老田丁备考系列　非常高考1+1

非常高三

■ 总策划　老田丁　■ 丛书主编　张嘉瑾

数学

MATHEMATICS

天津人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

非常高考．数学/宋伯涛，张嘉瑾主编．—天津：天津人民出版社，2008.4(2008.4 重印)

（高考 1+1）

ISBN 978-7-201-05255-7

Ⅰ．非…　Ⅱ．①宋…②张…　Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 032305 号

天津人民出版社出版

出版人：刘晓津

（天津市西康路 35 号　邮政编码：300051）

北京市昌平开拓印刷厂印刷　新华书店发行

*

2008 年 4 月第 1 版　2008 年 4 月第 2 次印刷

16 开本　890×1240 毫米　22.5 印张

定价：49.80 元

目录

目录

一 集合与简易逻辑

第一节 集合的概念

双基提炼

1. 集合中元素的特性

集合中的元素具有三个特性：确定性、互异性和无序性. 其中互异性是考查的重点，解题时，要特别注意对集合中元素的互异性加以检验.

比如：[例] 设集合 $A=\{2,3,a\}$，$B=\{2,|a+1|\}$，若 $A\supseteq B$，则 $a=$________.

[解析] 你的答案是 $a=-\frac{1}{2}$，$a=2$，$a=-4$ 吗？

错了！$a=2$ 时与集合元素的互异性矛盾.

2. 集合的表示方法

(1)列举法(常用于表示有限集)；

(2)描述法(常用于表示无限集)；

(3)图示法；

(4)区间法；

(5)用字母表示，常用的有：$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$)表示正整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{C}$ 表示复数集.

3. 元素和集合的关系

元素和集合的关系是个体和整体的隶属关系，常用符号"$\in$"或"$\notin$"连接表示.

4. 集合与集合的关系

集合与集合之间的关系有包含关系(子集关系)、相等关系、真子集关系三种.

(1)子集：对于任意的 $x\in A$，均有 $x\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2)等集：对于集合 A 和集合 B，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则集合 A 和集合 B 相等，记作 $A=B$.

(3)真子集：对于集合 A 和集合 B，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

5. 空集 $\varnothing$

不含任何元素的集合称为空集. 空集是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

解说例题

[例 1] 若集合 $S=\{x\,|\,x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$，集合 $T=\{x\,|\,x=4k\pm1,k\in\mathbf{N}\}$，则 ( )

A. $S\subsetneqq T$　　B. $T\subsetneqq S$　　C. $S=T$　　D. $S\neq T$

[解析] 方法一　先将集合 S、T 中的元素具体化，则有 $S=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，$T=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，所以 $S=T$，应选 C.

方法二　事实上，选择项 C、D 相互对立，其中必有一个正确. 在集合 S 中，若 n 为奇数，可设 $n=2m+1$，$m\in\mathbf{Z}$，此时 $x=2n-1=4m+1$，则 $x\in T$；

若 n 为偶数，可设 $n=2m$，$m\in\mathbf{Z}$，此时 $x=2n-1=4m-1$，则 $x\in T$.

所以，对任意的 $x\in S$，均有 $x\in T$，即 $S\subseteq T$；

另一方面，在集合 T 中，若 $x=4k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=4k+1=2(2k+1)-1$，而 $2k+1\in\mathbf{Z}$，故 $x\in S$；若 $x=4k-1$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=4k-1=2(2k)-1$，而 $2k\in\mathbf{Z}$，故 $x\in S$.

所以，对任意的 $x\in T$，均有 $x\in S$，即 $T\subseteq S$. 由于 $S\subseteq T$，$T\subseteq S$. 故 $S=T$，选择 C.

[点评] 本例主要考查集合与集合之间包含、相等关系的判断. 方法一用了具体化的方法，分别用列举法写出了两个集合中的元素；方法二用了子集(包含)和相等的定义，推出两个集合互为子集(互相包含)，从而得出结论 $S=T$.

[例 2] 满足条件 $\varnothing\subsetneqq M\subsetneqq\{0,1,2\}$ 的集合共有 ( )

A. 3 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

[解析] 集合 $\{0,1,2\}$ 的所有的子集个数为 $2^3=8$ 个，在这 8 个子集中，除去空集和它本身，即为满足条件的集合，故选 B.

[点评] 分清"子集"和"真子集"这两个不同的概念，同时牢记三条结论：空集是任何集合的子集，任何一个集合是它本身的子集，空集是任何非空集合的真子集.

[例 3] 设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q$

$=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

[解析] 依据题目中集合 $P+Q$ 的定义,则当 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$ 时,集合 $P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$(注意考虑集合中元素的互异性),所以集合 $P+Q$ 中元素的个数是 8,故选 B.

[例 4] 若非空数集 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x|13\leqslant x\leqslant 22\}$,则能使 $A\subseteq B$ 成立的所有 a 的集合是________.

[解析] 要使 $A\subseteq B$,只需 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a-5,\\2a+1\geqslant 13,\\3a-5\leqslant 22,\end{cases}$

所以 a 的集合为 $\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$.

[点评] 深刻理解基本概念是解答本问题的关键,本题中"$A\subseteq B$"即集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素.

[例 5] 同时满足(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,(2)若 $a\in M$,则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有________个.

[解析] 由已知条件,集合 M 中元素必须具备两个条件.不妨设 $1\in M$,那么 $6-1=5\in M$,由此可知 $M=\{1,5\}$;同理可推知 $\{2,4\}$,$\{3\}$,$\{1,5,2,4\}$,$\{1,5,3\}$,$\{2,4,3\}$,$\{1,2,3,4,5\}$ 都满足题设,所以满足题目要求的非空集合 M 有 7 个.

[点评] 正确理解题目中两个已知条件给出的符号语言,洞穿这两个条件的内在联系.

[例 6] 设 A 是数集,满足性质:若 $a\in A$,$\frac{1}{1-a}\in A$,且 $1\notin A$.

(1)若 $2\in A$,求 A;

(2)若 $a\in A$,求证:$1-\frac{1}{a}\in A$.

[解析] (1)由 $2\in A$,则 $\frac{1}{1-2}=-1\in A$,

故 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$,$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$,

$\therefore\ A=\left\{2,-1,\frac{1}{2}\right\}$.

(2)由 $a\in A$ 知 $\frac{1}{1-a}\in A$,

$\therefore\ \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{a}\in A$,得证.

[点评] 本例先由集合 A 的性质求出集合 A,然后又证明 a 和 $1-\frac{1}{a}$ 同时属于 A,实际上是 A 中元素的"对偶性".

[例 7] 已知集合 $A=\{x|mx^2-2x+3=0,m\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 是空集,求 m 的取值范围;

(2)若 A 中只有一个元素,求 m 的值;

(3)若 A 中至多只有一个元素,求 m 的取值范围.

[解析] 集合 A 是方程 $mx^2-2x+3=0$ 在实数范围内的解集.

(1)$\because$ A 是空集,

$\therefore$ 方程 $mx^2-2x+3=0$ 无解.

$\therefore$ $\Delta=4-12m<0$,即 $m>\frac{1}{3}$.

(2)$\because$ A 中只有一个元素,

$\therefore$ 方程 $mx^2-2x+3=0$ 只有一个解.

若 $m=0$,方程为 $-2x+3=0$,只有一解 $x=\frac{3}{2}$;

若 $m\neq 0$,则 $\Delta=0$,即 $4-12m=0$,$m=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ $m=0$ 或 $m=\frac{1}{3}$.

(3)A 中至多只有一个元素包含 A 中只有一个元素和 A 是空集两种含义,根据(1)、(2)的结果,得 $m=0$ 或 $m\geqslant\frac{1}{3}$.

[点评] 本题第(2)问容易忽略二次项系数等于零的情况,事实上此时方程是一次方程,只有一解,这是高考中经常考查的"分类讨论思想"的一个"命题点".

方法归纳

1. 对于集合问题,关键是认识集合的属性,而认识集合属性的关键是认识集合中元素的属性.

2. 解答集合问题,要把握好符号语言、文字语言和图形语言三者间的相互转化,通过转化,可以揭开集合的"面纱",洞穿集合问题的"真面目".

3. 在解决有关集合中的元素的问题时,最后的结论要注意检验,检验元素是否具备互异性.

4. 如果一个非空集合 A 中有 n 个元素,则它有 2^n 个不同的子集($C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$),有 2^n-1 个不同的非空子集,有 2^n-1 个不同的真子集,有 2^n-2 个不同的非空真子集.

成功训练

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,3,5,7\}$,集合 $M=\{1,|a-5|\}$,$M\subseteq U$,$\complement_U M=\{5,7\}$,则 a 的值为 ( )

A. 2 或 -8　　B. -8 或 -2

C. -2 或 8　　D. 2 或 8

2. 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$,则必有 ( )

A. $-1\in A$　　B. $0\in A$　　C. $\sqrt{3}\in A$　　D. $2\in A$

3. 方程 $x^2-xy+y^2=0(x,y\in\mathbf{R})$ 的解集为 ( )

A. $\{x=0,y=0\}$　　B. $\{0\}$

C. $\{(0,0)\}$　　D. $\varnothing$

4. 已知集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,集合 $N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则 ( )

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $N\subsetneqq M$　　D. $M\cap N=\varnothing$

5. 已知集合 $M=\{x|ax^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 是集合 $P=\{1,2\}$ 的真子集,则实数 a 的取值个数有 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 3 个　　D. 无数个

6. 集合 $M=\{x|x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{y|y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$,若 $x_0\in M$,$y_0\in N$,则 x_0y_0 与集合 M、N 的关系是 ( )

A. $x_0y_0\in M$ 但 $x_0y_0\notin N$　　B. $x_0y_0\notin M$ 且 $x_0y_0\notin N$

C. $x_0y_0\in N$ 但 $x_0y_0\notin M$　　D. $x_0y_0\in M$ 且 $x_0y_0\in N$

二、填空题

7. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，则满足 $A\cup B=M$ 的集合 B 共有________个.

8. 若一数集中的任一元素的倒数仍在该集合中，则称该集合为"可倒数集"，试写出一个含三个元素的可倒数集________(只需写出一个集合).

9. 已知集合 $A=\{y\mid y=2^{|x|}-1,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{y\mid y=\sqrt{-x^2+2x+3},x\in\mathbf{R}\}$，则集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}=$________.

10. 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{x,\dfrac{y}{x},1\right\}$，也可表示为 $\{|x|,x+y,0\}$，则 x^5-y^3 的值为________.

三、解答题

11. 设关于 x 的不等式 $|x-a|<2(a\in\mathbf{R})$ 的解集为 A，不等式 $\dfrac{2x-1}{x+2}<1$ 的解集为 B.

(1)求集合 A、B；

(2)若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

12. 已知集合 $A=\{x\mid -2k+6<x<k^2-3\}$，$B=\{x\mid -k<x<k\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 k 的取值范围.

好题特荐

1. 已知 $M=\{x\mid x=a^2+2a+4,a\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=b^2-4b+6,b\in\mathbf{Z}\}$，则 M、N 之间的关系是　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. M 与 N 之间没有包含关系

2. 已知 $M=\{x\mid x=a^2+2a+4,a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\mid y=b^2-4b+6,b\in\mathbf{R}\}$，则 M、N 之间的关系是　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. M 与 N 之间没有包含关系

3. $M=\{x\mid x=1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x=1,y\in\mathbf{R}\}$，则 M、N 之间的关系是　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. M 与 N 之间没有包含关系

4. $M=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y>0\}$，$N=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y=|x|\}$，则下列关系正确的是　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. M 与 N 之间没有包含关系

心算口答

这些简单的问题你全能做对吗?

快算与速答以下各题确实是较高的要求，但能力是培养出来的，要相信自己不比别人差，别人能做到的，我肯定也能！志气、毅力、信心，是成功的前提.

尝试一下吧，鼓足勇气！

1. 给出下列选项：①$\{\varnothing,\{0\},0\}$；②{那张台子，这只狗，$\sqrt{2}$}；③{校园里的小树}；④$\{-\pi,-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2},\cdots\cdots\}$，其中可以构成集合的选项是　　(　　)

A. ①、②、④　　B. ①

C. ②、③　　D. ①、②

2. 非空集合 P、Q、$\mathbf{N}$ 满足 $P\cup Q=Q$，$Q\cap\mathbf{N}=\varnothing$，则 P、$\mathbf{N}$ 之间的关系是　　(　　)

A. $P=\mathbf{N}$　　B. $P\subsetneqq\mathbf{N}$

C. $P\supsetneqq\mathbf{N}$　　D. $P\cap\mathbf{N}=\varnothing$

3. 已知 $\{x\mid x^2-1=0\}\subsetneqq A\subseteq\{-1,0,1,2\}$，则符合条件的集合 A 的个数是　　(　　)

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 8

4. 已知 $A=\{1,x^2\}$，$B=\{1,3,x\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则 x 的不同值有　　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 已知集合 $M=$ {直线}，集合 $N=$ {圆}；则 $M\cap N$ 中的元素个数是　　(　　)

A. 0　　B. 0 或 1

C. 0 或 2　　D. 0 或 1 或 2

(答案在后面)

第二节　集合的运算

双基提炼

1. 集合的运算

(1)交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$.

(2)并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$.

(3)补集：设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$)，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集，记作 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x|x\in S$，且 $x\notin A\}$.

2. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质：$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)并集的运算性质：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$；

(3)补集的运算性质：$(\complement_U A)\cap A=\varnothing$，$(\complement_U A)\cup A=U$，$\complement_U(\complement_U A)=A$.

解说例题

[例 1] 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合 $\{2,7,8\}$ 是　　(　　)

A. $A\cup B$　　B. $A\cap B$

C. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$　　D. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

[解析] 该题有两种思路，一种是将每一个选择项中集合运算的结果做出后选择正确答案，另一种是利用韦恩图来作出判断(如图 1.2-1 所示)，观察可知 $\{2,7,8\}=\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，故选 D.

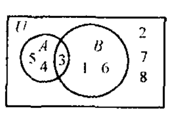


图 1.2-1

[点评] 对于集合的运算问题，需要明确题目中集合间的关系，灵活选择解决问题尤其是选择题的方法.

[例 2] 已知全集 $U=\{0,1,3,5,7,9\}$，$A\cap\complement_U B=\{1\}$，$B=\{3,5,7\}$，那么 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 等于　　(　　)

A. $\{0,3,7\}$　　B. $\{0,9\}$

C. $\varnothing$　　D. $\{7\}$

[解析] ∵ $A\cap\complement_U B=\{1\}$，$B=\{3,5,7\}$，

∴ $A\cup B=\{1,3,5,7\}$，

∴ $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{0,9\}$，所以选 B.

[点评] 本题涉及集合的交并补运算以及集合运算性质的灵活运用，熟练掌握集合的运算性质，能简化解题过程.

[例 3] 已知 $1\in\{a^2-a-1,a,-1\}$，则 $a=$________.

[解析] 因为 $1\in\{a^2-a-1,a,-1\}$，

则 $a^2-a-1=1$ 或 $a=1$.

①当 $a^2-a-1=1$ 时，$a=2$ 或 $a=-1$，而 $a=-1$ 时集合中出现重复元素，不满足集合中元素的互异性，舍去，故 $a=2$.

②当 $a=1$ 时，$a^2-a-1=-1$，集合中出现重复元素，不满足集合中元素的互异性，舍去.

综上所述 $a=2$.

[点评] 解此类题目时，一定要检验所得结果是否满足集合中元素的互异性.

[例 4] 全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则 a 的值为________.

[解析] 由全集和补集的概念，$5\in\complement_U A$，

∴ $5\notin A$ 且 $5\in U$. 由 $a^2+2a-3=5$，得 $a=-4$ 或 $a=2$，代入 U、A 中检验，符合条件.

∴ a 的值为 -4 或 2.

[点评] 此例利用全集和补集的概念使问题获解，特别地，因为 $\complement_U A$ 中不含参数，从 $\complement_U A$ 中元素 5 入手，找到问题的突破口，使此题解答简捷.

[例 5] 已知全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+a\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$，且 $B\subseteq A$，求 a 的取值范围.

[解析] $A=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，设 $y=x^2-2ax+a$，则

①当 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$，即 $0<a<1$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；

②当 $\Delta=0$ 时，$a=0$ 或 $a=1$.

若 $a=0$，则 $y=x^2$，图像与 x 轴的交点的横坐标为零，而 $0\notin[1,2]$，故 $a=0$ 应舍去；

若 $a=1$，则 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，图像与 x 轴的交点的横坐标为 1，$1\in[1,2]$，故 $a=1$ 满足条件；

③当 $\Delta>0$ 时，$y=x^2-2ax+a$ 的图像与 x 轴有两个交点，且令 $f(x)=x^2-2ax+a$

∵ $B\subseteq A$，

∴ 方程 $x^2-2ax+a=0$ 的两根位于 1，2 之间.

$$\therefore\ \begin{cases}1<a<2\\ \Delta=4a^2-4a>0\\ f(1)\geqslant 0\\ f(2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<a<2\\ a>1\text{ 或 }a<0\\ 1-2a+a\geqslant 0\\ 4-4a+a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\text{解集为空集.}$$

由①②③得 $0<a\leqslant 1$.

[点评] ①处理集合问题时，要注意考虑所给集合是否可以是空集. 本例中就按 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 进行讨论；

②本例最终将问题转化为一元二次方程的根的分布问题来解决，从根本上反映了二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间密不可分的联系. 同时解题时，要注意数形结合，防止漏解.

[例 6] 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

[解析] $A=\{x|x^2+4x=0\}=\{-4,0\}$.

(1)由于 $A\cap B=B$，则有 $B\subseteq A$，可知集合 B 或为 $\varnothing$，或为 $\{0\}$，$\{-4\}$，$\{-4,0\}$.

①若 $B=\varnothing$，由 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，得 $a<-1$.

②若 $0\in B$，代入得 $a^2-1=0$，

$\therefore\ a=1$，或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，$B=\{x|x^2+4x=0\}=\{-4,0\}=A$，符合题意；

当 $a=-1$ 时，$B=\{x|x^2=0\}=\{0\}\subsetneqq A$，也符合题意.

③若 $-4\in B$，代入得 $a^2-8a+7=0$，解得 $a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，②中已经讨论，符合题意.

当 $a=7$ 时，$B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}$，不符合题意，因此 $a\neq 7$.

由①、②、③得 $a=1$，或 $a\leqslant -1$.

(2)因为 $A\cup B=B$，所以 $A\subseteq B$. 又 $A=\{-4,0\}$，而 B 中至多只有两个元素，因此应有 $A=B$. 由(1)知，$a=1$.

［点评］　明确 $A\cap B=B$ 和 $A\cup B=B$ 的含义，根据问题的需要，将 $A\cap B=B$ 和 $A\cup B=B$ 转化为等价的关系式 $B\subseteq A$ 和 $A\subseteq B$ 是解决本题的关键. 同时，在包含关系式 $B\subseteq A$ 中，不要漏掉 $B=\varnothing$ 的情况.

方法技巧

1. 集合问题的核心，一是集合中元素的互异性；二是集合的交、并、补运算. 在进行集合运算时，注意集合中元素的属性.

［例 1］　已知集合 $A=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y^2=x,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$________.

［解析］　两个集合中元素的属性不同，A 中元素是数轴上的点，B 中元素为坐标平面上的点，故 $A\cap B=\varnothing$.

2. 解答集合问题的一般程序：首先认清集合中元素的属性，然后依据元素的不同属性采用不同的方法求解. 一般规律表现为“若给定的集合是不等式的解集，用数轴法求解；若给定的集合是点集，用数形结合法求解；若给定的集合是抽象集合，用图示法解之.”

3. 空集是一个特殊的集合，在题设中未指明某一集合为非空集合时，要注意是否应考虑该集合是空集的情况，因此，空集是“分类讨论思想”的一个“命题点”.

［例 2］　若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则满足上述条件的集合 A 中元素有________个.

［解析］　$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则 $A\subseteq B\cap C$.

而 $B\cap C=\{0,2,4\}$，故 A 是集合 $\{0,2,4\}$ 的子集，A 中元素有 $2^3=8$ 个，遗忘 $\varnothing$ 常见.

4. 掌握集合运算的两条重要性质，正确地使用结论进行等价转化，常常可以做到化难为易，化生为熟，化繁为简.

性质一：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$；

性质二：$\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$；

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

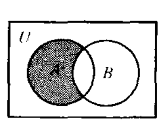
成功训练

一、选择题

1. 设 U 为全集，集合 A、B 是其子集，则图中阴影部分表示的集合为　　(　　)

A. $A\cup\complement_UB$　　B. $A\cap\complement_UB$

C. $\complement_UB\cap\complement_UB$　　D. $\complement_UA\cap\complement_UB$



第 1 题图

2. 设集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{2,3,4\}$，则 $(A\cap B)\cup C$ 等于　　(　　)

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

3. 若集合 $M=\{x||x|\leqslant 2\}$，$N=\{x|x^2-3x=0\}$，则 $M\cap N$ 等于　　(　　)

A. $\{3\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,3\}$

4. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,a^2-1,4\}$，$\complement_UA=\{2,a+3\}$，则实数 a 的值为　　(　　)

A. -2　　B. 0

C. 2　　D. $\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{6}$

5. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}$，集合 $P=\{x|k<x<k+1,k\in\mathbf{R}\}$，且 $\complement_UM\cap P\neq\varnothing$，则实数 k 的取值范围是　　(　　)

A. $k<0$ 或 $k>3$　　B. $1<k<2$

C. $0<k<3$　　D. $-1<k<3$

6. 已知全集 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，则 $\complement_U(M\cup N)$ 等于　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

二、填空题

7. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$________.

8. 已知集合 $M=\{x|x-a=0\}$，$N=\{x|ax=1\}$，若 $M\cap N=N$，则实数 a 的取值的集合为________.

9. 某班有 50 名学生报名参加两项比赛，参加 A 项的有 30 人，参加 B 项的有 33 人，且 A、B 两项都不参加的学生比 A、B 两项都参加的学生的 $\frac{1}{3}$ 多一人，则只参加 A 项的学生有________人.

10. 已知 $A=\{x|x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=(3,4]$，则 $ab=$________.

三、解答题

11. 已知 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$，$Q=\left\{(x,y)\middle|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\right\}$，且 $P\cap Q=Q$，求 m 的取值范围.

12. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A；

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

*13. 已知集合 $P\subsetneqq M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$，$Q\subsetneqq N=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$，$M\cap N=\varnothing$，求集合 $P\cup Q$ 的个数.

（这是一道较难的集合与排列组合的综合题.它巧妙地掺和了集合的子、交、并的运算，对于某些读者来说，确实不失为一道强化概念，锻炼能力的好题.）

好题特荐

1. 设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记 $\overline{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$，$\overline{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$，则 $(\overline{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\overline{Q})\cup(\overline{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\overline{P})$ 等于 （　　）

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

2. 已知数集 $M=\left\{x\,\middle|\,m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\right\}$ 和数集 $N=\left\{x\,\middle|\,n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\right\}$，且 M、N 都是集合 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集，如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 的“长度”，那么集合 $M\cap N$ 的“长度”的最小值是 （　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

3. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $P=\{x\mid f(x)=0\}$，$Q=\{x\mid g(x)=0\}$，$S=\{x\mid \varphi(x)=0\}$，则方程 $\frac{f^2(x)+g^2(x)}{\varphi^2(x)}=0$ 的解集为 （　　）

A. $P\cap Q$　　B. $P\cap Q\cap S$

C. $(P\cap Q)\cap(\complement_U S)$　　D. $(P\cup Q)\cap(\complement_U S)$

活题巧解

为什么这些题一做就错

有人说：映射还没有复习，我能完成下列各题吗？为什么不能？都是些基础题，学过了，回忆一下，肯定行！

真的很简单很容易解答吗？你试试看，做错了几题？为什么错了？找原因.当然，也可以到你复习完了映射再来练，到那时可能底气更足.

1. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则 $A\to A$ 的一一映射有________个.

提示　既是映射问题，又涉及排列组合知识，请当心啊！

2. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，满足 $f(c)=3$ 的 $A\to B$ 的映射有________个.

提示　在解答过程中，考虑应用了加法原理还是乘法原理.

3. 如果 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{-1,0,1\}$，那么满足 $f(c)=f(a)+f(b)$ 的 $A\to B$ 的映射有________个.

提示　本题与上面第2题有何区别？

4. 设 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则满足 $x+f(x)$ 为偶数的 $A\to B$ 的映射有________个.

提示　条件变了，结果会怎么样呢？在比较中鉴别.

5. 已知 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则满足有且仅有两个元素成自身映射的 $A\to A$ 的一一映射有________个.

提示　如何理解有且仅有两个元素的自身映射？

6. $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$，则满足 a_1 的象不是 b_1，a_5 的象不是 b_5 的 $A\to B$ 的一一映射有________个.

提示　在排列问题中能找到简单的模型吗？

第三节 逻辑联结词与四种命题

双基提炼

1. 逻辑联结词

(1)命题:可以判断真假的语句叫做命题.

(2)逻辑联结词:“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

或:两个简单命题至少一个成立.

且:两个简单命题都成立.

非:对一个命题的否定.

(3)简单命题与复合命题:不含逻辑联结词的命题叫做简单命题;由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

(4)判断复合命题真假的方法:判断复合命题的真假,首先要分清复合命题的构成形式,正确判断构成复合命题的简单命题的真假,然后按下面的真值表来加以判定.

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

2. 四种命题及其相互关系

(1)命题的四种形式:

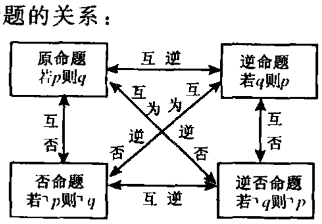
原命题:若 p 则 q;

逆命题:若 q 则 p;

否命题:若$\neg p$ 则$\neg q$;

逆命题:若$\neg q$ 则$\neg p$.

(2)四种命题的关系:



3. 反证法

从命题结论的反面出发,引出矛盾,从而证明命题成立,这样的证明方法叫做反证法.其一般步骤:

(1)假设命题的结论不成立,即假设命题结论的反面成立(反设结论);

(2)从这个假设出发,经过推理论证得出矛盾(推出矛盾);

(3)由矛盾判断假设不正确,从而肯定命题的结论正确(肯定结论).

解说例题

[例 1] 下列命题:①$5>4$ 或 $4>5$;②$9\geqslant 3$;③命题“若 $a>b$,则 $a+c>b+c$”的否命题;④命题“矩形的两条对角线相等”的逆命题.其中假命题的个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

[解析] ①是 p 或 q 形式的复合命题,根据真值表,p 真 q 假,故 p 或 q 为真;

②是 p 或 q 形式的复合命题,同理为真;

③否命题是“若 $a\leqslant b$,则 $a+c\leqslant b+c$”,是真命题;

④逆命题是“两条对角线相等的四边形是矩形”,是假命题,比如等腰梯形的对角线也相等.

∴ 应选 B.

[点评] 本题考查四种命题的概念,以及如何判断它们的真假.

[例 2] 如果命题“p 或 q”是真命题,“p 且 q”是假命题,那么 ( )

A. 命题 p 和命题 q 都是假命题

B. 命题 p 和命题 q 都是真命题

C. 命题 p 和命题“非 q”真值不同

D. 命题 p 和命题 q 的真值不同

[解析] 用真值表容易得出正确结论,或可像下面这样分析:

∵ “p 或 q”是真命题,

∴ p 和 q 中至少有一个命题为真;

又∵ “p 且 q”是假命题,

∴ p 和 q 中至少有一个命题为假命题.

∴ p 和 q 两命题一真一假.选择 D.

[点评] 本题属于真假命题的判断,关键是要搞清命题 p,q,p 或 q,p 且 q,非 p,非 q 的真假关系.

[例 3] 若 p 的逆命题是 r,r 的否命题是 s,则 s 是 p 的否命题的________命题.

[解析] 设命题 p:若 m,则 n,

∵ p 的逆命题是 r,

∴ 命题 r:若 n,则 m.

又∵ r 的否命题是 s,

∴ 命题 s:若$\neg n$,则$\neg m$.

∵ p 的否命题是:若$\neg m$,则$\neg n$,

∴ 命题 s 是 p 的否命题的逆命题.

[点评] 本题也可画出四种命题的关系图,从关系图中分析观察.

[例 4] 已知 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根;

q:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.

若 p 或 q 为真,p 且 q 为假,求实数 m 的取值范围.

[解析] 若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根,则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0.\end{cases}$ 解得 $m>2$,即 p:$m>2$.

若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根,则 $\Delta=16(m-2)^2-16<0$,解得 $1<m<3$,即 q:$1<m<3$.

因为 p 或 q 为真，p 且 q 为假，可判断 p、q 为一真一假两命题，若 p 真 q 假，则 $\begin{cases} m>2, \\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3, \end{cases}$

即 $m\geqslant 3$；

若 p 假 q 真，则 $\begin{cases} m\leqslant 2, \\ 1<m<3, \end{cases}$

即 $1<m\leqslant 2$.

所以 m 的取值范围为 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

［点评］ 根据真值表可由简单命题的真假来判断复合命题的真假，反之，由复合命题的真假亦可断定构成复合命题的简单命题的真假情况.

［例 5］ 如果命题 p：$|x^2-x|\geqslant 6$，q：$x\in\mathbf{Z}$，且“p 且 q”与“非 q”同时为假命题，则 $x=$________.

［解析］ 由 $|x^2-x|\geqslant 6\Rightarrow x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$，故 p：$x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$.

因为“非 q”为假命题，故 q：$x\in\mathbf{Z}$ 为真命题.

又 $\because$ “p 且 q”为假命题，

$\therefore$ p 为假命题.

$\therefore$ $-2<x<3$ 且 $x\in\mathbf{Z}$，故 $x=-1,0,1,2$.

［点评］ 利用复合命题的真值表，不但可以判断复合命题的真假，还可以解决与复合命题真假相关的一些问题.

［例 6］ a、b、c 为实数，且 $a=b+c+1$，证明：两个一元二次方程 $x^2+x+b=0$，$x^2+ax+c=0$ 中至少有一个方程有两个不相等的实数根.

［证明］ 假设所给的两个方程都没有两个不相等的实数根，则 $\Delta_1=1-4b\leqslant 0$，$\Delta_2=a^2-4c\leqslant 0$，

$\therefore$ $\Delta_1+\Delta_2=1-4b+a^2-4c\leqslant 0$.

$\because$ $a=b+c+1$，知 $b+c=a-1$，

$\therefore$ $1-4(a-1)+a^2\leqslant 0$，即 $a^2-4a+5\leqslant 0$. 但是 $a^2-4a+5=(a-2)^2+1>0$，故矛盾.

所以假设不成立，原命题正确，即两个方程中至少有一个方程有两个不相等的实数根.

［点评］ 正面考虑“至少有一个”需分为“只有一个”和“两个都”两种情况，并且直接证明困难，“正难则反”，所以考虑反证法.

方法技巧

1. 要说明一个命题是真命题，必须严格证明；但要说明一个命题是假命题，只要构造一个反例即可.

2. 注意命题的否定和否命题的区别：给定命题 p，命题 p 的否定是“不改变命题 p 的条件，只否定命题 p 的结论”；命题 p 的否命题是“既否定命题 p 的条件，又否定命题 p 的结论”.

常见的正面叙述词语和它的否定词语：

正面词语	等于	大于(>)	小于(<)	是	都是	任意的
否定词语	不等于	不大于(≤)	不小于(≥)	不是	不都是	某个

正面词语	所有的	任意两个	至多有一个	至少有一个	至多有 n 个
否定词语	某些	某两个	至少有两个	一个也没有	至少有 $n+1$ 个

3. 原命题和它的逆否命题、原命题的逆命题和原命题的否命题分别互为等价命题，也即它们真假相同. 因此，判断四种命题的真假时，可以只判断其中的两个；一个命题的真假不容易判断时，可以转化为判断它的逆否命题的真假.

4. 反证法的运用：

①用反证法证明命题的关键是推出矛盾，矛盾一般有以下三种：

a. 与原命题中的条件矛盾；

b. 与假设的结论矛盾；

c. 与已知的定理、公理、定义或公式矛盾.

②可用反证法证明的几种类型题目：

a. 结论本身是以否定形式出现的命题；

b. 有关结论是以“至多……”或“至少……”等形式出现的命题；

c. 有关唯一性、存在性的问题；

d. 结论的反面是比结论更具体、更容易研究的命题.

成功训练

一、选择题

1. “所有的函数都是连续的”的否命题是 ( )

A. 某些函数不是连续的

B. 所有的函数都不是连续的

C. 没有函数是连续的

D. 没有函数不是连续的

2. 由“p：$8+7=16$，q：$\pi>3$”构成复合命题，下列判断正确的是 ( )

A. p 或 q 为假，p 且 q 为真，非 p 为真

B. p 或 q 为假，p 且 q 为假，非 p 为真

C. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为假

D. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为真

3. 下列给出的判断中错误的是 ( )

A. 命题“$\varnothing\subseteq\varnothing$ 或 $7\notin\{5,6\}$”是真命题（其中 $\varnothing$ 为空集）

B. 命题“若 q 则 p”与“若 $\neg p$ 则 $\neg q$”互为逆否命题

C. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\angle A>\angle B$”是“$\tan A>\tan B$”的必要不充分条件

D. “菱形的两条对角线互相垂直”的逆命题是假命题

4. 若命题 p：$x\in A\cap B$，则 $\neg p$ 是 ( )

A. $x\in A$ 且 $x\notin B$　　B. $x\notin A$ 或 $x\notin B$

C. $x\notin A$ 且 $x\notin B$　　D. $x\in A\cup B$

5. 命题“若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$”（这里 a、b、c 都是实数）与它的逆命题、否命题、逆否命题中，真命题的个数为 ( )

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

6. 已知命题 p：不等式 $|x-1|>m$ 的解集是 $\mathbf{R}$，命题 q：函数 $f(x)=\dfrac{2-m}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 若命题“p 或 q”为真，命题“p 且 q”为假，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,2)$

C. $[0,2)$　　D. $(-\infty,2)$

二、填空题

7. 设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\nsubseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；

②$A\nsubseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

③$A\nsubseteq B \Leftrightarrow A \nsupseteq B$；

④$A\nsubseteq B \Leftrightarrow$存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________.（把符合要求的命题序号都填上）

8.命题“a、b、c 三个数中至少有一个是零”的否定是________.

9.设有两个命题：①不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集是 $\mathbf{R}$；②函数 $f(x)=-(7-3m)^x$ 是减函数.

若这两个命题中有且只有一个是真命题，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题

10.写出下列命题的否命题及命题的否定形式，并判断真假：

(1)若 $m>0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根；

(2)若 x、y 都是奇数，则 $x+y$ 是奇数；

(3)若 $abc=0$，则 a、b、c 中至少有一个为零.

11.用反证法证明：当 $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$ 时，$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能都大于 $\frac{1}{4}$.

12.已知下列三个方程：$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$，其中至少有一个方程有实根，求实数 a 的取值范围.

好题特荐

1.关于甲、乙、丙三人参加高考的结果有下列三个正确的判断：

①若甲未被录取，则乙、丙都被录取；

②乙与丙中必有一个未被录取；

③或者甲未被录取，或者乙被录取.

则三人中被录取的是（　　）

A.甲　　B.丙　　C.甲与丙　　D.甲与乙

2.四个同学参加一次数学竞赛，每人预测获奖情况如下：

甲：如果乙获奖，那以我就没获奖；

乙：甲没有获奖，丁也没有获奖；

丙：甲获奖或者乙获奖；

丁：如果丙没有获奖，那么乙获奖.

竞赛结果实际有 1 人获奖，且四人的预测中恰好 3 人正确，则获奖者是________.

课余拾零

相亲相爱的数

人与人之间讲友谊，数与数之间也“相亲相爱”.220 和 284 就是一对亲密无间的好朋友.为什么这样说呢？

220 除去本身以外还有 11 个因数，它们是 1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110.这 11 个因数之和恰好等于 284.同样，284 的因数 1，2，4，71，142 之和又恰好等于 220.

这两个数是你中有我，我中有你，相亲相爱，形影不离.古希腊给具有这样性质的两个数叫做“相亲数”，也叫“亲和数”.

220 和 284 是第一对“相亲数”.17 世纪法国数学家费尔马，找到了第二对相亲数 17296 和 18416.几乎在同时期法国数学家在给默森尼的信中提出了第三对相亲数 9363544 和 9437056.惊人的是瑞士数学家欧拉于 1750 年一次公布了 60 对相亲数，人们以为，这一下把相亲数都找完了.

谁料到，过了一个世纪，意大利年仅 16 岁的青年巴格尼于 1866 年公布了一对相亲数，它们比 220 和 284 稍大一点，这一对相亲数是 1184 和 1210.前面的几位大数学家竟无一人找到它俩！

最近，美国数学家在耶鲁大学的计算机上，对所有一百万以下的数进行了检验，又找到了 42 对相亲数.

第四节　充分条件与必要条件

双基提炼

1. 充分条件

如果 A 成立，那么 B 成立，则条件 A 是 B 成立的充分条件.

2. 必要条件

如果 A 成立，那么 B 成立，则条件 B 是 A 成立的必要条件.

注意：A 是 B 成立的充分条件，与 B 是 A 成立的必要条件，这两句话是完全等价的，它们是同一个逻辑关系"$A\Rightarrow B$"的不同表达方法.

3. 充要条件

如果 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，我们就说条件 A 是 B 成立的充要条件；与此同时，B 也是 A 成立的充要条件，所以我们称条件 A 和 B 互为充要条件.

解说例题

［例 1］ 指出下列命题中，p 是 q 的什么条件（在"充分不必要条件"、"必要不充分条件"、"充要条件"、"既不充分也不必要条件"中选出一种作答）.

(1)在 $\triangle ABC$ 中，$p:\angle A=\angle B$，$q:\sin A=\sin B$；

(2)对于实数 x、y，$p:x+y\neq 8$，$q:x\neq 2$ 或 $y\neq 6$；

(3)非空集合 A、B 中，$p:x\in A\cup B$，$q:x\in B$；

(4)已知 x、$y\in\mathbf{R}$，$p:(x-1)^2+(y-2)^2=0$，

$q:(x-1)(y-2)=0$.

［解析］ (1)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle B\Rightarrow\sin A=\sin B$，反之，若 $\sin A=\sin B$，因为 A 与 B 不可能互补（因为三角形三个内角和为 $180°$），所以只有 $A=B$. 故 p 是 q 的充要条件；

(2)易知，$\neg p:x+y=8$，$\neg q:x=2$ 且 $y=6$，显然 $\neg q\Rightarrow\neg p$，但 $\neg p\not\Rightarrow\neg q$，即 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件，根据原命题和逆否命题的等价性知，p 是 q 的充分不必要条件；

(3)显然 $x\in A\cup B$ 不一定有 $x\in B$，但 $x\in B$ 一定有 $x\in A\cup B$，所以 p 是 q 的必要不充分条件；

(4)条件 $p:x=1$ 且 $y=2$，条件 $q:x=1$ 或 $y=2$，所以 $p\Rightarrow q$ 但 $q\not\Rightarrow p$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

［点评］ *判断 p 是 q 的什么条件，需要从两方面分析：一是由条件 p 能否推得条件 q，二是由条件 q 能否推得条件 p. 对于带有否定性的命题或比较难判断的命题，除借助集合思想把抽象、复杂问题形象化、直观化外，还可利用原命题和逆否命题、逆命题和否命题的等价性，转化为判断它的等价命题.*

［例 2］ 设集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+1}<0\right.\right\}$，$B=\{x\,|\,|x-1|<a\}$，则"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

［解析］ $\because$ $A=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+1}<0\right.\right\}=(-1,1)$，

$B=\{x\,|\,|x-1|<a\}=(-a+1,a+1)$，

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$B=(0,2)$，可推出 $A\cap B\neq\varnothing$；

取 $a=2$，显然此时 $B=(-1,3)$，也满足 $A\cap B\neq\varnothing$，即 $A\cap B\neq\varnothing\not\Rightarrow a=1$. 综上，知"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分不必要条件，故选 A.

［点评］ *判断条件 p 和 q 的关系，其本质是判断命题"若 p 则 q"和命题"若 q 则 p"的真假. 要说明一个命题是假命题，我们经常是举出反例.*

［例 3］ 关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件是________.

［解析］ (1)当 $a=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$，满足题目要求；

(2)当 $a\neq 0$ 时，

①方程有一个正根和一个负根，等价于

$$\begin{cases}\Delta=4-4a>0,\\ \frac{1}{a}<0.\end{cases}$$

解得 $a<0$；

②方程有两个负根，等价于

$$\begin{cases}\Delta=4-4a\geqslant 0,\\ \frac{-2}{a}<0,\\ \frac{1}{a}>0.\end{cases}$$

解得 $0<a\leqslant 1$.

综上可知，方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件是 $a\leqslant 1$.

［点评］ *首先要判断所研究的方程是几次方程，若是一元二次方程，再分别考虑有一个负根和有两个负根的充要条件. 其次一定要注意，通常我们解方程、解不等式的过程中的上一步和下一步都是互为充要条件的.*

探求充要条件时，要保证条件和结论间的等价性，其方法往往是先求出结论成立的必要条件，然后再证明该条件是结论成立的充分条件.

［例 4］ 已知 $p:x^2-8x-20>0$，$q:x^2-2x+1-a^2>0$，若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

［解析］ $p:A=\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>10\}$，$q:B=\{x\,|\,x<1-|a|$，或 $x>1+|a|\}$，如图 1.4-1 所示，依题意 $p\Rightarrow q$，但 $q\not\Rightarrow p$，说明 $A\subsetneqq B$，

则有 $\begin{cases}1-|a|\geqslant -2,\\ 1+|a|\leqslant 10.\end{cases}$

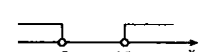


图 1.4-1

解得 $0\leqslant|a|\leqslant 3$，

$\therefore$ $-3\leqslant a\leqslant 3$.

［点评］ *利用数轴观察，用集合的观点研究充分条件和必要条件，有时能找到更简捷的解题途径. 同时，在解含参数*

不等式中，通过引入绝对值避开了分类讨论.

[例 5] 求关于 x 的方程 $x^2-mx+3m-2=0$ 的两根均大于 1 的充要条件.

[解析] 设方程的两根分别为 x_1、x_2，则原方程有两个大于 1 的根的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=m^2-4(3m-2)\geqslant 0,\\(x_1-1)+(x_2-1)>0,\\(x_1-1)(x_2-1)>0,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\Delta=m^2-12m+8\geqslant 0,\\(x_1+x_2)-2>0,\\x_1x_2-(x+x_2)+1>0.\end{cases}$$

又∵ $x_1+x_2=m, x_1x_2=3m-2$,

∴ $$\begin{cases}m\geqslant 6+2\sqrt{7}\text{ 或 }m\leqslant 6-2\sqrt{7},\\m>2,\\m>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

故所求的充要条件为 $m\geqslant 6+2\sqrt{7}$.

[点评] 本题除了利用根与系数关系外，还可利用二次函数的图像及一元二次方程的根的分布情况来探求满足题意的充要条件.接着请思考以下问题：$\begin{cases}x_1+x_2>2,\\x_1x_2>1\end{cases}$ 是方程的两根均大于 1 的充要条件吗？为什么不对？

[例 6] 求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根，当且仅当 $ac<0$.

[证明] (1)(必要性)

∵ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根，

∴ $\Delta=b^2-4ac>0, x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$.

∴ $ac<0$.

(2)(充分性)

∵ $ac<0$,

∴ $\Delta=b^2-4ac>0$，且 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$.

∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等实数根，且两根异号，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根.

[点评] “当且仅当”就是充要条件的意思，等价语句还有“要且仅要”、“需要仅需”、“有且仅有”、“是且仅是”等.

方法技巧

1. 处理充分、必要条件问题时，首先要分清条件和结论，然后才能进行推理和判断.

2. 判断所给命题间的充要关系的常用方法：

①定义法：判断 p 和 q 的关系，其本质上是分别判断命题“若 p 则 q”和命题“若 q 则 p”的真假；

②等价转换法：当所给命题的关系不容易判断时，可对命题进行等价转换，利用原命题和逆否命题等价转换为对其逆否命题进行判断，例如，若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件，反之亦然；

③集合法：在命题的条件和结论间的关系判断有困难时，有时可从集合的角度来考虑，即条件 p、q 对应的集合分别为 A、B，则

a. 若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；

b. 若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

c. 若 $A=B$，则 p 和 q 互为充要条件；

d. 若 $A\nsubseteq B$ 且 $B\nsubseteq A$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

3. 确定条件为不充分或不必要条件时，常用构造反例的方法来说明.

成功训练

一、选择题

1. “$\sin A=\dfrac{1}{2}$”是“$\angle A=30^\circ$”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，则 p 是 q 的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

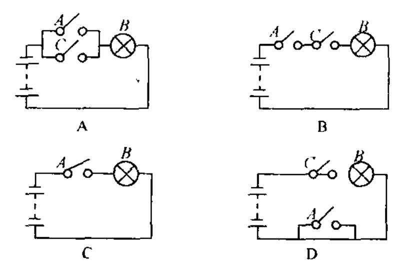
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设集合 $M=\{x\mid x>2\}$，$P=\{x\mid x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in M\cap P$”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 在下列电路图中，表示开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要但不充分条件的线路图是 (　　)



6. 若不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$

C. $a<\dfrac{1}{2}$ 或 $a>\dfrac{3}{2}$　　D. $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$

二、填空题

7. 已知命题 $p:|x-2|\leqslant 1$，命题 $q:x^2<5x-6$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 成立的________条件.

8. “p 或 q 为真命题”是“p 且 q 为真命题”的________条件.

9. 已知 $p:x^2-2x-3>0$，$q:\dfrac{1}{x^2-x-6}>0$，那么 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.

三、解答题

10. 当且仅当 m 取什么整数时，关于 x 的一元二次方程：

$$\begin{cases} mx^2-4x+4=0 & ① \\ x^2-4mx+4m^2-4m-5=0 & ② \end{cases}$$

的根都是整数.

11. 设 α、β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个根，试分析 $a>2$ 且 $b>1$ 是两根 α、β 均大于 1 的什么条件？

12. 求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

好题特荐

1. 设集合 $M=(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$，$P=[-a,8]$.

(1)求 a 的一个值，使它成为 $M\cap P=(5,8]$ 的一个充分但不必要条件；

(2)求 a 的一个取值范围，使它成为 $M\cap P=(5,8]$ 的一个必要但不充分条件.

夯实基础

这一组关于充要条件的基础题值得一练

1. 集合 $A=B$ 是 $A\cap C=B\cap C$ 的充要条件，则集合 C 必须满足________.

答 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq C$.

2. 已知集合 M、N 非空，命题甲：$M\cup N=N$；命题乙：$M\subsetneqq N$，则甲是乙的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答 B

3. $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$ 是 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的什么条件？

答 必要不充分.

4. “$b=\sqrt{ac}$”是 a,b,c 成等比数列的($a,b,c\in\mathbf{R}$)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答 D

(反例：$a=0,b=0$，充分条件不成立；a,b,c 成等比数列，还可以有 $b=-\sqrt{ac}$，必要条件不成立.)

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，“$p+q=m+n$”是“$a_p+a_q=a_m+a_n$”成立的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答 充分不必要条件，选 A. 必要条件不成立的反例：$\{a_n\}$为常数数列.

6. 命题甲：函数 $y=f(x)$ 在定义域上单调；命题乙：函数 $y=f(x)$ 在定义域上存在反函数，则命题甲是命题乙的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

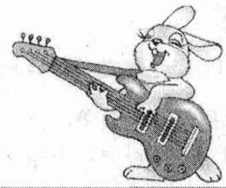
C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答 A

(单调函数必存在反函数，反之，存在反函数的函数未必单调. 反例：$y=-\frac{1}{x}$.)

二 函数



第一节 映射与函数

双基提炼

1. 映射

(1)映射的定义:设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\to B$.

(2)象与原象:如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,那么,和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象,a 叫做 b 的原象.

注意:①映射是一种特殊的对应,映射中的集合 A、B 可以是数集,也可以是点集或其他集合,这两个集合有先后次序,从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射是截然不同的.

②映射包括集合 A、B 以及从 A 到 B 的对应关系 f,三者缺一不可.

③对于一个从集合 A 到集合 B 的映射来说,A 中的每一个元素必有唯一的象,但 B 中的每一个元素却不一定都有原象,如果有,也不一定只有一个.

2. 一一映射

映射 $f:A\to B$ 为一一映射,需具备以下两个条件:

(1)在映射 f 下,A 中不同的元素在 B 中有不同的象;

(2)B 中每一个元素都有原象.

3. 函数

(1)定义:函数是由一个非空数集到另一个非空数集的映射.由此可知,函数是一个特殊的映射 $f:A\to B$.

(2)函数的三要素:定义域、对应法则和值域.

(3)函数的表示法:列表法、解析式法、图像法.

(4)常用函数:正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数、常值函数 $y=c$(c 为常数).

4. 分段函数和复合函数

若函数在定义域的不同子集上对应关系不同,可用几个式子来表示函数,这种形式的函数叫做分段函数,它是一类重要的函数.

对于用几个分段式子来表示的分段函数,不能误认为是几个函数,它是一个整体,对于分段函数,必须分段处理,最后还要综合写在一个表达式里.

若 y 是 u 的函数,u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$,$u=g(x)$,$x\in(a,b)$,$u\in(m,n)$,那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$,$x\in(a,b)$,叫做 f 和 g 的复合函数.u 叫做中间变量,u 的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

[例] 若函数 $f(x)=2x-1$,$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$

求 $f[g(x)]$ 的解析式.

[解析] ∵ 当 $x\geqslant 0$,$g(x)=x^2$ 时,

$f[g(x)]=2x^2-1$.

当 $x<0$,$g(x)=-1$ 时,$f[g(x)]=-2-1=-3$.

∴ $f[g(x)]=\begin{cases}2x^2-1, & x\geqslant 0,\\ -3, & x<0.\end{cases}$

5. 映射与函数的概念是高中数学的一个基本的重要的概念,经常出现在高考题的小题与大题中.

解说例题

[例 1] 设集合 A 和 B 都是自然数集,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n.则在映射 f 下,象 20 的原象是 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

[解析] 因为 $20=2^n+n$,分别将选项代入检验,知当 $n=4$ 时成立,故选 C.

[点评] *该方程不易解,可将选项代入检验,使问题解决.本题提醒我们,解选择题时一定要注意选择题的特点.*

[例 2] 若函数 $f(x+2)=\begin{cases}\tan x, & (x\geqslant 0),\\ \lg(-x), & (x<0).\end{cases}$

则 $f\left(\frac{\pi}{4}+2\right)\cdot f(-98)=$________.

[解析] ∵ $f\left(\frac{\pi}{4}+2\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.