

高等数学解题指导之一

求极限的方法与技巧

戴锦生 蒋传章 编著

西北工业大学出版社

51.6/11
3

ISBN 7-5612-0218-0 / 0.22

定 价：2.30元

296036

高等数学解题指导之一

求极限的方法与技巧

戴锦生 / 蒋传章 编著

西北工业大学出版社

1989年8月 西安

高等数学解题指导之一

求极限的方法与技巧

编 者 戴锦生 葛传章

责任编辑 刘修信

责任编辑 戴锦生

*

西北工业大学出版社发行

(西安市友谊西路127号)

西北纺织工学院印刷厂印装

ISBN7-5612-0218-0/0.22

*

开本 787×1092 $\frac{1}{32}$ 1/32 51印张 167千字

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数 1-5000册 定价: 2.30元

前 言

学习高等数学的同志普遍希望能够在解题方面得到启发与帮助。初学者需要简单而典型的例题以做示范，加深对概念、定理与公式的理解；已熟悉基本理论的同志需要一定难度、深度与综合性的例题，以求掌握解题的方法与技巧，达到融汇知识、提高能力之目的。为此，我们编写了“高等数学解题指导”这套丛书。

《求极限的方法与技巧》是这套丛书的第一册，比较全面的介绍了求数列极限与函数极限的各种方法。全书按方法分节，力求一题多解，同一题的不同解法以不同题号分别按节排列，但前后注明，以便对照。各节中，有些例题是简单而典型的，对初学者较适宜；而有难度、深度的例题，以及综合性的例题，排在每节的较后部分，这些例题对基本学完一元微积分与级数理论的同志分析问题解决问题的能力是有帮助的。极限概念与求极限的运算可以说是贯穿了高等数学的始终，因而全面掌握求极限的方法与技巧应该是学好高等数学的一个基本要求。

随后出版的《中值定理及其应用》是这套丛书的第二册。

我们希望这些薄册子对理工科大学正在学习高等数学的学生有启发，也希望对准备迎考研究生的同志有助益，因为这套书就是为这两方面的同志而写的。本书的错误与不足谨请指正。

编 者

1989年5月 于西安

目 录

§ 1	利用极限四则运算求极限·····	(1)
§ 2	利用函数的连续性求极限·····	(13)
§ 3	利用无穷小的性质求极限·····	(17)
§ 4	利用两个重要极限求极限·····	(22)
§ 5	利用平均值极限定理求数列极限·····	(29)
§ 6	利用夹挤定理求极限·····	(36)
§ 7	利用递推公式与单调有界性求数列极限·····	(57)
§ 8	利用导数求极限·····	(81)
§ 9	利用微分中值定理求极限·····	(87)
§ 10	利用洛必大法则求极限·····	(92)
§ 11	利用台劳展开式求极限·····	(105)
§ 12	利用定积分求极限·····	(126)
§ 13	利用积分中值定理求极限·····	(136)
§ 14	利用收敛级数的性质求极限·····	(142)
§ 15	利用幂级数的和函数求极限·····	(147)

§1 利用极限四则运算求极限

对和、差、积、商形式的算式求极限，自然会想到极限四则运算法则。法则本身很简单，但为了能够使用这些法则，往往需要先做某些恒等变形或化简。采用怎样的变形与化简，要从具体的算式出发。常用的有某些求和公式；求积公式；分式的约分或通分；分式的分解；分子或分母的有理化；三角函数的恒等变形等，以及适当的变量替换。

例 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right]$ 。

解一 使用自然数平方和公式

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1),$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

解二 (见例128)

例 2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ 。

解 使用恒等式

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{化简} \quad & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{[1 \cdot 2 \cdots (n-1)] \cdot [3 \cdot 4 \cdots (n+1)]}{(2 \cdot 3 \cdots n)^2} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{例 3 求} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \\ & \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right). \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

解 使用恒等式

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$1 - \frac{1}{1+2+\cdots+k}$$

$$= 1 - \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}, \quad (k=1, 2, \dots)$$

化简 $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

$$= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{[1 \cdot 2 \cdots (n-1)] \cdot [4 \cdot 5 \cdots (n+2)]}{[2 \cdot 3 \cdots n] \cdot [3 \cdot 4 \cdots (n+1)]}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3}$$

原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{3}$

例 4 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2^n}}$,

其中 $|a| < 1$, $|b| < 1$.

解. 使用等比级数求和公式

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

$$1+b+b^2+\cdots+b^{2^n} = \frac{1-b^{2^{n+1}}}{1-b},$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \bigg/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-b^{2^{n+1}}}{1-b} \\ &= \frac{1}{1-a} \bigg/ \frac{1}{1-b} = \frac{1-b}{1-a}.\end{aligned}$$

例 5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,

其中 $|a| < 1$.

解 多次使用恒等式

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2,$$

化简 $(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$= \frac{1}{1-a} \cdot (1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$= \frac{1}{1-a} \cdot (1-a^{2^{n+1}}).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $2^{n+1} \rightarrow +\infty$, $a^{2^{n+1}} \rightarrow 0$.

故 原式 $= \frac{1}{1-a}$.

例 6 设 $x_1 = a$, $x_2 = b$,

$$x_n = (1-q)x_{n-1} + qx_{n-2}, \quad (n=3, 4, \cdots)$$

其中 $0 < q < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由 $x_n = (1-q)x_{n-1} + qx_{n-2}$

得到递推式

$$x_n - x_{n-1} = -q(x_{n-1} - x_{n-2}) .$$

多次使用该递推式, 推出

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= (-q) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= (-q)^2 \cdot (x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \dots \\ &= (-q)^{n-2} (x_2 - x_1) \\ &= (-q)^{n-2} (b - a) , \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) \\ &\quad + x_1 \\ &= (-q)^{n-2} (b - a) + (-q)^{n-3} (b - a) + \dots \\ &\quad + (b - a) + a \\ &= (b - a) [1 + (-q) + \dots + (-q)^{n-3} \\ &\quad + (-q)^{n-2}] + a \\ &= (b - a) \cdot \frac{1 - (-q)^{n-1}}{1 + q} + a . \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(-q)^{n-1} \rightarrow 0$.

故 原式 $= (b - a) \cdot \frac{1}{1 + q} + a = \frac{aq + b}{1 + q}$.

特别, 设 $q = \frac{1}{2}$, 此时数列 x_n 定义如下:

$$x_1 = a , \quad x_2 = b ,$$

$$x_n = \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_{n-2}) , \quad (n = 3, 4, \dots)$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$

解 7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$

解
$$\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{(-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3},$$

原式
$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}.$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} \cdot (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$

解
$$\frac{(2x-3)^{20} \cdot (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}},$$

原式
$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}}$$

$$= \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$.

解 一 分式约简

$$\begin{aligned} & \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \cdots + (x^n - 1)}{x - 1} \\ &= 1 + (x + 1) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1), \end{aligned}$$

故 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x + 1) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)]$

$$= 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

解 二 (见例87)

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$, 其中 m, n 正整数.

解 一 先做变量替换 $t = x^{\frac{1}{mn}}$, 再约简分式

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{t^m - 1}{t^n - 1} \\ &= \frac{(t - 1)(t^{m-1} + t^{m-2} + \cdots + 1)}{(t - 1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + 1)} \\ &= \frac{t^{m-1} + t^{m-2} + \cdots + 1}{t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + 1} . \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$.

故 原式 $= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1}{t^{m-1} + t^{m-2} + \dots + 1} = \frac{n}{m}$.

解二 (见例88)

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}} \right)$.

解 令 $t = \frac{1}{x}$, 并使分子有理化

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}} \\ &= \sqrt{t + \sqrt{t}} - \sqrt{t - \sqrt{t}} \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t + \sqrt{t}} + \sqrt{t - \sqrt{t}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{t}}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{t}}} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0^+$ 时, $t \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$, $\sqrt{1 \pm \frac{1}{\sqrt{t}}} \rightarrow 1$.

故 原式 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{t}}}} = 1$.

例 12 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$.

解 做恒等变形

$$\begin{aligned}& \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right) \\&= (-1)^n \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi \right) \\&= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n},\end{aligned}$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0.$$

例 13 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$

解 一 令 $x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$

于是 $\frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$

两式相减, 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_n &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

从而得到

$$x_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{2^n},$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \left(2 - \frac{1}{2^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 3 - \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{3}{2^n}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{3}{2^n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{2^{n-1}} \rightarrow 0$.

故 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

(注. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ 可见例43, 显然由此推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.)$$

解二 (见例148).

例 14 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \cdots + n \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \right]$.

解一 令 $x_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}$,

其中 $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 于是

$$qx_n = q + 2q^2 + \cdots + (n-1)q^{n-1} + nq^n,$$

两式相减, 得到

$$\begin{aligned}(1-q)x_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n,\end{aligned}$$

从而得到

$$x_n = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}.$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } q^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \rightarrow 0,$$

$$nq^n = \frac{n}{(-\sqrt{2})^n} \rightarrow 0.$$

$$\text{故 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}.$$

$$\text{解二 令 } x_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1},$$

其中 $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. 将 x_n 分成 n 个和式相加