

學力靜論理

蘇聯尼軻雷原著
何志奇陳毓晉譯述

理 論 靜 力 學

E. L. Nekolae 原 著
何志奇陳毓晉譯述

開 明 · 書 店 印 行

理 論 靜 力 學

二十九年六月初版

三十六年一月再版

每冊定價國幣二元

原 著 者

E. L. Nekolae

譯 述 者

何志奇 陳毓晉

發 行 者

開 明 書 店

代表人 范洗人

印 刷 者

開 明 書 店

有 著 作 權 ■ 不 准 翻 印

序

本書原著人尼柯雷氏，係蘇聯莫斯科大學教授，憑其十餘年教學之經驗，深知學生中程度疏淺者，多半由於在中學時代未經完美訓導之故，乃開始著作本書。其目的不求高深，但求普遍，使大學學生讀之，不嫌其淺，高中學生讀之，不覺其深，而均可自行補習參考也。本書自1934年經蘇聯最高人民教育委員會審定得爲工科大學教科書後，蘇聯各工業專校，技術航空學校及普通工學院，皆以之作教授材料。

譯者因見於目下國中土木、航空兩科，正在發育之際，靜力學實爲其基本主要知識；而本國缺乏是項分類完全之書籍，故翻譯之，以供各界參考。茲略述本書之編制於下：

本書共分十一章，可歸納爲三部；其中之一、二及十一各章，敘述靜力學之普通性質，三、四、五、六各章，敘述關於平面上各靜力之性質，而七、八、九、十各章，則敘述關於立體上各靜力之性質。對於靜力學之大概情形，已相當完全，足夠供初學者研究。惟譯者才疏學淺，書中難免有錯誤之處，尚乞海內學者多多指教是幸。

何志奇 陳毓晉

目 錄

第一章 總 論

1. 引言 (1) 2. 有向量 (2) 3. 矢 (2) 4. 矢之相等 (3) 5. 數矢之和 (3)
6. 兩矢之差 (4) 7. 矢之倍數 (5) 8. 軸 (7) 9. 矢在軸上之射影 (7)
10. 定理 (8) 11. 矢在平面上之射影 (9) 12. 數矢之幾何和在一已知軸
上之射影 (10) 13. 數已知矢之幾何和在一定平面上之射影 (11)

第二章 靜力學基本定律

- 14 定律 (13) 15. 分子 (13) 16. 靜力學第一定律 (14) 17. 直線等速
運動 (14) 18. 力 (14) 19. 施力點 (14) 20. 力之計量 (14) 21. 力之
單位 (15) 22. 力之方向 (15) 23. 力之平衡 (16) 24. 內力與外力 (16)
25. 剛體 (17) 26. 靜力學第二定律 (17) 27. 靜力學第三定律 (17)
28. 靜力之相等 (19) 29. 合力及分力 (19) 30. 靜力學第四定律 (19)
31. 靜力學第五定律 (20) 32. 作用與反作用 (20) 33. 萬有引力 (20)
34. 拉繩之作用 (21) 35. 平面所受之壓力及發生之反作用 (21) 36. 支
點所受之壓力及其因而發生之反作用 (21) 37. 摩擦力 (22) 38. 應力
(24) 39. 非剛體之平衡狀態 (25) 40. 靜力學第六定律 (25) 41. 合力
之求法 (26) 42. 力之平行四邊形法 (26) 43. 力之三角形法 (27) 44.
力之分解法 (27) 45. 力之多角形法 (28) 46. 一點上數力之平衡條件
(30) 47. 例題 (30) 48. 力在一已知軸上之射影 (33) 49. 一力同時在
兩垂直軸上之射影 (34) 50. 用力之射影求位於同一平面且作用於同一
點上諸力之合力法 (34) 51. 例題 (35) 52. 位於同一平面作用於一點上
諸力平衡時之公式 (37) 53. 例題 (38) 54. 作用於一線上諸力之加法
(39) 55. 數力之作用線能交於一點之合力 (40) 56. 不平行三力平衡時
之定理 (41) 57. 例題 (42)

第三章 力 偶

58. 平行且同方向兩力之合力 (44) 59. 例題 (46) 60. 平行而方向相反且大小不等兩力之合力 (47) 61. 力偶 (48) 62. 力偶之臂 (48) 63. 力偶矩 (48) 64. 力偶矩之單位 (49) 65. 定理 (49) 66. 力偶之相等 (50) 67. 數力偶之合力偶 (52) 68. 諸力偶矩之代數和爲零時此諸力偶呈平衡狀態 (54) 69. 例題 (54)

第四章 位於同一平面上任意位置諸力之性質

70. 力矩 (51) 71. 移動一力於一定點上之性質 (57) 72. 依數力之原來方向移動諸力於同一平面上任意位置之性質 (58) 73. 移動呈平衡狀態諸力之公式 (60) 75. 數力移動後呈一力偶時之情形 (61) 76. 定理 (62) 77. 一力對於兩垂直軸原點之力矩與其在此兩軸上射影之關係 (62) 78. 靜力學能解決之問題及非靜力學能解決之問題 (63) 79. 例題 (64) 80. 求支點所發生反作用之計算題 (66) 81. 例題 (67) 82. 合力作用線之公式 (74) 83. 例題 (75) 84. 位於同一平面上諸平行力之合力 (77) 85. 例題 (79)

第五章 力之圖解法

86. 力之不閉多角形 (84) 87. 例題 (86) 88. 力之閉多角形 (87) 89. 連鎖多角形 (89) 90. 位於同一平面上諸力作用時之情形 (89) 91. 例題 (89) 92. 平衡折線形 (91) 93. 定理 (91)

第六章 屋架及橋梁各樑上荷重之圖解法

94. 馬克斯韋爾及克利蒙那之張力圖 (93) 95. 李脫計算法 (97)

第七章 位於空間任意位置作用於同一點上諸力之合力

96. 力之多角形法及力之平行六面體法 (100) 97. 力在一軸上之射影 (101) 98. 力在三垂直軸上之射影 (102) 99. 用射影法求作用於一點諸力之合力 (103)

第八章 位於空間諸力偶之合力偶

100. 力偶相等之條件 (106) 101. 定理 (106) 102. 力偶矩爲一有向量

(108) 103. 力偶之合力及力偶之平衡 (109)

第九章 對於點之力矩及對於軸之力矩

104. 對於點之力矩 (114) 105. 對於軸之力矩 (115) 106. 對於點之力矩與對於軸之力矩間之關係 (116) 107. 數力對於一點諸力矩之主力矩 (118) 108. 數力對於一軸諸力矩之主力矩 (118) 109. 數力對於一點之主力矩及對於一軸之主力矩間之關係 (119)

第十章 位於空間任意位置諸力之性質

110. 移動一已知力於一點後之性質 (121) 111. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之合力 (122) 112. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力呈平衡時之情形 (124) 113. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力成一力偶時之情形 (124) 114. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力成一主矢時之情形 (125) 115. 定理 (126) 116. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力成一原動力時之情形 (128) 117. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之主力矩對於移動中心地位之關係 (130) 118. 用力在軸上之射影代表此力對於同軸之力矩之公式 (131) 119. 用射影法以求諸力之主矢及主力矩 (133) 120. 空間任意位置諸力之平衡公式 (137) 121. 支於兩不動點物體之平衡條件及支點所發生反作用之求法 (139) 122. 例題 (141) 123. 用實用法以求諸力之主矢及主力矩 (144) 124. 空間諸平行力之合力及其平衡公式 (146) 125. 用轉輾加法求空間諸平行力之合力 (151) 126. 諸平行力之中心點 (153) 127. 諸平行力中心點之坐標 (155) 128. 例題 (157)

第十一章 重 心

129. 物體之重心及體積之重心 (159) 130. 面積之重心及平面形之靜力矩 (161) 131. 長度之重心 (163) 132. 重心及靜力矩之基本定法 (65) 133. 例題 (168) 134. 戈爾登第一定理 (170) 135. 戈爾登第二定理 (172) 136. 普通各種幾何形之重心 (173) 137. 用向徑多角形法以定重心 (179)

第一章

總論

1. 引言 凡研究自然界各種現象之學問，謂之自然科學，惟其範圍甚廣，包羅極多，往往更事分科，而天文學，地質學，生物學，礦物學，化學，物理學之名因是出也。物理學又分爲力學，熱學，聲學，光學，電磁學等諸部分，而力學中更劃爲理論，實用兩界，剖成靜力學，運動學，動力學諸科。然宇宙間之事物繁多，吾人之精力有限，定難普遍研習，祇得各就其興趣之相近，實用之需要，分頭研究。先求明晰其理，再求附合於事實，而研究之範圍愈小，則所得之學問愈精，故近世學者皆埋頭於一部分之工作，而登峯造極，其意蓋不求博，但求專精也。

靜力學者研究物體靜止時之學也。理論靜力學則研究物體靜止時一切普通現象及定律，而再由定律演出其他各種公式，用以解決物體靜止時之種種問題。惟關於工業上之各種問題，如屋基之牢固與否？機械動作之迅速與否？均由實用力學，運動學或動力學等所論及，不在靜力學範圍之內。本書純係研究物體在靜止或平衡時之各種狀況，比之力學中其他部

分，較為簡單，同時亦最為重要，故研究力學非自靜力學開始不可，是以普通力學書中，往往列靜力學於首篇也。

靜力學中最普通簡單之定律，在十七世紀前早已成立，惟範圍甚為狹小，不能達到其應有之重要性。自十七世紀微積分學發明後，各種科學均突飛猛進，靜力學亦豁然開朗，瞬息擴大，較之昔日，誠不啻小巫之見大巫。然科學有進無退，他日讀者諸君努力研究，為科學界放一異彩，亦意中事也。

2. 有向量 在物理學中尤其在力學中所述之量(價值)，乃為有方向之量，除其數值外，尚有一指定之方向，普通稱之為有向量。此種有向量在力學中之地位甚為重要，與力學之關係極為密切，如力，速度等，均為有向量也。本書所論之有向量，僅其中之最主要最基本且為靜力學所需要者，讀者如欲研究複雜高深之有向量，考之“矢算學”可也。

3. 矢 凡表示有向量之線段均名為矢。如圖 1，設有一直線段 $\overline{AB}$ ，其長度為 l ，方向乃自 A 至 B ，圖中已有 B 點上之箭頭表之；此種已有量及方向之線段，即一最明瞭最簡單

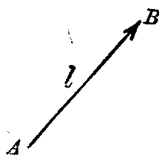


圖 1

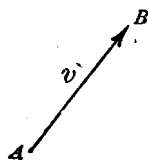


圖 2

之矢(有向量)也。每一矢既必有一定之量及方向,作時可取一直線段 $\overline{AB}$, 如圖 2, 使其長等於有向量之長度 v (長度之單位可由吾人隨意定之), 方向爲有向量之方向, 而用 B 上之箭頭表明之。圖中之 A 點爲矢之起點, 名曰矢尾。 B 點爲矢之終點, 名曰矢首。在文字或語言上矢之稱呼有兩種: 即一字母 $\vec{v}$ 或兩字母 $\overline{AB}$, 惟用兩字母時, 須以前者 A 表其矢尾(起點), 後者 B 表其矢首(終點), 故若其方向爲自 B 至 A 時, 則應書作 $\overline{BA}$ 而非 $\overline{AB}$ 也。

4. 矢之相等 兩個或兩個以上之有向量相等時, 非但其數量相等, 且其方向相同。如圖 3, 若 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 爲兩相等之矢, 則此兩線段之長度相等, 互相平行, 且其方向相同。此種相等之矢如 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, 可名之曰同位等矢 (大小相等方向相同),

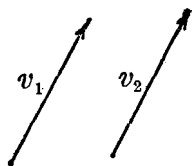


圖 3

算式上仍可以普通之等號表之, 惟前後兩項各加一短劃於其上, 如:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2.$$

上述之等式, 可名曰幾何式地相等。

5. 數矢之和 欲求數個有向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ 之和, 可將各矢之尾與他矢之首次第啣接, 然後自第一矢 $\vec{v}_1$ 之起點與最後矢 $\vec{v}_4$ 之終點聯一直線, 即得所求之和 $\vec{v}$ 。如圖 4, 任意取一點 a , 由 a 作 $\overline{ab}$ 線段, 使其幾何式地等於 $\vec{v}_1$, 即長短與

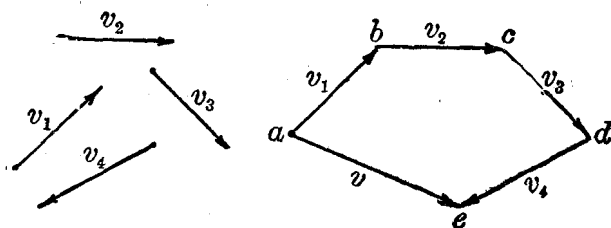


圖 4

$\bar{v}_1$ 相等，方向與 $\bar{v}_1$ 相同，再由 b 依次作 $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ ，各使幾何式地等於 $\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 。聯接 ae 以 $\bar{v}$ 表之，其方向為自 a 至 e ，而 $\bar{v}$ 即所求諸有向量之和，名曰幾何和。而 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 同時亦可云各為 $\bar{v}$ 之分矢。此種加法名曰幾何加法，在算式上仍用普通符號，惟在其和及各加數上加一短劃，如：

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4.$$

若有 n 個有向量 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ 之幾何和為 $\bar{v}$ 時，同樣可寫作：

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_n.$$

6. 兩矢之差 若已知 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 兩矢，欲求其差時，如圖

5，可任意取一 a 點，由 a 引 $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ 兩線段，各使幾何式地等於 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 。再聯 $\overline{bc}$ ，其方向為自 b 至 c ，用

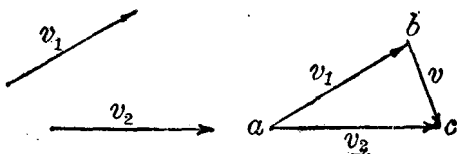


圖 5

字母 $\bar{v}$ 表之，由上節可知 $\bar{v}, \bar{v}_1$ 兩矢之幾何和等於 $\bar{v}_2$ ，故 $\bar{v}$ 即

爲 $\bar{v}_2, \bar{v}_1$ 兩矢之幾何差。此種減法，名曰幾何減法。算式中仍用普通符號，惟在被減數，減數及差上，各加一短劃。如：

$$\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

又由上節可知 $\bar{v}$ 同時爲 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 兩矢中之一矢 ($\bar{v}_1$ 或 $\bar{v}_2$) 與另一矢 ($\bar{v}_2$ 或 $\bar{v}_1$) 平行且方向相反之矢之幾何和也。

7. 矢之倍數 作一 $m\bar{v}$ 矢，使其數量等於一已知矢 $\bar{v}$ 之 m 倍，如圖 6 (m 爲一任意正數)，方向則與已知矢 $\bar{v}$ 之方向相同，如此而得之 $m\bar{v}$ 矢，即 $\bar{v}$ 矢與 m 數之倍矢。故欲

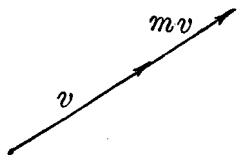


圖 6

乘一已知矢時，僅以欲乘之數乘此矢之數量，至於此矢之方向，則恆不變也。

若以一任意正數 m 乘兩等矢 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 則所得之 $m\bar{v}_1$ 及 $m\bar{v}_2$ ，仍爲兩等矢。因此二矢之方向各不變，而其數量各爲原來之 m 倍，故必仍作幾何式之相等也。

若：
$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2,$$

則：
$$m\bar{v}_1 = m\bar{v}_2.$$

由此可知，以同一任意正數乘兩等矢後，其原來之等號仍不稍變。

若以一任意正數乘已知諸矢之幾何和，則所得之倍矢，爲每一已知矢乘此數而得之諸倍矢之幾何和也。如圖 7，以幾何加法加已知諸矢 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ ，得一多邊形 $MN\bar{P}Q\bar{R}$ ，其各

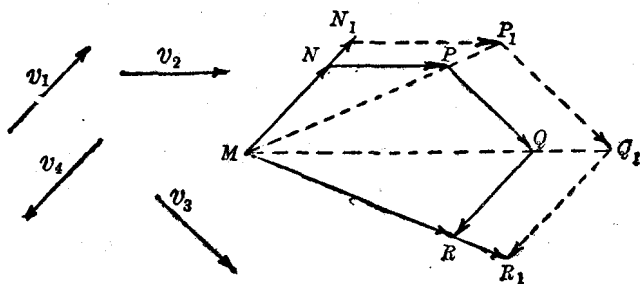


圖 7

邊均使幾何式地等於各已知矢，且 MR 為諸矢之幾何和，設以 $\bar{v}$ 代之，則：

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4.$$

再聯 $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, 並各依原來方向延長 $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ 至 N_1, P_1, Q_1, R_1 各點，使：

$$\overline{MN_1} = m \overline{MN}.$$

$$\overline{MP_1} = m \overline{MP}.$$

$$\overline{MQ_1} = m \overline{MQ}.$$

$$\overline{MR_1} = m \overline{MR}. \quad (m \text{ 爲一任意正數.})$$

即得一新多角形 $MN_1P_1Q_1R_1$ ，且與多角形 $MNPQR$ 相似（因 $\triangle MN_1P_1 \sim \triangle MNP$, $\triangle MP_1Q_1 \sim \triangle MPQ$, $\triangle MQ_1R_1 \sim \triangle MQR$ ），則多角形 $MN_1P_1Q_1R_1$ 之邊與多角形 $MNPQR$ 之邊，各自互相平行，亦即：

$$\text{多角形 } MN_1P_1Q_1R_1 = m \text{ 多角形 } MNPQR.$$

故諸線段 $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$, 各為諸已知矢 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$

之 m 倍，即各幾何式地等於 $m\bar{v}_1, m\bar{v}_2, m\bar{v}_3, m\bar{v}_4$ ，但 $\overline{MR}_1$ 爲諸線段 $\overline{MN}_1, \overline{N_1P_1}, \overline{P_1Q_1}, \overline{Q_1R_1}$ 之幾何和，所以：

$$m\bar{v} = m\bar{v}_1 + m\bar{v}_2 + m\bar{v}_3 + m\bar{v}_4.$$

故以一任意正數乘諸已知矢之幾何和時，等於以此數乘每一已知矢之和也。

2. 軸 軸乃一有定方向之無限直線，普通用 x, y 等字母表示之。

9. 矢在軸上之射影 今欲射影一已知矢 $\bar{v}$ 於一已知之軸 x 上，其方向在圖 8 中均有箭頭作記。A 爲矢 $\bar{v}$ 之起點，B 爲矢 $\bar{v}$ 之終點，從 A, B 兩點各作平面 P, Q，使垂直於軸 x ，且與之相交於 a, b 兩點，則 a 爲 A 點之射影，

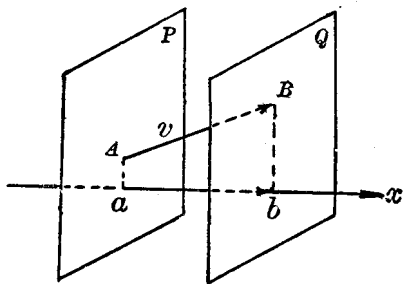


圖 8

b 爲 B 點之射影，而線段 $\overline{ab}$ 即爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影也。惟 $\overline{ab}$ 之方向，可正可負，若與軸 x 之方向相同，則爲正方向。反之，若與軸 x 之方向相反，則爲負方向。吾人如以 $\bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}$ 矢在軸 x 之射影，則：

$$\bar{v}_x = \pm \overline{ab} \quad (\text{正負號即表示其正負方向也})$$

但以上述之作法定 a, b 兩點，甚覺麻煩，大可簡單之。吾人只須從 A, B 兩點各作垂線於軸 x 上，則 $\overline{Aa}$ 交軸於 a, $\overline{Bb}$ 交軸

於 b ，而所得之線段 $\overline{ab}$ ，即為 $\overline{AB}$ 在軸 x 上之射影，而地位與前法不稍異也。

10. 定理 一已知矢在兩平行且同方向之軸上之射影相等。

已知一矢 $\vec{v}$ 及兩平行且同方向之軸 x, x' ，如圖 9，從矢 $\vec{v}$ 之起點 A 及終點 B 各作平面 P, Q ，同時垂直於軸 x 及 x' （因兩軸互相平行），則聯 P, Q 兩平面與軸 x' 之交點 $\overline{a'b'}$ ，為矢 $\vec{v}$ 在軸 x' 上之射影，而與軸 x 之交點 $\overline{ab}$ ，為矢 $\vec{v}$ 在軸 x 上

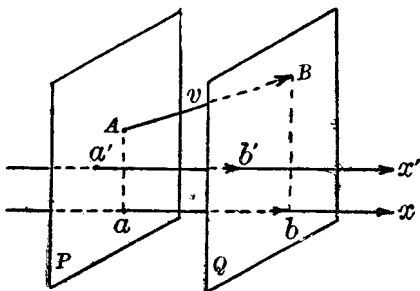


圖 9

之射影。此兩射影矢 $\overline{ab}, \overline{a'b'}$ 之方向相同（因 x 軸與 x' 軸為同方向），且按幾何定理（平行平面間之距離相等），其價值（即此兩線段之長短）亦相等。所以一已知矢在兩平行且同方向之軸上之射影相等。惟此定理只適合於已知矢及已知軸間之關係，否則又有他種之性質矣。

由上節定理可知若欲射影一已知矢於一已知軸上，有一簡單便利之作法，如圖 10，今欲求矢 $\vec{v}$ 在一已知軸 x 上之射影矢，可從 $\vec{v}$ 矢之起點 A ，作一與軸 x 平行且同方向之軸 x' ，再由 $\vec{v}$ 矢之終點 B ，作垂線交軸 x 於 b 點，則在軸 x' 上所得

之射影矢 $\overline{Ab}$ ，與矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影相等。因其與軸 x 為同方向， $\overline{Ab}$ 之方向為正，仍可以 $\bar{v}_x$ 表之。此法較前之作平面及兩垂線者更為

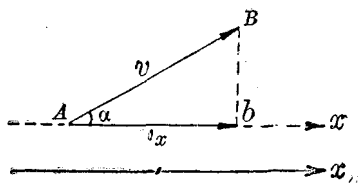


圖 10

簡單。且就直角三角形 ($\angle b$ 乃直角) ABb 中，可知：

$$\bar{v}_x = \bar{v} \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

即：矢在一定軸上之射影 = 已知矢 $\times$ 矢與軸兩方向所成角之餘弦。且射影矢之正負方向，在 (1) 式中完全由 $\cos \alpha$ 之正負值表明之。若射影矢與軸之方向相同，則已知矢與軸所成之 α 角必在 0° 與 90° 或 270° 與 360° 之間，而此角之餘弦 $\cos \alpha$ 之值，恰為正。反之，則 α 角在 90° 與 180° 或 180° 與 270° 之間，而 $\cos \alpha$ 之值恰為負。故 (1) 式實為計算射影矢之完全公式也。

11. 矢在平面上

之射影 若欲射影一已知矢於一已知平面上，其作法完全與射影一已知矢於一已知軸上相同。如圖 11，只須由已知矢 $\bar{v}$ 之起點 A

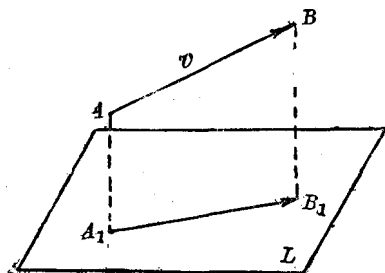


圖 11

及終點 B ，作兩垂線於已知平面 L 上，其垂足 A_1, B_1 即為 A ,

B 兩點在 L 平面上之射影，其線段 $\overline{A_1B_1}$ 即為 $\bar{v}$ 矢在 L 平面上之射影，方向乃自 A_1 至 B_1 。

12. 數矢之幾何和在一已知軸上之射影 數矢之幾何和在定軸上之射影等於各矢在同一軸上射影矢之代數和。如圖 12，已知 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 四矢，從多角形 $MNPQR$ 中，求得其

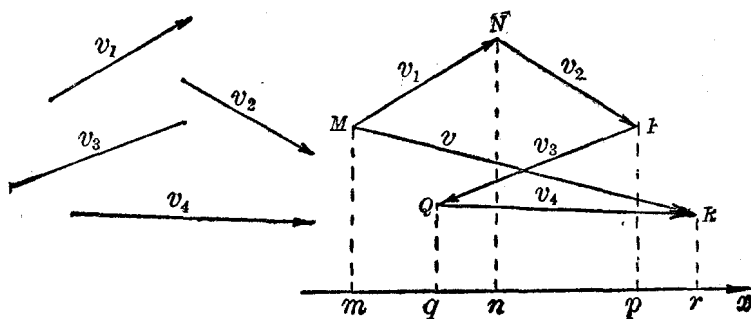


圖 12

幾何和 $\bar{v}$ (即圖中之 $\overline{MR}$)。今由 M, N, P, Q, R 諸點各作垂線 $\overline{Mm}, \overline{Nn}, \overline{Pp}, \overline{Qq}, \overline{Rr}$ 於已知之軸 x 上，若以 $\bar{v}_{1x}, \bar{v}_{2x}, \bar{v}_{3x}, \bar{v}_{4x}$ ， $\bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}$ 諸矢在軸 x 上之射影，則：

$$\bar{v}_{1x} = \overline{mn},$$

$$\bar{v}_{2x} = \overline{np},$$

$$\bar{v}_{3x} = \overline{pq}, \quad (\text{矢 } \bar{v}_3 \text{ 與軸 } x \text{ 之方向相反})$$

$$\bar{v}_{4x} = \overline{qr},$$

$$\bar{v}_x = \overline{mr}.$$