{X}_i(\gamma_i(a))=X_i$. 因为 $\left\langle X_i,\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle=0$, 所以 $\widetilde{X}_i$ 在 γ_i 的各点都和 $E_n^{(i)}$ 正交. 记

$$\widetilde{X}_2=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(t)E_j^{(2)}.$$

根据 $E_j^{(1)}(a)$ 的取法的任意性，自然可假定

$$X_1=\widetilde{X}_1(a)=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(a)E_j^{(1)}.$$

沿测地线 γ_1 定义向量场 Z：

$$Z=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(t)E_j^{(1)},$$

则 Z 和 $\widetilde{X}_1$ 有相同的初值和终值，并且 $|\widetilde{X}_2|=|Z|$ 及

$$\begin{aligned}|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2| &= |\sum\lambda_j'(t)E_j^{(2)}|\\ &= |\sum\lambda_j'(t)E_j^{(1)}|=|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}}Z|.\end{aligned}$$

根据 Jacobi 场理论中的基本事实 (见 [10], p.24)：沿一条无共轭点的测地线在具相同初、终值的所有向量场的“指标形式” 中以 Jacobi 场的指标形式为最小，由此即得

$$\begin{aligned}H(\rho_1)(X_1,X_1) &= J_0^a(\widetilde{X}_1)\leqslant I_0^a(Z)\\ &= \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}}Z|^2-\left\langle R\left(Z,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1},Z\right\rangle\right)d\gamma_1\\ &= \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2|^2-\left\langle R\left(Z,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1},Z\right\rangle\right)d\gamma_1\\ &\leqslant \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2|^2-\left\langle R\left(\widetilde{X}_2,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_2},\widetilde{X}_2\right\rangle\right)d\gamma_2\\ &= J_0^a(\widetilde{X}_2)=H(\rho_2)(X_2,X_2).\end{aligned}$$

最后的不等号是由于定理的假设条件. 定理至此证毕.

在讨论流形上的分析问题时, 以下形式的 Laplace 算子比较定理非常有用, 它是上述定理的直接推论.

系 1.1 (Laplace 算子比较定理) 设 n 维完备 Riemann 流形 M 满足 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant-(n-1)k^2\,(k\geqslant 0)$. 再设 N 为 n 维单连通的以 $(-k^2)$ 为常截面曲率的空间, 称为空间形式 (space form). 以 ρ_M 和 ρ_N 分别记 M 和 N 上相对固定点的距离. 如果 $x\in M, y\in N$, 使 $\rho_M(x)=\rho_N(y)$, 则当 x 是 ρ_M 的可微点时, 有

$$\Delta\rho_M(x)\leqslant\Delta\rho_N(y). \tag{1.1.4}$$

为了得出更便于应用的形式, 我们需要计算常曲率 $(-k^2)$ 空间形式中的 $\Delta\rho$. 根据 (1.1.2) ,

$$H(\rho)(X,X)=\int_0^\rho\left(|\frac{\partial}{\partial\gamma}\widetilde{X}|^2-\left\langle R(\widetilde{X},\frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma},\widetilde{X}\right\rangle\right)d\gamma,$$

其中 $\widetilde{X}$ 是沿极小测地线 γ 的 Jacobi 场，满足 $\widetilde{X}(0)=0$,

$$\widetilde{X}(\gamma(\rho))=X.$$

因此计算 $\Delta\rho$ 化为求沿极小测地线的 Jacobi 场的问题.

在以 $-k^2$ 为常曲率的空间形式中，沿任何正规测地线 γ 的 Jacobi 场可以这样求得：设 $p=\gamma(0),q=\gamma(\rho),X\perp\dot{\gamma}(\rho)$, 将 X 沿 γ 平行移动得到的向量场仍记为 $X(t)(0\leqslant t\leqslant\rho)$, 那么沿 γ 的 Jacobi 场 $Y(t)$, 如果满足 $Y(0)=0,Y(\rho)=X$, 则具有以下形式：

$$Y(t)=f(t)X(t),$$

其中函数 $f(t)$ 满足经典的 Jacobi 方程 ：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)-k^2f(t)=0,\\ f(0)=0,\quad f(\rho)=1.\end{cases}\tag{1.1.5}$$

熟知 (1.1.5) 的解为

$$f(t)=\frac{1}{\operatorname{sh}k\rho}\operatorname{sh}kt.\tag{1.1.6}$$

现设 $\{\frac{\partial}{\partial\gamma},X_1,\cdots,X_{n-1}\}$ 是 $T_{\gamma(\rho)}M$ 的单位正交基，它们沿 γ 平行移动得相应的向量场. 于是， $\widetilde{X}_j(t)=f(t)X_j(t)$ $(1\leqslant j\leqslant n-1)$ 是满足 $\widetilde{X}_j(\rho)=X_j$ 的 Jacobi 场. 根据 (1.1.2)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\rho&=\sum_{j=1}^{n-1}H(\rho)(X_j,X_j)\\&=(n-1)\int_0^\rho\left(|\frac{df}{dt}|^2+k^2f^2(t)\right)dt\\&=(n-1)k\coth k\rho.\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

系 1.2 如果 n 维完备 Riemann 流形的 Ricci 曲率 $\geqslant-(n-1)k^2$, 则在 ρ 的可微点上有

$$\Delta\rho\leqslant\frac{n-1}{\rho}(1+k\rho).\tag{1.1.8}$$

证明 根据系 1.1 及 (1.1.7)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\rho&\leqslant(n-1)k\coth k\rho\\&=\frac{n-1}{\rho}k\rho\coth k\rho.\end{aligned}$$