首席教师

专题小课本

●小方法大**智慧** ●小技巧大**成效**

●小单元大**提升** ●小课本大**讲坛**

初中数学 圆

总主编/钟 山

金星教育

中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

方法赢得速度 选择决定未来

FANGFAYINGDESUDU XUANZEJUEDINGWEILAI

初中数学	1.实数与二次根式 2.整式与分式 3.方程(组)与不等式(组) 4.函数及其图象 5.图形的初步认识与变换 6.四边形 7.三角形与解直角三角形 8.图形的全等与相似 9.圆 10.统计与概率
初中物理	1.声 光 热 2.物质的运动和力 3.能量与能源 4.电和磁 电磁能 5.物理实验与探究
初中化学	1.身边的化学物质 2.物质构成与变化 3.化学实验与探究 4.化学与社会发展

角度与广度

一位老员外，特别喜欢牡丹花，庭内庭外都种满了牡丹。老员外采了几朵牡丹花，送给一位老翁，老翁很开心的插在花瓶里。隔天，邻居激动地和老翁说："你的牡丹花，每一朵都缺了几片花瓣，这不是富贵不全吗？"老翁总觉得不妥，就把牡丹花全部还给老员外。老翁一五一十的告诉老员外关于"富贵不全"的事情。老员外忍不住笑说："牡丹花缺了几片花瓣，这不是富贵无边吗？"老翁听了颇有同感，选了更多的牡丹花，开心的走了。

有智慧的人，不会和站在不同角度的人争吵。每个人站的角度不同，说话的方式自然就有所差异，不管想法和你是否接近，每个角度的想法都值得去采纳。亲爱的朋友，多往积极的层面去思考，你会发现自己充满朝气，学到的知识更多，任何问题都浮现着隐约的答案。

看问题，重要的不是你站的角度，而是你思想的广度。

责任编辑：苏欣力 逄 梁
责任校对：高继华
封面设计：书友传媒

ISBN 978-7-80196-660-5

9 787801 966605 >

定价：10.80元

图书在版编目（CIP）数据

首席教师专题小课本．初中数学．圆／钟山主编．—北京：现代教育出版社，2008.4
ISBN 978－7－80196－660－5

Ⅰ.首… Ⅱ.钟… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 038429 号

书　　名：首席教师专题小课本·初中数学—圆
出版发行：现代教育出版社
地　　址：北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码：100011
印　　刷：北京通州皇家印刷厂
发行热线：010－61743009
开　　本：890×1240　1/32
印　　张：6.25
字　　数：270 千字
印　　次：2008 年 4 月第 1 版　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－80196－660－5
定　　价：10.80 元

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

首席寄语

专题导引

圆是由与一个定点的距离等于定长的点的集合组成的曲线，我国战国时期科学家墨翟在《墨经》中写道："圆，一中同长也"，车轮就是直接应用了圆的这个性质. 古人移动重物时，往往把重物放在圆木棍上滚动(如图 0-1-1)，这样既省力，又能使重物平稳地前进，同样是运用圆的特性. 由此可知，圆在实际生活和工农业生产中的应用极其广泛，如图 0-1-2.

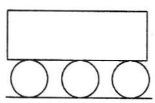


图 0-1-1

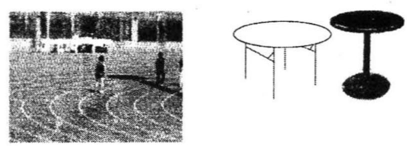


图 0-1-2

圆的内容是初中阶段的最重要的内容之一，是进一步学习数学及其他学科的基础.

圆的认识这一节，主要是利用了圆的对称性，探索出了圆的一些性质，比如确定圆的基本条件、圆的表示方法、圆的一些基本元素等. 由圆的对称性，研究了圆心角、弧、弦等知识的关系及垂直于弦的直径的有关性质，在圆周角中的重要的结论.

与圆有关的位置关系这一节，主要探索点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系及特征.

圆中一些计算问题的解题方法、思路是这一节主要研究的问题. 主要有弧长及扇形面积问题，圆锥的侧面积与全面积问题及其他知识相关的问题.

圆不仅是常见的几何图形之一，而且在几何中占有极其重要的地位，是我们学习数学的重要基础. 圆的许多性质，反映了事物内部的量变与质变，一般与特殊的对立统一的关系，结合这些知识的学习，可以帮助我们树立辩证唯物主义的世界观.

中考命题规律

圆在初中数学体系中处在核心地位，是中考的重头戏，占题量的 16%～20%. 题型主要有选择题、填空题、解答题、作图题(包括阅读理解题、开放探索题等). 圆既是相对独立的一个知识体系，又是前面所学平行线、三角形、相似形、函数、方程、解直角三角形等知识的综合和延伸. 与三角形、方程等知识点相结合，可构成内容丰富、题型新颖、构思精巧的综合性试题，成为中考的压轴题.

命题规律趋势如下：

1.圆的有关性质是中考的重点内容，近几年来常出现概念型试题和开放探索题，主要考查对圆的有关概念和性质的理解和灵活运用.

2.与圆有关的位置关系考查热点有：点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系和圆与圆的位置关系，考查形式多样，题型涉及面广，除常见的选择题和填空题外，近几年中考中也出现了综合题.特别注重对直线与圆、圆与圆的位置关系的灵活运用和综合运用，并采用以实际背景方式对基础知识进行考查，成为一个热点.

3.与圆有关的计算问题考查重点是对弧长计算公式的理解、扇形周长及面积的计算和利用公式求圆柱、圆锥的侧面积和全面积，这是中考的必考内容，大多以选择题和填空题的形式出现，随着新课标内容的逐渐加深，命题更加贴近生产、生活.

4.命题与证明考查的热点是熟练运用全等三角形、特殊四边形(平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形)、相似三角形的性质定理和判定定理证明直线与圆有关的几何命题，同时会灵活运用三角形中位线定理，等腰三角形、直角三角形的性质定理和判定定理证明与之相关的几何命题.

5.对于尺规作图，要求学生会用五种基本作图的方法画简单的几何图形，并会以圆弧或圆的基本元素设计各种优美图案.

学习应试策略

通过观察、探索、合作、实践、交流、归纳等数学活动，进行主动的、探究的、富有个性的学习，尤其是对于一些结论的得出，更应去探索、总结，通过合情的推理，主动地获取新知，注意“由特殊到一般”“数形结合”“化归”“分类”等数学思想方法的运用.

(1)在对实际问题的观察中认识圆的有关概念：圆心、半径、直径、弦、弧(优弧、劣弧)、圆心角、圆周角.

(2)通过对实际生活的观察和亲自体验，掌握圆的对称性，并能利用圆的对称性探索圆的一些基本性质：在同圆或等圆中，圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系，同弧所对的圆周角与圆心角之间的关系；垂直于弦的直径平分弦及弦所对的弧等.

(3)通过对点、直线和圆与圆的相对运动的探索实验，推理、计算等归纳出点与圆、直线与圆、圆与圆之间的位置关系，掌握点与圆心的距离、直线与圆心的距离、圆心与圆心之间的距离同圆的半径的大小比较，判定它们之间的关系.

(4)在对直线与圆相对运动的探索过程中掌握切线的概念，并能利用实验探索切线与过切点的半径之间的关系，同时能判定一条直线是否为圆的切线.

(5)在动手操作与观察实验的同时，探索出正多边形与圆的关系，扇形面积及弧长的计算公式，并掌握圆柱及圆锥的侧面积与全面积公式.

学习的关键是理解圆及其有关概念和性质，真正地从运动的角度出发去体验和归纳与圆有关的一些几何图形，以及能从实际问题中抽象出数学问题，在学习中切忌死记硬背，要灵活地思考，建立普遍联系的观点，进而达到学以致用的目的.

[单元提升篇]

第一章　圆的初步认识

课程标准要求

1. 理解圆、弦、弦心距、直径、弧、圆心角、圆周角等有关概念.
2. 理解圆的对称性,知道圆既是轴对称图形,又是旋转对称图形.
3. 掌握圆中"垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的两条弧"的性质,以及"弧、弦、弦心距、圆心角"四量之间的"等对等"关系,并能运用这些性质进行有关的计算与证明.
4. 理解圆周角与圆心角的关系、直径所对圆周角的特征,并能灵活运用于有关问题的解决.

第一单元　圆的有关概念

知识清单精解 ZHISHIQINGDANJINGJIE

考点	定义	说明
1. 圆	1. 在同一个平面内,线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周,另一个端点 A 随之旋转形成的图形叫做圆 2. 圆是到定点的距离等于定长的点的集合	
2. 弦	连结圆上任意两点的线段叫做弦	1. 圆中最长的弦是直径 2. 一个圆有无数条直径
3. 弧	圆上任意两点间的部分叫弧	弧可分为优弧、劣弧、半圆
4. 等弧	在同圆或等圆中,能互相重合的弧叫等弧	
5. 弦心距	圆心到弦的垂线段的长	弦心距不是线段,而是线段的长度
6. 圆的对称性	圆既是中心对称图形又是轴对称图形	对称中心是圆心,对称轴是直径所在的直线

方法技巧突破
FANGFAJIQIAOTUPO

技巧 1　连半径是常作的辅助线

在圆中，常常连结半径来构造等腰三角形、直角三角形以解决问题.

例 1　求证：直径是圆中最长的弦.

已知：如图 1-1-1，AB 是⊙O 中非直径的弦，求证：AB 小于直径.

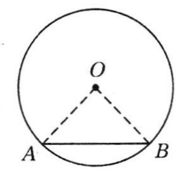


图 1-1-1

思路分析：连结 OA、OB 可得△OAB，根据两边之和大于第三边可证.

证明：连结 OA、OB.

∴ $OA+OB>AB$，∵ OA、OB 为圆中两半径，∴ AB 小于直径.

技巧 2　直径的妙用

例 2　如图 1-1-2，已知 AB 是⊙O 的直径，$\angle C=90°$，且 $AB=10$ cm，BC 是弦，D 是 BC 的中点，$OD=4$ cm，求弦 BC 的长.

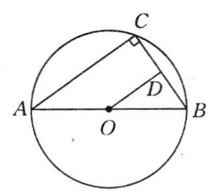


图 1-1-2

思路分析：由 O 是直径 AB 的中点及 D 是 BC 的中点，想到 OD 是△ABC 的中位线，有 $AC=2OD=8$ cm，而 $\angle C=90°$，则由勾股定理可求 BC.

解：因为 O 是 AB 的中点，D 是 BC 的中点，所以 OD 是△ABC 的中位线，即 $AC=2OD=8$ cm，$\angle C=90°$，$AB=10$ cm.

故 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=6$(cm).

点拨：中位线及勾股定理是解决线段问题的重要依据.

中考能力培养
ZHONGKAONENGLIPEIYANG

一、推理论证能力

能力点津：本能力在本讲中所考的典型内容为利用圆的基本概念进行简单的推理，为以后圆的证明、计算打好基础. 其应对策略为熟练掌握这些概念的意义，并能从基本的图形中找出基本元素及其相互关系.

考例 1　(2007·湖北武穴、蕲春联考)已知圆中最长的弦，那么由此可以求出(　　)

①圆的半径；②半圆的长；③圆中的弧长；④圆的面积.

A. ②③④　　B. ①③④　　C. ①②④　　D. ①②③

解析：本题仍然是考查圆中有关的概念，已知圆中最长的弦即是已知圆的直径，所以可以求出：①圆的半径；②半圆的长；④圆的面积，故应选 C.　答案：C

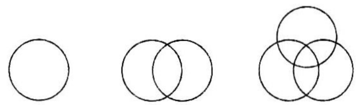
点拨：根据以前所掌握的知识可知：直径 $=2$ 倍的半径，半圆的长 $=\pi r$，圆的面积 $=\pi r^2$. 而圆的弧长除了与圆的半径有关外，还与弧所对的圆心角有关，所以无法确定.

二、归纳推理能力

能力点津:归纳推理能力在本讲中所考查的典型内容为有关圆的一些开放探究题,要求学生能通过已知条件探求规律.因此,培养学生具有良好的观察、分析、概括能力是非常关键的.

例 2 在同一个平面内,一个圆可把平面分成 2 个部分,如图 1-1-3(1)所示;2 个圆可把平面最多分成 4 个部分,如图 1-1-3(2)所示;3 个圆可把平面最多分成 8 个部分,如图 1-1-3(3)所示;4 个圆可把平面最多分成 14 个部分.

请观察图形,并推断下面两个问题:



(1)　　　(2)　　　(3)

图 1-1-3

(1)10 个圆可把平面最多分成________个部分;

(2)________个圆可把平面最多分成 22 个部分.

解析:由题目所给条件推出圆的个数 n 与所分平面最多部分之间的关系,这种关系要由所给 3 个示例去推得.

由图 1-1-3(1)可知:$0\times1+2=2$;由图 1-1-3(2)可知:$1\times2+2=4$;由图 1-1-3(3)可知:$2\times3+2=8$;

以此类推:$3\times4+2=14$;……

可得当有 n 个圆时,最多可将平面分成 $n(n-1)+2$ 个部分.

(1)$n=10$ 时,$n(n-1)+2=(10-1)\times10+2=92$,所以应填 92.

(2)设有 n 个圆,$n(n-1)+2=22$,解得 $n_1=5$,$n_2=-4$(舍去).所以应填 5.

答案:(1)92　(2)5

点拨:一般寻找规律的题目,都是从特殊到一般,在审题时,一定要注意从特例中寻求和总结一般规律,并且去验证,在这个过程中,要全方位、多角度地去观察、猜想、验证,特别提醒应按一定次序去排列特例,通常序号与规律之间存在着一定的关系.

应试规律点津 YINGSHIGUILÜDIANJIN

1. 考点导航

内容	考点要求
圆的有关定义	理解圆、弦、弧、弦心距等有关概念
圆的对称性	知道圆既是轴对称图形,又是中心对称图形

2. 规律点津

圆的有关概念是近几年各地中考命题考查的重点内容,题型一般以填空题、选择题为主.

3. 策略技巧

1. 利用半径相等构造等腰三角形是常用方法.

考例 1　(2007·黄冈模拟)如图 1-1-4，CD 是 $\odot O$ 的直径，点 A 在 DC 的延长线上，AE 交 $\odot O$ 于 B、E，AB 的长等于 $\odot O$ 的半径，$\angle DOE=78^\circ$，则 $\angle A=$________.

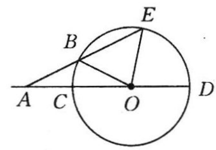


图 1-1-4

解析：用方程知识解决此问题较方便.

设 $\angle A=x$，从而 $\angle EBO=2x$.

又 $OB=OE$，$\therefore$ $\angle E=\angle EBO=2x$.

$\therefore$ $\angle EOD=\angle A+\angle E=x+2x$.

$\because$ $\angle DOE=78^\circ$，$\therefore$ $3x=78^\circ$，$x=26^\circ$，即 $\angle A=26^\circ$.　　答案：26°

点拨：解题时要分清和外角不相邻的两个内角，同时要注意挖掘同圆的半径相等这个条件. 从本例的解答可以看出，求解几何问题时如能合理利用方程思想，可以简化解答.

2. 巧用数形结合思想，解与圆有关的双解问题.

在解决有关圆的问题时，由于往往只给出已知条件，没有给出图形，我们在解决时需要自己作图，一旦考虑不周，就会造成丢解的现象. 下面的问题，需要同学们注意.

考例 2　(2007·湖北模拟)点 P(不在圆上)到圆上的最大距离为 a，最小距离为 b，则 $\odot O$ 的半径为(　　)

A. $a+b$ 或 $a-b$　　B. $\frac{a+b}{2}$　　C. $\frac{a-b}{2}$　　D. $\frac{a+b}{2}$ 或 $\frac{a-b}{2}$

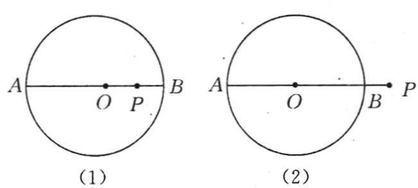


图 1-1-5

解析：点 P(不在圆上)与 $\odot O$ 的位置关系有两种情况：(1)当点 P 在圆内时，如图 1-1-5(1)，则圆的半径为 $\frac{a+b}{2}$；(2)当点 P 在圆外时，如图 1-1-5(2)，则 $AB=PA-PB=a-b$，所以圆的半径为 $\frac{a-b}{2}$. 综上所述，应选 D.　　答案：D

点拨：求解与几何图形相关的最大或最小距离的问题时，都需按此题指明的方法，先画出示意图，全面考虑不同的情形，再分类求解，产生错解的主要原因是考虑不周，造成漏解.

题组优化训练
TIZUYOUHUAXUNLIAN

■误区突破题组

误区　对圆的相关概念理解不透彻，导致判断失误

1. (2006·湖北)下列说法中：①圆心决定圆的位置；②半径决定圆的大小；③半径相等的圆是同心圆；④两个半径相等的圆是等圆，你认为正确的结论有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. (2006·湖北鄂州)下列命题中，正确的个数有(　　)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

①直径是弦，但弦不一定是直径；②半圆是弧，但弧不一定是半圆；③半径相等的两个圆是等弧；④一条弦把圆分成的两段弧中，至少有一段是优弧.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 下列图形中，四个顶点在同一个圆上的是(　　)

A. 菱形　　B. 平行四边形　　C. 矩形　　D. 梯形

4. 下列说法正确的是(　　)

A. 弦是直径　　B. 半圆是弧

C. 弧是半圆　　D. 过圆心的线段是直径

■综合创新题组

综合　应用圆的相关概念解决问题

5. 如图 1-1-6，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，D 是 BC 的中点，现以 D 为圆心，以 DC 为半径作$\odot D$，在下列条件下求点 A 与$\odot D$ 的位置关系：(1)$BC=8$；(2)$BC=6$；(3)$BC=5\sqrt{2}$.

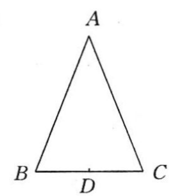


图 1-1-6

6. 到点 O 的距离等于 3 的所有点构成的图形是________.

7. 若$\odot O$ 的半径为 5，则$\odot O$ 中最长的弦长为________.

8. 以矩形 $ABCD$ 的顶点 A 为圆心作$\odot A$，要使 B、C、D 三点中至少有一个点在$\odot A$ 内，且至少有一个点在$\odot A$ 外，如果 $BC=12$，$CD=5$，则$\odot A$ 的半径 r 的取值范围是________.

9. 若$\odot A$ 的半径为 5，圆心 A 的坐标是(3,4)，点 P 的坐标是(5,8)，则点 P 的位置在(　　)

A. $\odot A$ 内　　B. $\odot A$ 上

C. $\odot A$ 外　　D. 不能确定

10. 如图 1-1-7，$\odot O$ 中，点 A、O、D 以及点 B、O、C 分别在一条直线上，图中弦有(　　)

A. 2 条　　B. 3 条

C. 4 条　　D. 5 条

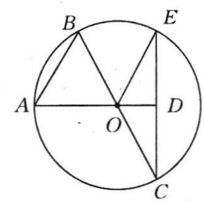


图 1-1-7

题组答案详解

1. C　点拨：对照圆的定义及同心圆、等圆的概念进行判断，显然①②④正确.

2. C　点拨：直径是过圆心的特殊的弦，而弦不一定是直径；半圆是特殊的弧；半径相等的两个圆是等圆，故能够重合，所以是等弧；直径把圆分成的两段弧既不是优弧，也不是劣弧，所以①②③是正确的，④是错误的. 故选 C.

3. C　点拨：根据圆的定义去判断，矩形的对角线相等且互相平分，故其四个顶点共圆，故选 C.

4. B　点拨：弦不一定是直径，只有过圆心的弦才是直径. 同样，弧不一定是半圆，而半圆是弧，故选 B.

题组规律

本题组是对圆基本概念的考查，要结合图形理解概念，仔细辨别相关概念的联系与区别.

5. 解：如图 1-1-8，连结 AD，$\because AB=AC=5$，D 是 BC 中点，

$\therefore AD\perp BC$，$DC=\frac{1}{2}BC$.

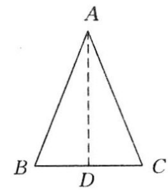


图 1-1-8

(1) 当 $BC=8$ 时，$DC=\frac{1}{2}BC=4$.

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{25-16}=3$.

$\because 3<4$，$\therefore AD<DC$，$\therefore$ 点 A 在 $\odot D$ 内.

(2) 当 $BC=6$ 时，$DC=\frac{1}{2}BC=3$.

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{25-9}=4$.

$\because 4>3$，$\therefore AD>CD$. $\therefore$ 点 A 在 $\odot D$ 外.

(3) 当 $BC=5\sqrt{2}$ 时，$DC=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{25-\frac{50}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

$\because \frac{5}{2}\sqrt{2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$，$\therefore AD=CD$. $\therefore$ 点 A 在 $\odot D$ 上.

6. 以 O 为圆心、以 3 为半径的圆　7. 10

8. $5<r<13$　点拨：如图 1-1-9，根据题意知：

$AB=CD=5$，$BC=AD=12$，

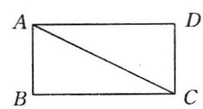


图 1-1-9

$\therefore$ 由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

$\therefore$ 要使 B、C、D 三点至少有一个在 $\odot A$ 内，且至少有一个在 $\odot A$ 外，$\odot A$ 的半径的取值范围是 $5<r<13$.

9. A　点拨：如图 1-1-10，过 P 作 $PC\perp x$ 轴于 C，则 $PC=8$.

过 A 作 $AB\perp PC$ 于 B，则 $AB=5-3=2$，$PB=PC-BC=8-4=4$.

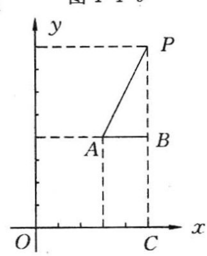


图 1-1-10

$\therefore PA=\sqrt{PB^2+AB^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}<5$.

$\therefore$ 点 P 在 $\odot A$ 内，故选 A.

10. B　点拨：根据弦的定义容易求解，要注意图中直径 BC 也是弦，且是这个圆中最长的弦.

题组规律

熟练掌握圆中基本概念的内涵和外延是解决这类问题的关键.

第二单元
圆的基本性质

知识清单精解 ZHISHIQINGDANJINGJIE

考点	内容
1. 垂径定理	垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧
2. 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对的其余各组量分别相等
3. 圆周角定理	一条弧所对的圆周角度数等于该弧所对的圆心角度数的一半. 推论：同圆内，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧相等. 半圆或直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径

方法技巧突破 FANGFAJIQIAOTUPO

技巧1　连半径，构造直角三角形

如果出现直径垂直于弦，则连结半径构造直角三角形来解决问题.

例1　如图1-2-1所示，直径为10 cm的圆中，圆心到弦AB的距离为4 cm. 求弦AB的长.

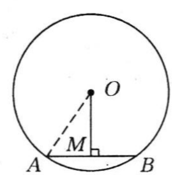


图1-2-1

思路分析：利用“圆的对称性”：垂直于弦的直径平分这条弦.

解：连结OA.

$\because OM \perp AB$，$\therefore AM=\frac{1}{2}AB$.

$\because OA=\frac{1}{2}\times 10=5(\text{cm})$，$OM=4$ cm，

$\therefore AM=\sqrt{OA^2-OM^2}=3(\text{cm})$.

$\therefore AB=2AM=6(\text{cm})$.

技巧2　见弦常作弦心距

过圆心作弦的垂线，构造直角三角形.

例2　如图1-2-2所示，已知⊙O中最长的弦长为

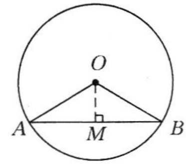


图1-2-2

40 cm,另有一条弦 AB,且$\angle AOB=120°$.求$\triangle AOB$的面积.

思路分析:过圆心 O 作弦 AB 的垂线,必平分弦,$\triangle AOB$ 的高 OM,也是弦 AB 的弦心距,弦、弦心距和半径这三个量中已知其中的两个量,利用勾股定理或三角函数可求第三个量.

解:过点 O 作 $OM\perp AB$,垂足为点 M,因为圆中最长的弦是直径,所以半径 $OA=OB=\frac{1}{2}\times 40=20(\text{cm})$. 又因为 $\angle AOB=120°$,所以 $\angle A=\angle B=30°$. 所以在 $\text{Rt}\triangle AOM$中,$OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times 20=10(\text{cm})$,$AM=OA\cdot\cos A=20\times\cos 30°=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}(\text{cm})$. 由垂径定理,可知 $AM=MB$,所以 $AB=2\times 10\sqrt{3}=20\sqrt{3}(\text{cm})$. 所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot AB=\frac{1}{2}\times 10\times 20\sqrt{3}=100\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

技巧 3 见直径,构造直径所对的圆周角

例 3 已知:如图 1-2-3,AO 为$\odot O$的半径,以 AO 为直径的$\odot C$与$\odot O$的弦 AB 交于点 M,说明:M 为 AB 的中点.

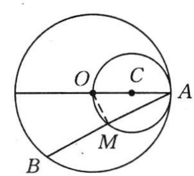


图 1-2-3

思路分析:在解圆的有关问题时常常添加辅助线,构成直径所对的圆周角,以便利用"直径所对的圆周角是 90°"这个性质.

解:连结 OM,$\because$ AO 为$\odot C$的直径,$\therefore$ $\angle AMO=90°$.
即 $OM\perp AB$,$\therefore$ $AM=BM$. $\therefore$ M 为 AB 的中点.

技巧 4 构造相等的圆周角

在圆中,连结同弧或等弧所对的圆周角是常作的辅助线,因为由此可得有关角相等.

例 4 已知:如图 1-2-4,BE 是$\odot O$的直径,点 A、C 在$\odot O$上,CD 是$\triangle ABC$ 的高.(1)说明:$AC\cdot BC=BE\cdot CD$;(2)已知$CD=6$,$AD=3$,$BD=8$.求$\odot O$的直径 BE 的长.

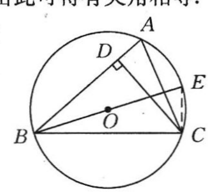


图 1-2-4

思路分析:连 CE 可得$\angle A=\angle E$,构造相似三角形.

解:(1)连结 EC. 因为 BE 为$\odot O$的直径,
所以$\angle BCE=90°$.
又因为 CD 是$\triangle ABC$ 的高,所以$\angle ADC=90°$.
所以$\angle ADC=\angle ECB$.
又因为$\angle A=\angle E$,所以$\triangle ADC\backsim\triangle ECB$. 所以$\frac{AC}{EB}=\frac{CD}{BC}$.
所以 $AC\cdot BC=BE\cdot CD$;
(2)在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,因为 $CD=6$,$AD=3$,$BD=8$,

$AC=\sqrt{CD^2+AD^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,$BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$. 由(1)知 $AC\cdot BC=BE\cdot CD$,所以 $3\sqrt{5}\times 10=BE\cdot 6$. 所以 $BE=5\sqrt{5}$. 所以$\odot O$的直径为 $5\sqrt{5}$.

中考能力培养
ZHONGKAONENGLIPEIYANG

一、运算求解能力

能力点津：本能力在本讲中考查的典型内容为求圆周角、圆心角的度数及求圆中一些线段、弦的长度，应对策略为综合运用相似、三角函数、方程等知识，根据本讲的定理、推论进行计算.

考例 1　(2007·济南)已知：如图 1-2-5，$\odot O$ 的半径为 3，弦 AB 的长为 4. 求 $\sin A$ 的值.

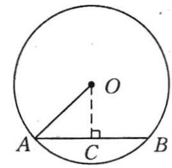


图 1-2-5

思路分析：证明两三角形全等是证明两线段相等的常用方法；半径、弦的一半、弦心距构成的直角三角形是求解圆中线段、角的基本数学模型.

解：过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，则 $AC=BC$.

$\because AB=4$，$\therefore AC=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

$\sin A=\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

考例 2　(2006·绵阳)如图 1-2-6，AB 是 $\odot O$ 的直径，BC、CD、DA 是 $\odot O$ 的弦，且 $BC=CD=DA$，则 $\angle BCD=$(　　)

A. 100°　　B. 110°　　C. 120°　　D. 135°

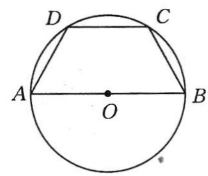


图 1-2-6

解析：$\because BC=CD=DA$，$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}$，$\therefore \angle BCD=120^\circ$.　答案：C

二、推理论证能力

能力点津：本能力在本讲中所考查的典型内容为证明圆中的弧相等、角相等、弦相等或线段相等，对学生的推理论证能力要求较高，应对方法为灵活运用所学定理、推论，通过添加恰当的辅助线，如过圆心作弦的垂线，构造直径所对的圆周角等，顺利解决问题.

考例 3　(2007·德州市)如图 1-2-7，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，$AC=BC$，D 为 $\odot O$ 中弧 AB 上一点，延长 DA 至点 E，使 $CE=CD$. (1)求证：$AE=BD$；

(2)若 $AC\perp BC$，求证：$AD+BD=\sqrt{2}CD$.

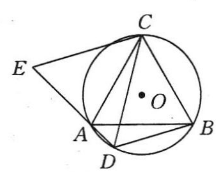


图 1-2-7

证明：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=\angle CBA$，在 $\triangle ECD$ 中，$\angle CED=\angle CDE$.

$\because \angle CBA=\angle CDE$(同弧上的圆周角相等)，$\therefore \angle ACB=\angle ECD$.

$\therefore \angle ACB-\angle ACD=\angle ECD-\angle ACD$，$\therefore \angle ACE=\angle BCD$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，$\angle ACE=\angle BCD$，$CE=CD$，$AC=BC$，

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD$. $\therefore AE=BD$.

(2)若 $AC\perp BC$，$\because \angle ACB=\angle ECD$，

$\therefore \angle ECD=90^\circ$，$\therefore \angle CED=\angle CDE=45^\circ$，$\therefore DE=\sqrt{2}CD$.

又$\because AD+BD=AD+EA=ED$，$\therefore AD+BD=\sqrt{2}CD$.

方法技巧：同弧（等弧）所对的圆周角相等是证明角相等的一个重要方法，一定要牢牢掌握.

应试规律点津 YINGSHIGUILÜDIANJIN

1. 考点导航

考点	考点要求
垂径定理	理解垂径定理，并能抓住图形特征，灵活应用
圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	掌握圆心角、弧、弦、弦心距的转换方式并能应用
圆周角定理	会利用圆心角、圆周角的定义及它们之间特有的关系，解证与角、线段相关的几何问题

2. 规律点津

垂径定理及其推论是圆的对称性的重要体现，因此在中考试题中出现过很多以垂径定理为内容的探究结论的开放性题目. 在图形运动变化中探究规律也是考查的热点，利用垂径定理及其推论解决实际问题也是中考命题中常见到的.

圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系通常与圆的其他知识综合在一起考查，有时也会以填空题、选择题的形式考查.

圆周角的定义及其定理是中考考查的重要内容，一般是考查圆心角和圆周角的关系，主要题型是选择题、填空题. 有时和圆的其他知识甚至方程的知识综合命题.

3. 策略技巧

1. 由垂径定理及其推论，给我们提供了几种常见的辅助线：

(1)过圆心作弦的垂线，得弦的中点及弦所对弧的中点.

(2)有弦的中点时，常连结过弦中点的半径，则该半径与弦垂直，且该半径平分弦所对弧.

(3)有弧中点时，常作过弧中点的半径，则该半径必垂直于弧所对的弦，且平分弦.

其中过圆心作弦的垂线（可以是直线，也可以是半径、直径，还可以是该弦的弦心距），构造出垂径定理的基本图形，这条辅助线的功能还不只局限于产生垂径定理的推论，当我们连结弦的端点和圆心（即过弦的一个端点的半径）时，便出现了一个直角三角形，进而通过勾股定理或解直角三角形的其他方法求弦长、半径、直径、弦心距，甚至还可以求一些相关的角的度数、三角函数和证明比例线段的问题等等.

例 1 （2006·重庆）如图 1-2-8，$\odot O$ 的直径 CD 过弦 EF 的中点 G，$\angle EOD=40°$，则 $\angle DCF$ 等于（　　）

A. 80°　　B. 50°　　C. 40°　　D. 20°

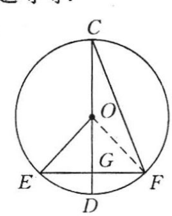


图 1-2-8

解析：连结 OF，

$\because$ $\odot O$ 直径 CD 过 EF 的中点 G，

$\therefore$ $\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{DF}$. $\therefore$ $\angle EOD=\angle DOF$，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com