理論靜力學

蘇聯尼軻雷原著
何志奇陳毓晉譯述

理論靜力學

E. L. Nekolae 原著
何志奇陳毓晉譯述

開明書店印行

理論靜力學

二十九年六月初版　　三十六年一月再版

每冊定價國幣二元

原著者　E. L. Nekolae

譯述者　何志奇　陳毓晉

發行者　開明書店
代表人范洗人

印刷者　開明書店

(94 P.) Y　　靜

序

本書原著人尼軻雷氏，係蘇聯莫斯科大學教授，憑其十餘年教學之經驗，深知學生中程度疏淺者，多半由於在中學時代未經完美訓導之故，乃開始著作本書．其目的不求高深，但求普遍，使大學學生讀之，不嫌其淺，高中學生讀之，不覺其深，而均可自行補習參考也．本書自 1934 年經蘇聯最高人民教育委員會審定得爲工科大學教科書後，蘇聯各工業專校，技術航空學校及普通工學院，皆以之作教授材料．

譯者因見於目下國中土木、航空兩科，正在發育之際，靜力學實爲其基本主要知識；而本國缺乏是項分類完全之書籍，故翻譯之，以供各界參考．茲略述本書之編制於下：

本書共分十一章，可歸納爲三部；其中之一、二及十一各章，敍述靜力學之普通性質，三、四、五、六各章，敍述關於平面上各靜力之性質，而七、八、九、十各章，則敍述關於立體上各靜力之性質．對於靜力學之大概情形，已相當完全，足夠供初學者研究．惟譯者才疏學淺，書中難免有錯誤之處，尚乞海內學者多多指教是幸．

何志奇　陳毓晉

目　　錄

第一章 總　論

第二章 靜力學基本定律

第三章 力 偶

第四章 位於同一平面上任意位置諸力之性質

第五章 力之圖解法

第六章 屋架及橋梁各樑上荷重之圖解法

第七章 位於空間任意位置作用於同一點上諸力之合力

第八章 位於空間諸力偶之合力偶

第九章 對於點之力矩及對於軸之力矩

第十章 位於空間任意位置諸力之性質

第十一章 重 心

第一章

總論

1. 引言 凡研究自然界各種現象之學問，謂之**自然科學**，惟其範圍甚廣，包羅極多，往往更事分科，而**天文學**，**地質學**，**生物學**，**礦物學**，**化學**，**物理學**之名因是出也. 物理學又分爲**力學**，**熱學**，**聲學**，**光學**，**電磁學**等諸部分，而力學中更劃爲理論，實用兩界，剖成**靜力學**，**運動學**，**動力學**諸科. 然宇宙間之事物繁多，吾人之精力有限，定難普遍研習，祇得各就其興趣之相近，實用之需要，分頭研究. 先求明晰其理，再求附合於事實，而研究之範圍愈小，則所得之學問愈精，故近世學者皆埋頭於一部分之工作，而登峯造極，其意蓋不求博，但求專精也.

靜力學者研究物體靜止時之學也. 理論靜力學則研究物體靜止時一切普通現象及定律，而再由定律演出其他各種公式，用以解決物體靜止時之種種問題. 惟關於工業上之各種問題，如屋基之牢固與否？機械動作之迅速與否？均由實用力學，運動學或動力學等所論及，不在靜力學範圍之內. 本書純係研究物體在靜止或平衡時之各種狀況，比之力學中其他部

分，較爲簡單，同時亦最爲重要，故研究力學非自靜力學開始不可，是以普通力學書中．往往列靜力學於首篇也．

靜力學中最普通簡單之定律，在十七世紀前早已成立，惟範圍甚爲狹小，不能達到其應有之重要性．自十七世紀**微積分學**發明後，各種科學均突飛猛進，靜力學亦豁然開朗，瞬息擴大，較之昔日，誠不啻小巫之見大巫．然科學有進無退，他日讀者諸君努力研究，爲科學界放一異彩，亦意中事也．

2.　有向量　在物理學中尤其在力學中所述之量(價值)，乃爲有方向之量，除其數值外，尙有一指定之方向，普通稱之爲有向量．此種有向量在力學中之地位甚爲重要，與力學之關係極爲密切，如**力**，**速度**等，均爲有向量也．本書所論之有向量，僅其中之最主要最基本且爲靜力學所需要者，讀者如欲研究複雜高深之有向量，考之“矢算學”可也．

3.　矢　凡表示有向量之線段均名爲矢．如圖1，設有一直線段 $\overline{AB}$，其長度爲 l，方向乃自 A 至 B，圖中已有 B 點上之箭頭表之；此種已有量及方向之線段，即一最明瞭最簡單

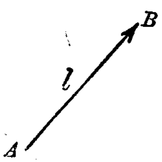

圖　1

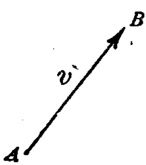

圖　2

之矢(有向量)也. 每一矢既必有一定之量及方向,作時可取一直線段 $\overline{AB}$, 如圖 2, 使其長等於有向量之長度 v (長度之單位可由吾人隨意定之), 方向爲有向量之方向, 而用 B 上之箭頭表明之. 圖中之 A 點爲矢之**起點**, 名曰**矢尾**. B 點爲矢之終點, 名曰**矢首**. 在文字或語言上矢之稱呼有兩種: 卽一字母 $\bar{v}$ 或兩字母 $\overline{AB}$, 惟用兩字母時, 須以前者 A 表其矢尾(起點), 後者 B 表其矢首(終點), 故若其方向爲自 B 至 A 時, 則應書作 $\overline{BA}$ 而非 $\overline{AB}$ 也.

4.　矢之相等　兩個或兩個以上之有向量相等時, 非但其數量相等, 且其方向相同. 如圖 3, 若 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 爲兩相等之矢, 則此兩線段之長度相等, 互相平行, 且其方向相同. 此種相等之矢如 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$, 可名之曰**同位等矢** (大小相等方向相同), 算式上仍可以普通之等號表之, 惟前後兩項各加一短劃於其上, 如:

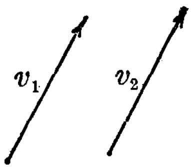

圖 3

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2.$$

上述之等式, 可名曰**幾何式地相等**.

5.　數矢之和　欲求數個有向量 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 之和, 可將各矢之尾與他矢之首次第啣接, 然後自第一矢 $\bar{v}_1$ 之起點與最後矢 $\bar{v}_4$ 之終點聯一直線, 卽得所求之和 $\bar{v}$. 如圖 4, 任意取一點 a, 由 a 作 $\overline{ab}$ 線段, 使其幾何式地等於 $\bar{v}_1$, 卽長短與

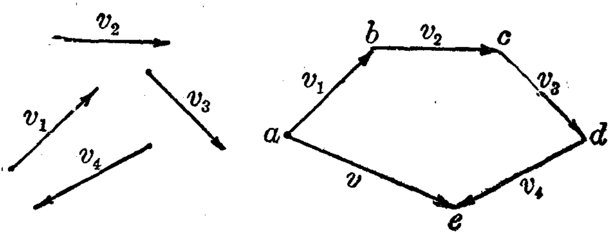

圖　4

$\bar{v}_1$ 相等，方向與 $\bar{v}_1$ 相同，再由 b 依次作 $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, 各使幾何式地等於 $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$. 聯接 ae 以 $\bar{v}$ 表之，其方向爲自 a 至 e, 而 $\bar{v}$ 即所求諸有向量之和，名曰**幾何和**. 而 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$ 同時亦可云各爲 $\bar{v}$ 之**分矢**. 此種加法名曰**幾何加法**，在算式上仍用普通符號，惟在其和及各加數上加一短劃，如：

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\bar{v}_4.$$

若有 n 個有向量 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2\cdots\cdots\bar{v}_n$ 之幾何和爲 v 時，同樣可寫作：

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\cdots\cdots+\bar{v}_n.$$

6.　兩矢之差　若已知 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ 兩矢，欲求其差時，如圖 5, 可任意取一 a 點，由 a 引 $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ 兩線段，各使幾何式地等於 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$. 再聯 $\overline{bc}$, 其方向爲自 b 至 c, 用

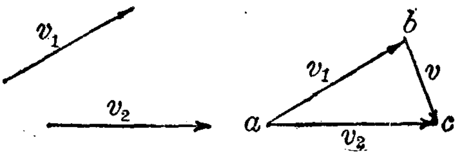

圖　5

字母 $\bar{v}$ 表之，由上節可知 $\bar{v}$ $\bar{v}_1$ 兩矢之幾何和等於 $\bar{v}_2$, 故 $\bar{v}$ 即

爲 $\bar{v}_2, \bar{v}_1$ 兩矢之幾何差. 此種減法,名曰**幾何減法**.算式中仍用普通符號,惟在被減數,減數及差上,各加一短劃.如:

$$\bar{v}=\bar{v}_2-\bar{v}_1$$

又由上節可知 $\bar{v}$ 同時爲 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 兩矢中之一矢 ($\bar{v}_1$ 或 $\bar{v}_2$) 與另一矢 ($\bar{v}_2$ 或 $\bar{v}_1$) 平行且方向相反之矢之幾何和也.

7. 矢之倍數 作一 $m\bar{v}$ 矢,使其數量等於一已知矢 $\bar{v}$ 之 m 倍,如圖 6 (m 爲一任意正數),方向則與已知矢 $\bar{v}$ 之方向相同,如此而得之 $m\bar{v}$ 矢,即 $\bar{v}$ 矢與 m 數之倍矢.故欲乘一已知矢時,僅以欲乘之數乘此矢之數量,至於此矢之方向,則恆不變也.

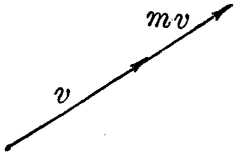

圖 6

若以一任意正數 m 乘兩等矢 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 則所得之 $m\bar{v}_1$ 及 $m\bar{v}_2$,仍爲兩等矢.因此二矢之方向各不變,而其數量各爲原來之 m 倍,故必仍作幾何式之相等也.

若: $\bar{v}_1=\bar{v}_2,$

則: $m\bar{v}_1=m\bar{v}_2.$

由此可知,以同一任意正數乘兩等矢後,其原來之等號仍不稍變.

若以一任意正數乘已知諸矢之幾何和,則所得之倍矢,爲每一已知矢乘此數而得之諸倍矢之幾何和也.如圖 7,以幾何加法加已知諸矢 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$, 得一多邊形 $MNPQR$, 其各

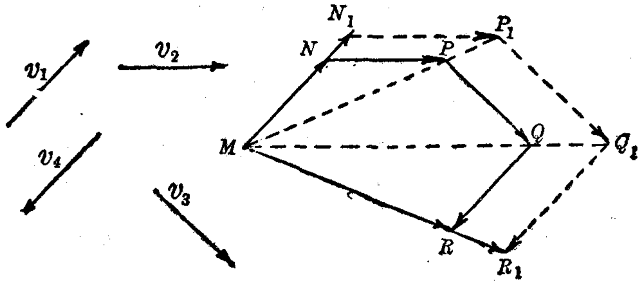

圖 7

邊均使幾何式地等於各已知矢，且 MR 爲諸矢之幾何和，設以 $\bar{v}$ 代之，則：

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\bar{v}_4.$$

再聯 $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, 並各依原來方向延長 $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ 至 N_1, P_1, Q_1, R_1 各點，使：

$$\overline{MN_1}=m\overline{MN}.$$

$$\overline{MP_1}=m\overline{MP}.$$

$$\overline{MQ_1}=m\overline{MQ}.$$

$$\overline{MR_1}=m\overline{MR}.$$ （m 爲一任意正數.)

即得一新多角形 $MN_1P_1Q_1R_1$, 且與多角形 $MNPQR$ 相似(因 $\triangle MN_1P_1\backsim\triangle MNP$, $\triangle MP_1Q_1\backsim\triangle MPQ$, $\triangle MQ_1R_1\backsim\triangle MQR$), 則多角形 $MN_1P_1Q_1R_1$ 之邊與多角形 $MNPQR$ 之邊，各自互相平行，亦即：

$$\text{多角形 } MN_1P_1Q_1R_1=m \text{ 多角形 } MNPQR.$$

故諸線段 $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$, 各爲諸已知矢 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$

之 m 倍,即各各幾何式地等於 $m\bar{v}_1, m\bar{v}_2, m\bar{v}_3, m\bar{v}_4$, 但 $\overline{MR_1}$ 爲諸線段 $\overline{MN_1}, \overline{N_1P_1}, \overline{P_1Q_1}, \overline{Q_1R_1}$ 之幾何和,所以:

$$m\bar{v}=m\bar{v}_1+m\bar{v}_2+m\bar{v}_3+m\bar{v}_4.$$

故以一任意正數乘諸已知矢之幾何和時,等於以此數乘每一已知矢之和也.

8.　軸　軸乃一有定方向之無限直線,普通用 x, y 等字母表示之.

9.　**矢在軸上之射影**　今欲射影一已知矢 $\bar{v}$ 於一已知之軸 x 上,其方向在圖8中均有箭頭作記.A 爲矢 $\bar{v}$ 之起點 B 爲矢 $\bar{v}$ 之終點,從 A, B 兩點各作平面 P, Q, 使垂直於軸 x, 且與之相交於 a, b 兩點,則 a 爲 A 點之射影,

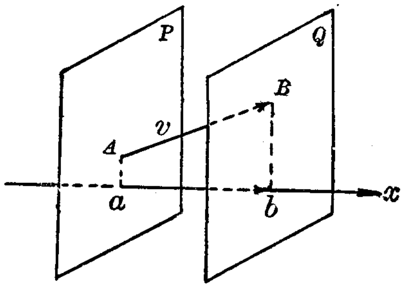

圖 8

b 爲 B 點之射影,而線段 $\overline{ab}$ 即爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影也.惟 $\overline{ab}$ 之方向,可正可負,若與軸 x 之方向相同,則爲正方向.反之,若與軸 x 之方向相反,則爲負方向.吾人如以 $\bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}$ 矢在軸 x 之射影,則:

$$\bar{v}_x=\pm\overline{ab}\quad\text{(正負號即表示其正負方向也)}$$

但以上述之作法定 a, b 兩點,甚覺麻煩,大可簡單之.吾人只須從 A, B 兩點各作垂線於軸 x 上,則 $\overline{Aa}$ 交軸於 a, $\overline{Bb}$ 交軸

於 b，而所得之線段 $\overline{ab}$，卽爲 $\overline{AB}$ 在軸 x 上之射影，而地位與前法不稍異也。

10. 定理 一已知矢在兩平行且同方向之軸上之射影相等。

已知一矢 $\bar{v}$ 及兩平行且同方向之軸 x, x'，如圖 9，從矢 $\bar{v}$ 之起點 A 及終點 B 各作平面 P, Q，同時垂直於軸 x 及 x'（因兩軸互相平行），則聯 P, Q 兩平面與軸 x' 之交點 $\overline{a'b'}$，爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x' 上之射影，而與軸 x 之交點 $\overline{ab}$，爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影。

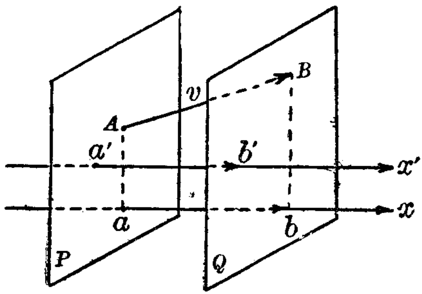

圖 9

此兩射影矢 $\overline{ab}, \overline{a'b'}$ 之方向相同（因 x 軸與 x' 軸爲同方向），且按幾何定理（平行平面間之距離相等），其價值（卽此兩線段之長短）亦相等。所以一已知矢在兩平行且同方向之軸上之射影相等。惟此定理只適合於已知矢及已知軸間之關係，否則又有他種之性質矣。

由上節定理可知若欲射影一已知矢於一已知軸上，有一簡單便利之作法，如圖 10，今欲求矢 $\bar{v}$ 在一已知軸 x 上之射影矢，可從 $\bar{v}$ 矢之起點 A，作一與軸 x 平行且同方向之軸 x'，再由 v 矢之終點 B，作垂線交軸 x' 於 b 點，則在軸 x' 上所得

之射影矢 $\overline{Ab}$, 與矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影相等. 因其與軸 x 為同方向, $\overline{Ab}$ 之方向為正, 仍可以 $\bar{v}_x$ 表之. 此法較前之作平面及兩垂線者更為簡單. 且就直三角形 ($\angle b$ 乃直角) ABb 中, 可知:

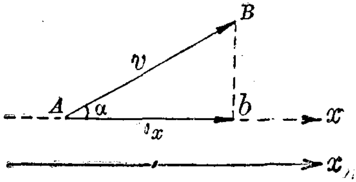

圖 10

$$\bar{v}_x = \bar{v} \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

即: 矢在一定軸上之射影 = 已知矢 × 矢與軸兩方向所成角之餘弦. 且射影矢之正負方向, 在 (1) 式中完全由 $\cos\alpha$ 之正負值表明之. 若射影矢與軸之方向相同, 則已知矢與軸所成之 α 角必在 $0°$ 與 $90°$ 或 $270°$ 與 $360°$ 之間, 而此角之餘弦 $\cos\alpha$ 之值, 恰為正. 反之, 則 α 角在 $90°$ 與 $180°$ 或 $180°$ 與 $270°$ 之間, 而 $\cos\alpha$ 之值恰為負. 故 (1) 式實為計算射影矢之完全公式也.

11. 矢在平面上之射影　若欲射影一已知矢於一已知平面上, 其作法完全與射影一已知矢於一已知軸上相同. 如圖 11, 只須由已知矢 $\bar{v}$ 之起點 A 及終點 B, 作兩垂線於已知平面 L 上, 其垂足 A_1, B_1 即為 A,

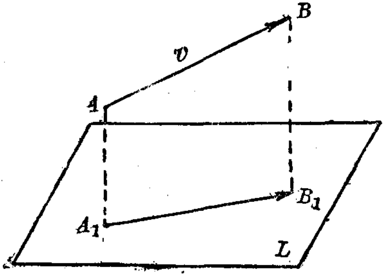

圖 11

B 兩點在 L 平面上之射影，其線段 $\overline{A_1B_1}$ 卽爲 $\bar{v}$ 矢在 L 平面上之射影，方向乃自 A_1 至 B_1.

12. 數矢之幾何和在一已知軸上之射影 數矢之幾何和在定軸上之射影等於各矢在同一軸上射影矢之代數和。如圖 12，已知 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 四矢，從多角形 $MNPQR$ 中，求得其

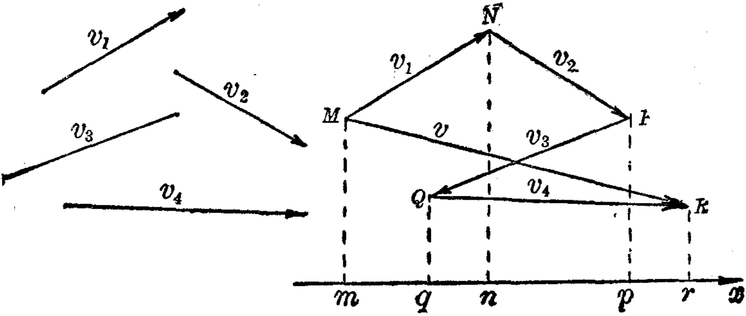

圖 12

幾何和 $\bar{v}$ (卽圖中之 $\overline{MR}$). 今由 M, N, P, Q, R 諸點各作垂線 $\overline{Mm}, \overline{Nn}, \overline{Pp}, \overline{Qq}, \overline{Rr}$ 於已知之軸 x 上，若以 $\bar{v}_{1x}, \bar{v}_{2x}, \bar{v}_{3x}, \bar{v}_{4x}$, $\bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}$ 諸矢在軸 x 上之射影，則：

$$\bar{v}_{1x}=\overline{mn},$$

$$\bar{v}_{2x}=\overline{np},$$

$$\bar{v}_{3x}=\overline{pq},$$ (矢 $\bar{v}_3$ 與軸 x 之方向相反)

$$\bar{v}_{4x}=\overline{qr},$$

$$\bar{v}_x=\overline{mr}.$$