组合数学基础

毛经中 编著

华中师范大学出版社

组合数学基础

毛经中　编著

华中师范大学出版社

组 合 数 学 基 础

毛经中　编著

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

华中师范大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张12.875　字数 330 千字

1990年 6 月第 1 版　1990年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-5622-0514-0/O·56

印数：1—2000　　定价：3.25元

说　明

本书是作为数学专业高年级学生组合数学教材而编写的。最初于1983年印出，后来经教学实践作了一些修改。由于编者才疏学浅，错漏之处必然不少，切望得到指正。

作为数学专业高年级学生的教材，应有较多的余地、提供较多的材料以供有研究能力的学生进一步钻研，引导学生关心当前的数学发展状况。因而教材本身可写得简短些，精炼些。有些简单的课题可让学生自己研究，或者在教学中由教师引导学生去研究。本书所写的材料涉及面较广，不少专题写得很简单，有的课题只在习题中出现了一下，这些是读者在读这本书时应当留心的。

作为教材，一学期，可选讲前九章，后面几章作为资料。带*号的章节初学者可略去不学。习题中带*号者也是较困难的，初学者也可以不做。但做一定数量的习题对于学好组合数学是十分必要的。

随着数学的不断发展，教材也应当不断地修改，以跟上前进的步伐。编者希望能在今后的教学实践中不断地得到各方面的帮助，使这本教材改得更好，使它在普及组合数学知识方面起一点作用。

编　者

1989年12月

目　录

绪 论

组合数学是一门古老而又年青的科学。

组合数学有悠久的历史，其渊源可追溯到一些古典的数学游戏中．目前公认我国最早给出一些组合问题的解答，例如有关3阶幻方的结果就记录在河洛图上．

但长期以来由于缺乏生产刺激，组合学的进展一直十分缓慢．虽然18世纪以后提出了较多的组合数学方面的问题进行讨论，也吸引了不少著名数学家如欧拉、哈密尔顿、寇克满等人进行研究，但正式形成一门独立的数学学科还只是近50多年来的事情．由于20世纪中叶以来出现了许多新兴的应用和理论学科，例如计算机科学，通讯网络，信息编码，运筹学，试验设计等，在这些学科的推动下，也由于它自身内部不停息的发展的要求，古老的组合数学焕发了青春，以迅猛的速度蓬勃发展起来．目前它不仅成为纯粹科学和应用科学中十分重要的一门独立的学科，而且它自身已发展出了不少独立的分支，例如图论，组合设计，组合计数方法，组合最优化，组合群论，拟阵，组合编码理论，格论等等．组合数学的思想和技巧不仅在数学的其他分支中被采用，而且还涉及到许多社会科学及工艺美术领域，其影响极为广泛．

目前，组合数学正处在一个大发展时期，对什么是组合数学？组合数学的研究对象是什么？其研究范围如何？等一系列基本问题，尚无一致的意见．从一些权威的著作中可见，比较倾向于下面这种看法：组合数学是研究一个对象集合到一个具指定结构的有限抽象集满足一定条件的映射，即研究所谓的格局，研究

(1) 存在性（一定的格局存在的条件）；

(2) 计数与分类（在存在时共有多少？分类如何？）；

(3) 构造（如何具体构造出一定的格局？如何产生出全部的格局？）；

(4) 优化（依一定的要求找出最优或较优的格局）.

目前组合数学存在的问题是尚无一个统一的理论、方法来处理这众多的组合学问题. 但是也有一些较为成熟的组合计数方法，它们组成所谓组合分析，即本书前九章的主要内容。但多数组合学的问题的解决都需要灵活的技巧、经验和观察分析能力. 试看以下几个例子.

例1 3阶幻方的构造.

如何把数字1,2,…,9填到一个3×3的方阵中去，使得每行、每列、每条对角线上三个数字之和均相等？

a	b	c
d	e	f
g	h	k

为了解决这个问题，可设想此9个数字已经填入3×3方阵之中如上图所示. 首先，由$1+2+\cdots+9=45$，这正好是方阵中3行元素之和，也是其3列元素之和，因而可知必须每行、每列、每条对角线上3个数字之和均为15. 其次，中心数字e位于一行、一列及2条对角线上，由此知e须和其他4个数偶之和均等于15，不难算出$e=5$. 又因左上角数字a位于一行一列及主对角线上，因而应可与另外3个数偶相加得出15，故可知$a\neq1$或9，也不可能$a=3$或7，于是a可取2,4,6,8中任一个值. 例如取$a=8$，$b=1$，则由行、列对角线和均等于15可算出必须(依次)：$g=6$，$k=2$，$f=9$，$h=7$，$b=3$，$c=4$. 不难验证，我们确实得到了一个幻方.

但这个问题解决后，接着就又产生了这样的问题：3阶幻方有几个？它们之间关系如何？如何产生所有的3阶幻方？4阶，5阶，…，一般言之n阶幻方如何构造？

例 2　在任何 6 人小组中或者可找到 3 个人他们相互都认识，或者可找到 3 个人他们彼此互不相识。

这里我们把相识理解为相互的。此问题可化成这样一个问题：在空间中任取 6 点代表这 6 个人，如两人相识，则其代表点间连一条红色边，否则连一条白色边。于是，我们需要证明在这样的空间图形中必存在一个同色边组成的三边形。

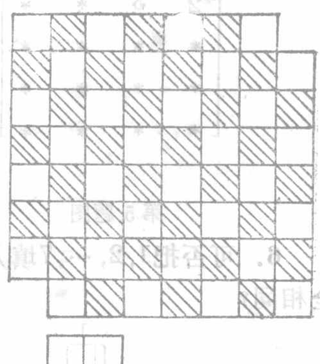
设用 a, b, c, d, e, f 代表这 6 个人，同时也标记其代表点。于是在 a 与 b, c, d, e, f 之间所连的 5 条边中至少有 3 条边同色，不妨设 ab，ac，ad 同色且均为红色。于是，如果 bc，cd，db 三条边中有一条为红色边，则已得出一个由红色边组成的三边形。否则，bc，cd，db 即为一个由白色边组成的三边形。

证明了这个问题之后进一步就可提出这样的问题：在上述 6 点之间的边用 2 种颜色去染时是否一定会出现 2 个单色三边形？将 6 点改为 7 点又如何？等等。

例 3　有一个 $3\times3\times3$ 的立方体，现在要把它切成27个单位立方体，问最少需要切几刀？

答　6 刀，因为中心块的 6 个面全是切出来的。另外不难验证确实 6 刀可以完成这个工作。

例 4　棋盘的完全覆盖问题。一个去掉对角上两个小正方形的 8×8 的棋盘，可否用31个 1×2 的骨牌将它完全盖住（自然要求骨牌之间不重叠，且不能把骨牌切开）？回答是不能，理由请读者利用右图去思考。但这个问题并未结束，我们还可以讨论其他类型的棋盘可否被 1×2 的骨牌覆盖的问题，在可以覆盖时便进一步研究有多少种方式覆盖等问题。

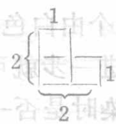


以上诸例仅是稍稍显示一下组合数学所研究的形形色色的问题，还有许多类型的问题尚未列举．但由此已可看出一点组合数学思考问题的方式以及问题的提法．

习　题

1．证明：$m\times n$ 棋盘可用 1×2 骨牌完全覆盖，当且仅当 $mn\equiv 0(\mathrm{mod}2)$．

2．证明：$m\times n$ 棋盘当 $m\equiv n\equiv 1(\mathrm{mod}2)$ 时，任意剪去一个角后一定可以用 1×2 骨牌完全覆盖．

3．证明：对任意正整数 n，从 $2^n\times 2^n$ 的棋盘中任意挖去一个方格后，一定可以用形如 

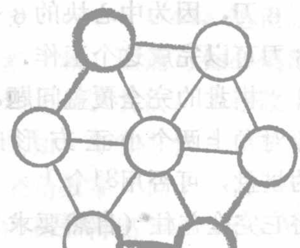
的 L_1 型图形（不重叠地）覆盖。

*4．证明：恰好存在 8 种不同的 3 阶幻方．

*5．如图，能否填完为一个 4 阶幻方？（即把1, 2, …, 16这16个数字填入其中使每行、每列、每条对角线上 4 个数字之和均相等）

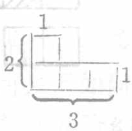
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

第 5 题图



第 6 题图

6．可否把1, 2, …, 7填入上图各圆圈中，使全部9条线上的和全相同？

7．用形如 

的 L_2 型瓦片代替 1×2 的骨牌来

考虑棋盘的完全覆盖问题。

(1) 证明：5×8棋盘可被 L_2 型瓦片完全覆盖；

(2) 证明：5×4 及 6×6 棋盘均不可能被 L_2 型瓦片完全覆盖；

*(3) 导出 $m\times n$ 形棋盘可被 L_2 型瓦片完全覆盖的充要条件。

*8. 正整数 n 与10互素，试证明存在形如 $11\cdots1$ 的整数是 n 的倍数。

9. 从一个 $m\times n$ 的棋盘左下角格子出发沿水平和垂直两个方向移动使得经过每个格子一次且仅一次，最后可到达右上角的格子，当且仅当 m 和 n 中至少一个是奇数。

10. 有3分和5分两种类型的邮票，那么对任何大于或等于8分的邮费均可以用这两种类型的邮票组成。

11. 一个水龙头有 n 个人等待打水，设第 i 个人的水桶容量为 c_i 立方米。问如何安排这 n 个人的打水顺序使之总的等待时间最短？

第一章　初等计数函数

§1　集合、关系、序、映射

为了方便，此处列出集合论中的一些简单概念及符号，并不涉及作为数学基础的集合论中的一些专门知识．关于自然数的常用性质，则假定为已知．

人们把所要研究的对象称为元素或元，而把某些元素的总体称为集合或集．有时也以集合作为一个对象看待，即把它看成元素，以这些集合作为元素组成的某类对象的全体，也称为集族．也可称为集合．因而，在一种场合下被作为元素看待的对象，在另一种场合下，它本身可能又是由另一些元素组成的集合．因而一个对象，究竟是元素还是集合，须依所研究的具体问题而定．

此后，如无特殊声明，集合中的元素总认为是彼此不相同的．

一般情况，用大写英文字母表示集，用小写英文字母表示元素．元 a 在集 A 中或说集 A 含有元 a，记作 $a\in A$ 或 $A\ni a$，元 a 不在集 A 中或说集 A 中不含有元 a，则记为 $a\notin A$ 或 $A\not\ni a$．如果对 $\forall a\in A$，均有 $a\in B$，则称集 A 为集 B 的子集，或说集 B 是集 A 的包集．记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，如果集 A 与集 B 间成立关系 $A\subseteq B$ 同时又有 $B\subseteq A$，则称集 A 与集 B 相等，记为 $A=B$，否则记为 $A\neq B$．如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集，或说 B 是 A 的真包集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．不含任何元素的集合称为空集，记为 ϕ，显然 $\phi\subseteq A$，对所有集 A 均成立．不是空集的集合称为非空集．对任意非空集 B 均有 $\phi\subset B$．

一个集合的给定方式，通常有下列几种：

1. 列出集 A 中的全部元素．例如：

$A:=\{1,2,3\}$表示集合 A 含三个元素 $1,2,3$，而且 A 中只含这三个自然数．此处符号“$:=$”表示用其右节来定义其左节．

2. 给出一个 A 中元素所具有的特征性质 P，记为 $A:=\{x|x$ 合于 $P\}$，表示所有具性质 P 的元素全在 A 中，而不合于性质 P 的元素均不在 A 中．例如 $B:=\{x|1\leqslant x\leqslant 10$ 且 $3|x\}$．表示在1与10之间（包括1与10）的所有可被3整除的自然数的总体形成集合 B，此处 $3|x$ 表示 x 是3 的倍数．

3. 用集合之间的运算来由已知集合构造新集合．

集合之间最基本的运算有如下三种：

并：$A\cup B:=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为 A 与 B 的并集．

交：$A\cap B:=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为 A 与 B 的交集．

差：$A\backslash B:=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$．称为 A 对 B 的差集．

其中并与交两个运算可推广到多元情形，甚至无穷多个集合的情形，设 I 是一个指标集合，已知集族 $\mathscr{A}=\{A_i|i\in I\}$,则可定义：

$$\bigcup_{i\in I} A_i:=\{x|\exists i\in I \text{ 使 } x\in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i:=\{x|\forall i\in I \text{ 均有 } x\in A_i\}$$

定义1.1 对任意自然数 n，第 i 个元素是 a_i 的 n 个对象的序列称为有序 n—重组简称 n—组，记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，两个有序 n—重组称为是相等的，当且仅当对 $\forall i$，$1\leqslant i\leqslant n$，它们的第 i 个分量都相同．当 $n=2$ 时，有序2—重组也称为有序偶．

定义1.2 设已有集合的族$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$n>0$，则由集合 A_1 直到集合 A_n 的笛卡儿积或者交叉积指的是集合

$$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|\forall i,1\leqslant i\leqslant n,a_i\in A_i\}$$

记作 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i:=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$．如对 $\forall i$ 均有 $A_i=A$，则 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$ 记为 A^n．

显然，如果 $\exists i,(1\leqslant i\leqslant n)$使$A_i=\phi$,则 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i=\phi$．须注意的

是，一般而言，笛卡儿积不具有交换性，即 $A\times B\neq B\times A$（当$B\neq A$时）. 例如：$A=\{1,2\}$ $B=\{0,1\}$，则

$$A\times B=\{(1,0),(2,0),(1,1),(2,1)\}$$

$$B\times A=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$$

此时$A\times B\neq B\times A$.

定义1.3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为已知的 n 个集合，则 $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ 的任一个子集合 R 称为是在 $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的一个 n—元关系. 如 $R=\phi$，则称 R 为一个空关系或虚关系；如果 $R=\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$，则称 R 为全关系. 如果对 $\forall i,1\leqslant i\leqslant n$ 均有 $A_i=A$，则称 R 为在 A 上的一个 n 元关系. $A\times B$ 上的二元关系也称为由A到B的关系.

上面我们给出了一般的 n 元关系的定义，而且回避了笛卡儿积的结合律问题，只是为了说清楚各个概念的来源，实际上我们今后所关心的，最常使用的是某已知集合 A 上的二元关系.

定义1.4 设 R 是在集合 A 上的二元关系. 则

(i) R 是自反的，当且仅当对 $\forall x\in A$ 都有$(x,x)\in R$.

(ii) R 是非自反的，当且仅当对 $\forall x\in A$ 都有$(x,x)\notin R$.

(iii) R 是对称的，当且仅当对 $\forall x,y\in A$，由$(x,y)\in R$ 可得出$(y,x)\in R$.

(iv) R是反对称的，当且仅当对 $\forall x,y\in A$，由 $(x,y)\in R$ 及$(y,x)\in R$ 得出$x=y$.

(v) R 是传递的，当且仅当对 $\forall x,y,z\in A$，由$(x,y)\in R$ 及$(y,z)\in R$ 得出$(x,z)\in R$.

定义1.5 在集合 A 上的二元关系 R 是一个偏序（也称为半序）关系，如果R是自反的，传递的及反对称的. 有序偶(A,R) 称为是一个偏序集. 也常简称 A 为一个偏序集. 关系 R 也称为是在 A 上的一个偏序. 如果对 $\forall x,y\in A$ 均或者$(x,y)\in R$ 或者$(y,x)\in R$，则称 A 为全序集，也称 R 为 A 上的一个全序.

定义1.6 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，如果 R 是传递

的及非自反的，则称 R 是一个拟序.

定义1.7 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，如果 R 是自反的，传递的及对称的，则称 R 是在 A 上的一个等价关系.

定义1.8 设 R 是集合 A 上的一个等价关系，对每一个 $a\in A$，定义集合$[a]_R$ 为$\{x\mid(a,x)\in R\}$且称它为关于 R 的 a 的等价类.

总有$[a]_R\neq\phi$ 成立. 因为至少 $a\in[a]_R$，如果显然是讨论关于 R 的等价类，也可简单地用$[a]$来代替$[a]_R$.

定理1.1 设 R 是集合 A 上的一个等价关系，则(i) 对 $\forall a$、$b\in A$，或者$[a]=[b]$，或者$[a]\cap[b]=\phi$.

(ii) $\bigcup\limits_{x\in A}[x]=A$. ▮

直接使用等价关系的定义，不难证明上述结论. 因而，留作练习.

定义1.9 非空集合 A 的划分 π 是 A 的非空子集的族且具有如下性质：(i)对$\forall S$、$T\in\pi$，或者 $S=T$，或者 $S\cap T=\phi$.

(ii) $A=\bigcup\limits_{S\in\pi}S$，划分中的元素称为块，也称为类.

由定理1.1及定义1.9很易看出：由集合 A上的一个等价关系可以导出 A 的一个划分，反之，由集合 A 的任一个划分，也可导出集合 A 上的一个等价关系，此二者是相互决定的，详细讨论由读者自己进行.

定义1.10 设 A 与 B 为二已知集合，则由 A 到 B 的函数（或者映射，或者变换）f 指的是一个由 A 到 B 的关系，而且它具有性质：对每一个 $a\in A$，均存在唯一的 $b\in B$ 使$(a,b)\in f$. 此时也记为 f：$A\longrightarrow B$. 如果$(a,b)\in f$，则我们也写成 $f(a)=b$，也称 a 为函数 f 的自变量，b 为函数关于自变量 a 的值，也称为 a 的像. 如果 f 是由 A 到 B 的函数，则称 A 为定义域($domain$)，B 为值域($codomain$).

定义1.11 设 f 是由 A 到 B 的函数，$A'\subseteq A$，则 $f(A')=\{f(x)\mid x\in A'\}\subseteq B$，称 $f(A')$为在映射 f 下 A' 的像，而 $f(A)$则

称为函数 f 的像.

定义1.12 设 f 是一个函数 f: $A \longrightarrow B$, 则

(i) 如果 $f(A)=B$, 则称 f 是满射(映上的)(surjective, onto).

(ii) 如果对 $\forall a, a' \in A$, 由 $a \neq a'$ 可得出 $f(a) \neq f(a')$, 则称 f 为单射(映入的, 一对一的)(injective, one-to-one).

(iii) 如果 f 既是满射, 又是单射, 则称 f 为双射(bijective).

须注意的是, 在上述函数定义中不包含通常习惯的多值函数, 即对一个元 $a \in A$ 有多个元 $b \in B$ 使 $(a, b) \in f$ 的情形, 被排除在外. 对离散数学结构, 作此限制是只会有好处的.

§2 计数的和、积法则

定义1.13 如果两个集合 A 与 B 之间存在一个双射, 则称 A 与 B 等势, 记为 $A \sim B$, 等势的集合又称为具相同的势. 势就是等势诸集的公共性质.

今后用 Z 表示全体整数所组成的集. 用 N 表示全体自然数所组成的集且记 $N^0 = N \cup \{0\}$, 称 $\{x \mid m \leqslant x \leqslant n, x \in Z\}$ 为 Z 的 m 至 n 截段, 记为 $[m, n]$. 又记

$$[m, \infty) := \{x \mid m \leqslant x \leqslant \infty, x \in Z\}, [m, n) := \{x \mid m \leqslant x < n, x \in Z\},$$
$$(m, \infty) := \{x \mid m < x < \infty, x \in Z\}.$$

定义1.14 如果集 A 与 $[1, n]$ 等势, 则称 A 为一个 n 元集. 空集和 n 元集 $(n \in N)$ 统称为有限集. 不是有限集的集合称为无限集.

由上述定义可知, 当 A, B 是有限集时, $A \sim B$ 的充要条件是 A 与 B 均有相同的元素个数. 故此时 A 的势就是 A 所含的元素个数, 简称元数. 对无限集, 势的作用类似于有限集的元数的作用. 今后无论 A 是有限集还是无限集, 其势均记为 $|A|$.

定理1.2(和则) 若有限集 A、B 符合 $A \cap B = \phi$, 则 $|A \cup B|$