全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

梁保松　德　娜　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线 性 代 数

梁保松　德　娜　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／梁保松，德娜主编．—北京：中国农业出版社，2008.12

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-13083-8

Ⅰ．线…　Ⅱ．①梁…②德…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 169798 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

责任编辑　朱　雷　卫　洁

北京印刷一厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2008 年 12 月第 1 版　　2008 年 12 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：13

字数：230 千字

定价：19.00 元

（凡本版图书出现印刷、装订错误，请向出版社发行部调换）

内容提要

本书被列入全国高等农林院校“十一五”规划教材. 主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型等. 本书取材广泛，内容丰富，突出了数学能力的培养，体现了数学建模思想，有一定的广度和深度.

本书每章后配有适量习题及综合练习题以巩固所学内容. 书后附有习题参考答案.

全书结构严谨，叙述详细，通俗易学，可作为高等院校农、林、牧、生物、经济及工科类专业的教材，也可以作为研究生入学考试的参考书.

主　编　梁保松　德　娜

副主编　苏金梅　赵翠萍　曹殿立

编　者　梁保松　德　娜　苏金梅　曹殿立

　　　　赵翠萍　王建平　依斯拉木江　房　宏

审　稿　刘　浩

前 言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材．

线性代数是高等农林院校本专科生的一门重要的基础课，也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具．在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性更显突出，因此各专业对线性代数内容从深度和广度上都提出了更高的要求．

本教材按照“十一五”规划高等农林教育数学教材编写大纲的要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成．注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求．

本教材以行列式和矩阵为工具，以线性方程组为主线，阐明了线性代数的基本概念、理论和方法．

本教材在内容的安排上具有以下特点：

一、保持体系完整．全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，努力突出线性代数的基本思想和方法．一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握线性代数的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力．

二、追求简明实用．考虑到线性代数概念多、定理多、内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或简单实例引入概念，处理上力求深入浅出、通俗简单、难点分散；删去了一些烦琐的理论证明，直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出线性代数的基本

概念和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用线性代数的思想和方法分析与解决实际问题的能力．

三、本书每章后面配有适量的习题．为了巩固基础知识，加强综合能力的培养，进一步提高学习的质量，还设置了综合练习题．其题型包括判断题、填空题、计算题、证明题等．书后附有习题参考答案．

本书标“*”的部分是大纲内容的拓广与加深，但也是研究生考试的内容，供教师在教学中适当取舍，供有志考研的读者选学．

河南农业大学、新疆农业大学、内蒙古农业大学、天津农学院4所高校参加了本教材的编写工作．编写人员有梁保松、德娜、苏金梅、赵翠萍、曹殿立、王建平、依斯拉木江、房宏同志，最后由梁保松教授统一定稿．

河南大学刘浩教授仔细审阅了全书，并提出了宝贵建议，在此表示衷心感谢．

最后，对中国农业出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持表示衷心的感谢．

错漏之处，敬请专家、同行和读者批评指正．

编　者

2008年8月8日

目 录

第一章 行列式

行列式是数学研究中的一个重要工具．本章主要介绍 n 阶行列式的性质、计算以及用行列式求解线性方程组的克莱姆（Cramer）法则．

第一节 二、三阶行列式

考虑用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1，x_2 是未知量．为消去 x_2，用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘以两个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

同理，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1）的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为便于叙述和记忆，将方程组（1）中的未知量的系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 按它们在方程组中的位置排成两行两列，引入符号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

称 D 为**二阶行列式**．

构成二阶行列式的四个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为该行列式的**元素**．它们排成两行两列，横的各排叫做**行**，纵的各排叫做**列**．数 a_{ij}（i，$j=1$，2）称为行列式 D 的第 i 行第 j 列元素．

二阶行列式的定义（3）可用**对角线法则**来记忆．从行列式的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{22} 作连线，该连线称为行列式的**主对角线**；而行列式的左下角元素 a_{21} 到右上角元素 a_{12} 的连线称为行列式的**副对角线**．于是二阶行列式便

是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

式(3)表示的是方程组(1)的解(式(2))中的分母. 按照二阶行列式的定义, 式(2)中 x_1, x_2 的表达式中的分子则分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然, $D_i(i=1, 2)$ 即为 D 中的第 i 列换成方程组(1)的常数列所得到的行列式.

于是, 当 $D\neq 0$ 时, 二元线性方程组(1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

此为求解二元线性方程组的**克莱姆**(Cramer)**法则**.

例 1 用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+\ x_2=1. \end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0$, 且

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=14,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-21,$$

由式(4)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-3.$$

若求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{5}$$

类似二元线性方程组的行列式解法, 将方程组(5)中未知量的系数按它们在方程组中的位置排成三行三列, 引入**三阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

并称 D 为线性方程组(5)的**系数行列式**, 再将 D 中的第一列、第二列、第三列分别换成方程组(5)的常数列, 分别引入三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中，D，D_1，D_2，D_3 分别定义为

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},\tag{7}$$

$$D_1=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$

$$D_2=b_2a_{11}a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+b_3a_{13}a_{21}-b_2a_{13}a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-b_3a_{11}a_{23},$$

$$D_3=b_3a_{11}a_{22}+b_2a_{12}a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_2a_{11}a_{32}.$$

则当 $D\neq 0$ 时，线性方程组（5）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

此为求解三元线性方程组的克莱姆（Cramer）法则．

三阶行列式的值仍可由**对角线法则**来记忆．以 D 为例．由式（6）可见，D 由 6 项构成，每一项均为行列式 D 的不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律如图 1－1 所示．图中的三条实线平行于主对角线，实线上三个元素之积冠以正号；三条虚线平行于副对角线，虚线上三元素之积冠以负号．

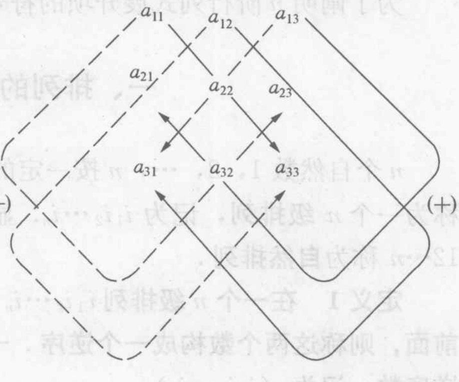

图 1－1

例 2 计算

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&1\\-1&3&-1\end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times2\times(-1)+3\times3\times1+(-1)\times1\times(-1)-(-1)\times2\times1$
$-3\times(-1)\times(-1)-2\times1\times3$
$=(-4)+9+1-(-2)-3-6=-1.$

第二节 n 阶行列式

上一节我们利用二、三阶行列式给出了求解二元、三元线性方程组的克莱姆法则．克莱姆法则同样适用于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组，此时，需要计算 n 阶行列式．而用于计算二、三阶行列式的对角线法，对于高于三阶的行列式就不再适用了．为此，我们给出 n 阶行列式的定义及一般算法．

由式（7）可见：

（1）三阶行列式展开式的每一项都是其位于不同行不同列的三个元素之积；

（2）展开式共有 3！项，每一项的三个元素的行下标按自然顺序排列时，其列下标都是 1，2，3 的某个排列．1，2，3 的全排列共有 3！种，每一排列分别对应着展开式的一个项；

（3）展开式 3！项的符号各有三正三负．带正号的三项列下标的排列分别为（123），（312），（231），它们都是自然排列 123 中的任意两个数经零次或二次（偶数次）对换得到的；而带负号的三项的列下标是自然排列 123 中的任意两个数经一次（奇数次）对换得到的．也就是说，行列式展开式的每一项的符号与排列的对换次数（奇数次或偶数次）有关．

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律，下面引入逆序数的概念．

一、排列的逆序与奇偶性

n 个自然数 1，2，…，n 按一定的次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 n **级排列**，记为 $i_1i_2\cdots i_n$．显然，n 级排列共有 n！个．其中，排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**．

定义 1　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个较大的数排在一个较小数的前面，则称这两个数构成一个逆序．一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$．

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．

例 1　求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性．

（1）35214；　　（2）$n(n-1)\cdots 21$.

解　由逆序数的定义，任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1\text{ 后面比 }i_1\text{ 小的数的个数}+i_2\text{ 后面比 }i_2\text{ 小的数的个数}+\cdots+i_{n-1}\text{ 后面比 }i_{n-1}\text{ 小的数的个数}.$$

（1）$\tau(35214)=2+3+1+0=6$，35214 为偶排列；

（2）$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

而 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需由 n 而定，讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 是偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 是偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 是奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 是奇数．

所以，当 $n=4k$，$n=4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$，$n=4k+3$ 时，此排列为奇排列．

定义 2　一个排列中的某两个数 i，j 互换位置，其余的数不动，而得到一个新的排列．对于排列所施行的这样的一个变换称为一次对换，用（i，j）表示．相邻两个数的对换称为邻换．

定理 1　一次对换改变排列的奇偶性．

证　首先证明一次邻换改变排列的奇偶性．

设 n 级排列为 $\cdots ij\cdots$，将相邻的两个数 i，j 对换，得到一个新的排列 $\cdots ji\cdots$．由于除 i，j 之外其余的数不动，所以，其余数之间的逆序没有变化．

若 $i>j$，则新排列的逆序数比原排列减少 1；若 $i<j$，则新排列的逆序数比原排列增加 1. 所以一次邻换改变了排列的奇偶性．

再证明一般对换的情形．

设 n 级排列为 $\cdots ia_1a_2\cdots a_kj\cdots$，$i$，$j$ 之间相隔 k 个数．要实现 i，j 的对换，得到新的排列 $\cdots ja_1a_2\cdots a_ki\cdots$，可先将 i 与 a_1 对换，再把 i 与 a_2 对换，…．这样，经过 $k+1$ 次邻换，就可以将 i 调换到 j 之后，得到排列 $\cdots a_1a_2\cdots a_kji\cdots$；然后再把 j 对换到 a_1 之前，这需要经过 k 次邻换．这样，共经过 $2k+1$ 次邻换，完成了 i 与 j 的对换．所以原排列与新排列的奇偶性相反．

推论 1　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数．

由定理 1，一次对换改变排列的奇偶性．因为 $12\cdots n$ 是偶排列，所以若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇（偶）排列，则必须经奇（偶）数次对换才能变成自然排列．

推论 2　$n\geqslant 2$ 时，全体 n 级排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个

证　设全体 n 级排列中，奇排列的个数为 p，偶排列的个数为 q. 对这 p 个奇排列施行同一个对换（i，j），由定理 1，可得到 p 个偶排列．若对这 p 个偶排列施行对换（i，j），又得到原来的 p 个奇排列，所以这 p 个偶排列各不相同．但我们一共只有 q 个偶排列，故 $p\leqslant q$. 同样，可得 $q\leqslant p$. 因此，$p=q$.

二、n 阶行列式的定义

利用排列的逆序和奇偶性的概念，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

可写成

$$\sum_{i_1i_2i_3}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

将上式推广到 n 阶行列式，有

定义 3 符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

表示 n 阶行列式．它是 $n!$ 项的代数和．这些项是一切可能取自于 D 的不同行与不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$．项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列时，这一项的符号为负，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列时，这一项的符号为正．即

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}. \tag{2}$$

特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$.

例 2 对于四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ k & 0 & 0 & h \end{vmatrix},$$

根据定义，D 是 $4!=24$ 项的代数和．每一项都是位于 D 的不同行不同列的 4 个元素的乘积．在这个行列式中，除了 $acfh$，$adeh$，$bdek$，$bcfk$ 这四项外，其余的项至少含有一个因子 0，因而为 0. 与 $acfh$，$adeh$，$bdek$，$bcfk$ 对应的排列依次为 1234，1324，4321，4231，其中，第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个为奇排列．因此

$$D=acfh-adeh+bdek-bcfk.$$

例 3　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该行列式主对角线上方的元素全为零，称之为**下三角行列式**（主对角线下方的元素全为零的行列式，称为**上三角行列式**）.

解　在 n 阶行列式 D 的 $n!$ 个项中，考虑行列式的非零项．由于行列式的每一项皆为行列式中位于不同行不同列的 n 个元素之积，因此行列式中的非零项必为 n 个非零元素的乘积．在行列式的第一行中，仅有 a_{11} 不为零，所以在式（2）中，a_{1i_1} 只能取 a_{11}，而 a_{2i_2} 只能取 a_{22}，不能取 a_{21}，这是因为 a_{21} 与 a_{11} 同列．同理 a_{3i_3} 也只能取 a_{33}，…，最后一行只能选 a_{nn}，从而，

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线以外元素全为零的行列式（称为**对角行列式**，记为 Λ）

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，可以定义关于副对角线的**对角行列式以及三角行列式**．利用行列式的定义，关于**副对角线的对角行列式以及上、下三角行列式**，分别有如下结论：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1};$$