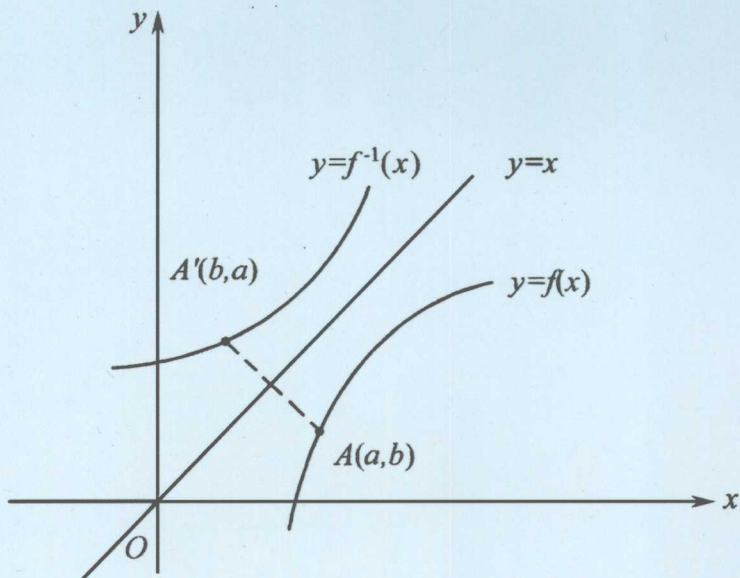


# 医学高等数学

## 学习指导与习题全解

(第二版)

马建忠 主编



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导用书

# 医学高等数学

## 学习指导与习题全解

(第二版)

马建忠 主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是按教育部普通高等教育“十一五”国家级规划教材《医学高等数学》编写的配套辅导教材。全书共分8章,内容有函数、极限与连续,一元和多元函数微积分学,常微分方程,概率论基础,线性代数初步;每章由教学基本要求 and 知识要点、重点内容与侧重例题分析、解答题全解、客观模拟试题与答案或提示、章节模拟试题及试题答案或提示五部分组成,书末附一套医科高等数学考试模拟试题。本书引导学生系统归纳总结基础知识,抓住主要内容,力求短时间内使学生顺利通过考试;同时提高学生分析和解决问题的能力。

本书是高等医学院校和中医药院校学生使用的辅导教材,也是医科夜大,网络本、专科生和考硕士研究生的辅导教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学学习指导与习题全解/马建忠主编. —2版. —北京:科学出版社, 2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导用书

ISBN 978-7-03-019484-8

I. 医… II. 马… III. 医用数学-高等学校-教学参考资料 IV. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 114887 号

责任编辑:周辉 张娟/责任校对:陈玉凤

责任印制:张克忠/封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2004年10月第一版 开本:B5(720×1000)

2007年8月第二版 印张:12 1/4

2007年8月第三次印刷 字数:223 000

印数:5 001—11 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

《医学高等数学学习指导与习题全解》(第二版) 编委会

主 编 马建忠

副主编 申笑颜

编 者 (按姓氏笔画排序)

马建忠 (中国医科大学)

尹 玲 (广东医学院)

申笑颜 (沈阳医学院)

李建明 (山西医科大学)

李 新 (中国医科大学)

滕 辉 (齐齐哈尔医学院)

## 前 言

《医学高等数学学习指导与习题全解》(第二版)是专为教育部审批的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《医学高等数学》(第二版)编写的配套辅导教材。本书可作为高等医学和中医药院校本科生、专科生以及研究生的辅导教材,也为讲授医药科高等数学的教师提供了参考书。

学习指导与习题全解在编写过程中注重以下四个方面:①按照教育部非数学专业教学基础课程教学指导委员会制定的“医科数学教学基本要求”,使学生简单明了理解教学要求,掌握知识要点和主要内容;②通过医学高等数学解题分析,指导学生掌握基本概念、基本理论、基本方法与应用,同时使学生了解教学主要环节,力求节省时间,顺利通过考试;③经过多样化题型训练,提高学生分析和解决问题能力,达到培养学生抽象思维和创新意识;④注重培养学生应用数学知识处理简单易懂的医药学实际问题。

全书分为八章,包括函数、极限与连续,一元和多元函数微积分学,常微分方程,概率论基础,线性代数初步。各章编写了五部分内容:

一、基本要求和知识要点:教学基本要求是学生必须要求掌握的知识内容和要点,针对概念、性质和理论分为知道、了解、理解三个层次程度;针对运算、方法、应用分为会、掌握、熟练掌握三个层次程度。知识要点通过层次程度术语系统总结教材内容,对《医学高等数学》(第二版)教材加\*号扩充内容未加编写。

二、重点内容与侧重例题分析:将教学基本要求中的“了解”、“理解”、“掌握”和“熟练掌握”的重要概念、理论、方法、应用与典型例题相联系,阐述教材重要内容。

三、章节解答题全解:根据不同的教学内容,选择适量的不同难易程度的有序习题,进行习题全解,检查和巩固教学中的基础知识和主要内容。

四、客观模拟试题与答案或提示:该部分包括判断题、选择题和填空题,指导学生注意常见错误,正确加深理解概念、理论及相关的数学内容。这样可使计算题、证明题和应用题包含的知识要点更加全面化。

五、章节模拟试题及试题答案或提示:该部分是针对教学基本要求筛选的和必须掌握的考试试题,其中大部分是计算题、证明题和应用题,它是教师教学过程中多年积累的考试试题,涉及基本内容和重要知识要点。每章A卷试题难易程度适度,每章B卷试题加深了难题和综合试题的难度。

书后给出一套完整考试样题及参考答案。

由于水平有限，时间仓促，本书难免存在欠妥之处，衷心欢迎广大读者批评指正。

## 言 前

编者

2007年5月

新编《中国法律史》(第二版)(中国政法大学法学专业) 中国政法大学法律史学研究所(第二版) 中国政法大学法律史学研究所“五·一”普法项目 中国政法大学法律史学研究所主编 中国政法大学法律史学研究所编

本书是根据中国政法大学法律史学研究所(第二版)《中国法律史》(第二版) 中国政法大学法律史学研究所“五·一”普法项目 中国政法大学法律史学研究所主编 中国政法大学法律史学研究所编 中国政法大学法律史学研究所“五·一”普法项目 中国政法大学法律史学研究所主编 中国政法大学法律史学研究所编

本书是根据中国政法大学法律史学研究所(第二版)《中国法律史》(第二版) 中国政法大学法律史学研究所“五·一”普法项目 中国政法大学法律史学研究所主编 中国政法大学法律史学研究所编

本书是根据中国政法大学法律史学研究所(第二版)《中国法律史》(第二版) 中国政法大学法律史学研究所“五·一”普法项目 中国政法大学法律史学研究所主编 中国政法大学法律史学研究所编

# 目 录

## 前言

<b>第一章 函数、极限与连续</b> .....	1
一、基本要求和知识要点.....	1
二、重点内容与侧重例题分析.....	5
三、解答题全解.....	8
四、客观模拟试题与答案或提示.....	13
五、第一章模拟试题及试题答案或提示.....	16
<b>第二章 一元函数微分学</b> .....	20
一、基本要求和知识要点.....	20
二、重点内容与侧重例题分析.....	26
三、解答题全解.....	28
四、客观模拟试题与答案或提示.....	36
五、第二章模拟试题及试题答案或提示.....	39
<b>第三章 一元函数积分学</b> .....	44
一、基本要求和知识要点.....	44
二、重点内容与侧重例题分析.....	52
三、解答题全解.....	55
四、客观模拟试题与答案或提示.....	68
五、第三章模拟试题及试题答案或提示.....	71
<b>第四章 多元函数微分学</b> .....	74
一、基本要求和知识要点.....	74
二、重点内容与侧重例题分析.....	77
三、解答题全解.....	79
四、客观模拟试题与答案或提示.....	84
五、第四章模拟试题及试题答案或提示.....	87
<b>第五章 多元函数积分学</b> .....	91
一、基本要求和知识要点.....	91
二、重点内容与侧重例题分析.....	93
三、解答题全解.....	94
四、客观模拟试题与答案或提示.....	101
五、第五章模拟试题及试题答案或提示.....	103

第六章	常微分方程	107
一、	基本要求和知识要点	107
二、	重点内容与侧重例题分析	110
三、	解答题全解	113
四、	客观模拟试题与答案或提示	123
五、	第六章模拟试题及试题答案或提示	126
第七章	概率论基础	129
一、	基本要求和知识要点	129
二、	重点内容与侧重例题分析	135
三、	解答题全解	138
四、	客观模拟试题与答案或提示	147
五、	第七章模拟试题及试题答案或提示	150
第八章	线性代数初步	155
一、	基本要求和知识要点	155
二、	重点内容与侧重例题分析	161
三、	解答题全解	165
四、	客观模拟试题与答案或提示	176
五、	第八章模拟试题及试题答案或提示	179
医科高等数学模拟试题及答案或提示		184



# 第一章 函数、极限与连续

## 一、基本要求和知识要点

### (一) 基本要求

1. 知道函数的概念,了解复合函数、分段函数、初等函数的定义,掌握函数复合与分解的方法;学生在高中学习了这部分内容,也可做为学生自学内容;
2. 理解极限(包括单侧极限)的描述性定义,熟练掌握极限的四则运算法则;
3. 理解无穷小量的概念,知道无穷小与无穷大的关系,掌握无穷小量的性质;
4. 理解两个重要的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ,熟练掌握两个重要极限求法、无穷小量的比较及用初等变换计算各类函数的极限;
5. 理解连续与间断的概念,知道闭区间上连续函数的性质.熟练掌握函数的间断点和连续点的判别方法.

基本要求层次程度术语顺序:①理解,熟练掌握;②了解,掌握;③知道,会.

### (二) 知识要点

#### 1. 函数的概念、复合函数、反函数、初等函数及分段函数(知道)

(1) 函数的概念 设  $D$  为某一给定的非空数集,如果对于每个  $x \in D$ ,  $y$  按照一定的对应规则  $f$  有唯一确定的值与之对应,称  $y$  是  $x$  的函数,记作  $y = f(x)$ ,  $x$  叫自变量,  $y$  叫因变量,数集  $D$  叫函数的定义域,  $y$  的取值范围  $R = \{y | y = f(x), x \in D\}$  叫函数的值域. 定义域  $D$  与对应规则  $f$  为两要素,两个函数相等当且仅当这两个要素完全相同.  $x_0$  的邻域  $U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}$  是特殊的区域.

(2) 复合函数 设函数  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , 且  $\varphi(x)$  的值域在  $f(u)$  的定义域内,  $y = f[\varphi(x)]$  是两个函数复合构成的复合函数.  $x$  是自变量,  $u$  是中间变量. 需注意是复合函数必须使内层函数的值域属于外层函数的定义域内.

(3) 反函数 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $R$ . 若对任意的  $y \in R$ , 在  $D$  上有唯一一个  $x$  值, 使  $f(x) = y$  成立, 则称在  $R$  上定义了一个新的函数关系为  $y = f(x)$  的反函数. 并记作  $x = f^{-1}(y)$ . 函数与其反函数 ( $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$ ) 的图像关于直线  $y = x$  对称. 人们习惯上把  $x = f^{-1}(y)$  用  $y = f^{-1}(x)$  表示.

(4) 初等函数 由常数和基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次四则运算和有限次复合运算而构成, 而且用一个解

析式子表示的函数,称为初等函数.

(5) 分段函数 在不同定义域上由不同解析式所表示的一个函数称为分段函数. 分段函数通常不是初等函数.

## 2. 函数的特性(知道)

设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  为区间.

(1) 单调性  $I$  为  $D$  的子区间,若对任意两点  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上单调增加(或单调减少). 函数的图像随自变量  $x$  的增大  $f(x)$  逐渐上升(或下降).

(2) 奇偶性 设  $D$  关于原点对称, 若任取  $x \in D$ , 有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数; 有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数. 偶函数图像关于  $y$  轴对称, 奇函数图像关于原点对称.

(3) 有界性 设  $I$  为  $D$  中的某一子区间, 若存在正数  $M$ , 对任取  $x \in I$ , 总有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上的有界函数, 否则在  $I$  上无界函数. 有界函数的图像介于直线  $y=M$  与  $y=-M$  之间.

(4) 周期性 若存在常数  $T \neq 0$ , 对任意  $x \in D$ , 有  $f(x+T) = f(x)$  恒成立, 则称  $f(x)$  在  $D$  上为周期函数,  $T$  为  $f(x)$  的周期. 通常所说的周期是指最小正周期. 周期函数的图像在每个长度为  $T$  的  $x$  区间上对应曲线的形状相同.

## 3. 极限知识要点

(1) 数列极限 当  $n$  无限增大时, 数列  $\{x_n\}$  中的通项  $x_n$  无限接近某一确定的常数  $A$  (即  $|x_n - A|$  要多小有多小, 无限接近于 0), 常数  $A$  为数列  $\{x_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  或  $x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ . 数列  $\{x_n\}$  的极限不存在就是当  $n$  无限增大时,  $x_n$  不趋近于同一个确定的常数.

### (2) 函数极限

1)  $x \rightarrow \infty$  时的定义 当  $|x|$  无限增大(记为  $x \rightarrow \infty$ )时, 函数  $f(x)$  无限趋近于某一确定的常数  $A$  (即  $|f(x) - A|$  要多小有多小, 无限接近于 0), 包括三种情况,  $x \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ , 它们分别记作  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$ .

2)  $x \rightarrow x_0$  时的定义 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有定义(在  $x_0$  点可以无定义), 当  $x$  无限接近点  $x_0$  (但  $x \neq x_0$ )时, 函数  $f(x)$  无限接近某一确定的常数  $A$  (即  $|f(x) - A|$  要多小有多小, 无限接近 0), 则称  $A$  为  $f(x)$  的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ . 当  $x$  仅从  $x_0$  的左侧( $x < x_0$ )趋于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  无限接近常数  $A$ , 则称  $A$  为  $f(x)$  的左极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ; 当  $x$  仅从  $x_0$  的右侧

( $x > x_0$ ) 趋于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  无限接近常数  $A$ , 则称  $A$  为  $f(x)$  的右极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  充分必要条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ .

函数  $f(x)$  极限不存在, 通常指当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x) \rightarrow \infty$  或  $f(x)$  不趋近唯一数值  $A$  (如左、右极限不相等);  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow \infty$  或  $f(x)$  不趋向一个确定常数.

(3) 极限四则运算法则 设  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 有下列法则成立:

法则 1.1  $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$ ;

法则 1.2  $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$ ;

法则 1.3  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ , 其中  $B \neq 0$ .

推论 1.1  $\lim [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x) = CA$ , 其中  $C$  是常数;

推论 1.2  $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n$ , 其中  $n$  是正整数.

注意: 法则成立的条件是:  $\lim f(x)$  与  $\lim g(x)$  都存在, 对于法则 3 还要求  $B \neq 0$ , 当这些条件不满足时, 不要贸然使用这些法则.

(4) 两个重要极限见重点内容.

(5) 无穷小与极限关系  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的充分必要条件是  $f(x) = A + \alpha(x)$ ,  
(或  $x \rightarrow \infty$ )

其中  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .  
(或  $x \rightarrow \infty$ )

4. 无穷小与无穷大(了解)

(1) 无穷小 极限为 0 的变量称为无穷小量(无穷小). 即若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  
(或  $x \rightarrow \infty$ )  
则  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小量(无穷小).

(2) 无穷大 绝对值无限增大的变量称为无穷大量(无穷大). 即若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大量(无穷大).  
(或  $x \rightarrow \infty$ )

注意: 无穷小与无穷大都是变量, “0”作为变量是作为无穷小, 任何一个绝对值很小或很大的数均不是变化的变量, 都不能作为无穷小或无穷大; 无穷小与无穷大与自变量变化过程的趋向绝对相关. 另外, 在自变量的同一变化过程中, 如果  $f(x)$  为无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小; 如果  $f(x)$  为无穷小 ( $f(x) \neq 0$ ), 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大.

(3) 无穷小的性质

性质 1.1 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

性质 1.2 有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小.

#### (4) 无穷小阶的比较

在自变量的同一变化过程中(即  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ), 设  $\alpha = \alpha(x)$  ( $\alpha \neq 0$ ) 与  $\beta = \beta(x)$  均为无穷小量, 且  $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  存在.

1) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 则称  $\beta$  是  $\alpha$  的高阶无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ , 或称  $\alpha$  是  $\beta$  的低阶无穷小;

2) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C$  (常数  $C \neq 0, 1$ ), 则称  $\beta$  与  $\alpha$  是同阶无穷小;

3) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 则称  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\beta \sim \alpha$ ;

4) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 则称  $\beta$  是比  $\alpha$  较低阶无穷小, 或称  $\alpha$  是比  $\beta$  高阶无穷小, 记作  $\alpha = o(\beta)$ .

#### 5. 函数的连续与间断

(1) 在一点连续的定义 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有定义, 若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ , 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  连续. 与此等价定义是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 并且, 左连续  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ; 右连续  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ . 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续充分必要条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ . 可把任一点连续扩展到区间上讨论函数的连续.

(2) 在一点间断的概念 函数  $f(x)$  的间断点, 在点  $x_0$  处出现以下三种情况:

1)  $f(x)$  在点  $x_0$  无定义;

2)  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在;

3)  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ .

(3) 连续函数的性质

**性质 1.3** 设函数  $f(x), g(x)$  都在点  $x_0$  连续, 则  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $g(x_0) \neq 0$ ) 在点  $x_0$  处仍然连续;

**性质 1.4** 若  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  连续, 且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 而  $f(u)$  在点  $u_0$  连续, 则复合函数  $f[\varphi(x)]$  在点  $x_0$  连续. 并有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)] = f(u_0).$$

说明: 求连续的复合函数的极限时, 函数符号  $f$  与极限符号可以交换次序.

**性质 1.5** 基本初等函数在其定义域上连续; 初等函数在其定义域的区间内

连续.

## 6. 闭区间上连续函数的性质(知道)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续:

(1) (介值定理) 若  $f(a) \neq f(b)$ , 则对介于  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的任意一个实值  $C$ , 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = C$  成立.

(2) (零点定理) 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . 这时方程  $f(x) = 0$  在  $(a, b)$  内至少有一个实根.

(3) (最大值, 最小值定理)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上至少取得最大值  $M$  和最小值  $m$  各一次.

(4) (有界性定理)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 即存在正数  $M$ , 对任意的  $x \in [a, b]$ , 有  $|f(x)| \leq M$ .

## 二、重点内容与侧重例题分析

### 1. 函数的定义域、表达式及函数特性的基本问题

**例 1.1** 求复合函数  $y = \arcsin[\ln(x+1)]$  是由哪些基本初等函数合成的, 并求它的定义域.

**解**  $y = \arcsin[\ln(x+1)]$  是由  $y = \arcsin u$ ,  $u = \ln v$ ,  $v = x+1$  复合而成的. 为了使  $y = \arcsin u$ ,  $u = \ln(x+1)$  有意义, 有,  $-1 \leq \ln(1+x) \leq 1$  和  $x+1 > 0$  同时成立, 进而,  $\frac{1}{e} - 1 \leq x \leq e - 1$  和  $x > -1$  同时成立. 公共部分定义域  $D: [\frac{1}{e} - 1, e - 1]$ .

**例 1.2** 已知  $f(\sqrt{x}-1) = x-2$ , 求  $f[f(x)]$  表达式?

**解** 设  $u = \sqrt{x}-1$ , 则  $x = (u+1)^2$ ,  $f(u) = (u+1)^2 + 2$ ; 因为  $x \geq 0$ , 则  $u \geq -1$ ,  $f(u)$  的定义域  $D_u: -1 \leq u < +\infty$ .

$$f[f(u)] = [f(u) + 1]^2 + 2 = [(u+1)^2 + 3]^2 + 2$$

即

$$f[f(x)] = [(x+1)^2 + 3]^2 + 2.$$

**例 1.3** 设  $f(x)$  为定义为  $(-l, l)$  内的奇函数, 若  $f(x)$  在  $(0, l)$  内单调增加, 证明  $f(x)$  在  $(-l, 0)$  内也单调增加.

**证** 设  $-l < x_1 < x_2 < 0$ , 则  $0 < -x_2 < -x_1 < l$ . 因为  $f(x)$  为奇函数, 得  $f(x_2) - f(x_1) = -f(-x_2) - f(-x_1)$ , 又因为  $f(x)$  在  $(0, l)$  内单调增加, 得  $f(-x_1) - f(-x_2) > 0$ , 即  $-x_2 < -x_1$  时,  $f(-x_2) < f(-x_1)$ .

### 2. 极限的计算

利用复合函数的连续, 可以求以下三种形式的两个重要极限:

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1 \text{ 和 } \lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e \text{ 及 } \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e,$$

□既可代表简单变量,又可代表复杂表达式.

**例 1.4** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$  的极限.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^{x^2+1-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right]^{-2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^{-1} \\ &= e^{-2} \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

**例 1.5** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$  的极限.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\cos \ln(1+x)} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \ln(1+x)}{\ln(1+x)} \right] = 1.$$

**例 1.6** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \sin(x-1)}{\ln x}$  的极限.

**解** 设  $u = x - 1$ , 则  $x \rightarrow 1$  时,  $u \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \sin u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \sin u}{\sin u} \cdot \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{u}{\ln(1+u)} \right] \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1. \end{aligned}$$

**例 1.7** 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ , 求  $a$  和  $b$  的值.

**解** 如果分母  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ , 由本题极限存在, 分子  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ , 则有  $1 + a + b = 0$ , 所以, 以  $b = -a - 1$  代入原式得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) = a + 2 = 3, \end{aligned}$$

故  $a = 1, b = -2$ .

**例 1.8** 求证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} = 0$ .

**证明** 当  $x \neq 0$  时,

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \frac{|x^2 \sin \frac{1}{x}|}{|x|} \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

由两边夹定理, 当  $|x| \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) 时, 所求极限为 0.

### 3. 无穷小量的阶的比较

例 1.9 当  $x \rightarrow 0$  时, 试比较下列各题无穷小量阶.

(1)  $\sec x - 1$  与  $\frac{x^2}{2}$ ; (2)  $\tan x - \sin x$  与  $x^3$ .

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \right) = |x| = 1.$

由无穷小阶比较定义  $\sec x - 1$  与  $\frac{x^2}{2}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 即  $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$  ( $x \rightarrow 0$ ).

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

由无穷小阶比较定义,  $\tan x - \sin x$  与  $x^3$ , 当  $x \rightarrow 0$  时是同阶无穷小.

### 4. 函数的连续及间断点的讨论

例 1.10 已知  $a$  和  $b$  是非零常数, 函数

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e, & x = 0, \\ \frac{\sin ax}{bx}, & x < 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处连续, 求  $a$  和  $b$  的值.

解 由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = e,$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(1+ax)^a] = e^a,$$

又因

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b},$$

所以

$$e^a = \frac{a}{b} = e, \text{ 故 } a = 1, b = \frac{1}{e}.$$

例 1.11 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

的间断点.

解 由于  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^{x-1}} = +\infty$ , 所以函数在  $x=1$  处  $f(x)$  无定义, 为  $f(x)$  的无穷大间断点.

$x=0$  为函数的分段点, 讨论  $x=0$  处左连续和右连续情况,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1+x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}$ . 在  $x=0$  处左右连续不相等.  $x=0$  为  $f(x)$  的跳跃间断点.

例 1.12 证明  $\sin x + x + 1 = 0$  在开区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内至少有一个根.

证明 显然  $f(x) = \sin x + x + 1$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上连续.

因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} < 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 = 2 + \frac{\pi}{2} > 0,$$

由介值定理, 至少存在一点  $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 即证  $\sin x + x + 1 = 0$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内至少有一个根.

### 三、解答题全解

1. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ ;

(2)  $y = \left(\arcsin \frac{x-1}{5}\right) + \sqrt{25-x^2}$ ;

(3) 用铁皮做一个容积为  $V$  的圆柱形罐头筒, 试将它的全面积表示成底半径的函数, 求它的定义域;

(4) 设细菌原有数为  $N_0$ , 每天的繁殖率为  $r$ , 问经过  $x$  天后数为多少? 建立函数关系, 并求其定义域.

解 (1) 若使原式成立必须有  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x - \sqrt{x} \geq 0, \end{cases}$  即定义域为  $[1, +\infty)$  和  $x=0$ .

(2) 若使原式成立, 必须有  $\begin{cases} \left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 6, \\ 25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5, \end{cases}$  故函数的定义域



为 $[-4, 5]$ .

(3) 设圆柱底半径为 $r$ , 高为 $h$ , 则 $v = \pi r^2 h, h = \frac{v}{\pi r^2}$ , 则圆柱形罐头筒的全面积  
 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right)$ , 其定义域为 $(0, +\infty)$ .

(4) 经过一天细菌数为 $N_1 = N_0 + N_0 r = N_0(1+r)$ , 经过两天细菌数为 $N_2 = N_0(1+r) + N_0(1+r) \times r = N_0(1+r)^2, \dots$ , 故经过 $x$ 天的细菌数为 $N = N_0(1+r)^x$ , 其定义域为 $x \in [0, +\infty)$ .

2. 若 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$ , 求 $f(-2)$ 及 $f(a+b)$ .

解  $f(-2) = -4, f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1} \quad (a+b \neq -1)$ .

3. 给出函数 $y = e^{\sin^3(\frac{1}{x})}$ 的分解式.

解  $y = e^u, u = v^3, v = \sin t, t = 1/x$ .

4. 若 $f(x) = \ln x$ , 证明 $f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)]$ .

证明  $f[x(x+1)] = \ln[x(x+1)] = \ln x + \ln(x+1) = f(x) + f(x+1)$ .

5. 已知 $f(x+1) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  求 $f(x)$ .

解 令 $x+1=t$ , 则 $x=t-1$ ,

$$f(x+1) = f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & 0 \leq t-1 \leq 1 \\ 2(t-1), & 1 < t-1 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} (t-1)^2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 2(t-1), & 2 < t \leq 3, \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

6. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right];$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x \cdot \arctan x}{2x^2};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x+3}{2x+1} \right]^{2x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{1 - \cos x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$