

塑性力学引论

S

UXING LIXUE YINLUN

李 铀 著



科学出版社

www.sciencep.com

塑性力学引论

李 铀 著

科 学 出 版 社

北 京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

工程材料在受载过程中，常有局部或整体应力超出弹性范围进入塑性状态的情况。研究塑性状态的应力应变分布规律，目的在于准确确定材料的承载能力以充分发挥材料或结构的承载力，及利用塑性变形性质为工程设计服务。塑性力学就是专门研究材料进入塑性状态后应力应变分布规律的一门科学。经典塑性力学理论经过一百多年的发展，虽取得了不少进展，但因材料的非线性应力应变本构关系确定得不尽如人意及求解方法的复杂性，理论发展与应用面临很大困难。本书将在介绍经典理论的基础上，重点介绍作者在塑性力学理论和应用研究方面取得的重大进展——塑性力学理论求解新体系及应用成果。

本书可供力学、土建结构、船舶、航空、金属加工、机械等专业师生及相关科技人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学引论/李铀著. —北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-023412-4

I. 塑… II. 李… III. 塑性力学 IV. O344

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第181242号

责任编辑：王雨舸/责任校对：梅莹
责任印制：彭超/封面设计：苏波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年12月第一版 开本：B5(720×1000)

2008年12月第一次印刷 印张：11 1/2

印数：1—2 000 字数：225 000

定价：39.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

物体受力后会产生变形,受力较大时会产生不可恢复的变形——即塑性变形,研究产生塑性变形时的物体力学响应特性,这包括物体的应力、应变和位移规律,是工程实践迫切需要解决的问题,这也就是塑性力学拟解决的问题。

一般认为,塑性力学理论的研究起源于 1864 年法国科学家特雷斯卡(Tresca)提出的最大剪应力屈服准则,至今它已经历了一百多年的发展历程。在这一百多年的历程中研究人员取得了很多成果,如逐渐形成了本书将介绍的经典塑性力学理论。经典塑性力学理论从形式上看是完善的,但实际上由于理论的方程组求解复杂且方程中包含有难以确定的东西,其解决实际问题的能力深受限制。初学者包括作者本人在最初学习经典塑性力学时,大多感觉它假设多、逻辑性不强、难学,已没有了弹性力学所具有的数学上的完美性。因此另辟蹊径,促进塑性力学的发展已形成共识。

作者自 1984 年开始学习经典塑性力学开始,就致力于塑性力学理论的研究。1986 年在第一次全国塑性力学会议上宣读了第一篇论文《材料弹性变形与塑性变形相互关系的探讨》,引进了本构关系研究的一个全新方向(该文后发表在《岩土力学》杂志 1988 年第 3 期上),1991 年在中国科学院武汉岩土力学研究所学术年会上正式提出了塑性力学问题的一种新的求解方法(论文刊登在《岩土力学》杂志 1992 年第 2/3 期上)。塑性力学问题求解新方法的重要特点是,新方法的基本方程组也能用于求解弹性力学问题,它使弹性力学理论与塑性力学理论的求解基本方程融为了一体,形成了统一的形式。由于新方法融合吸收了弹性力学的成熟理论,其求解过程比经典理论简洁,逻辑性也强,能求解一些经典理论难以求解的问题,使塑性力学理论及其应用取得了重大进展。

本书重点在于介绍作者建立的塑性力学问题求解新方法及应用成果(个别内容为首次发表),为使读者较全面了解塑性力学理论并方便比较新方法和经典理论方法,也介绍了经典塑性力学理论,经典塑性力学理论这一部分系参考后列塑性力学的有关书籍写作而成,在此就不对原书作者一一致谢了。

特别感谢中国科学院武汉岩土力学研究所所级科技计划项目(91 年(计)字第 7 号)、湖南省自然科学基金(04JJ6002)、湖南省科技计划项目(2007FJ3072)和中

南大学科学研究基金(No. 76163)对塑性力学新方法研究的资助。

衷心感谢中南大学研究生教育创新工程教材建设基金和中南大学土木建筑学院教材建设基金对本书出版的资助。

感谢 陈至达 教授、朱维申研究员、白世伟研究员、陈守义研究员在研究工作中给予的鼓励与支持。

感谢彭意高级工程师、叶梅新教授对本书写作的支持。

李 铀

2008年7月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 塑性力学的任务	1
1.2 塑性力学的发展简况	2
1.3 塑性力学的基本假定	4
第 2 章 笛卡儿坐标张量简介	5
2.1 预备知识	5
2.2 张量的定义	7
2.3 张量的代数运算.....	10
2.4 张量识别定理.....	13
2.5 张量的微分运算.....	14
第 3 章 应力分析	16
3.1 基本概念.....	16
3.2 一点的应力状态与应力张量.....	18
3.3 任意斜截面上的应力.....	19
3.4 主应力及应力(张量)不变量.....	20
3.5 最大、最小正应力和最大剪应力	22
3.6 偏应力张量及其不变量.....	24
3.7 平衡方程.....	26
第 4 章 应变分析	28
4.1 位移和应变.....	28
4.2 坐标变换.....	31
4.3 一点的应变状态.....	33
4.4 主应变和应变不变量.....	36
4.5 变形协调方程.....	37
4.6 偏应变及其不变量.....	39
第 5 章 本构关系	41
5.1 概述.....	41
5.2 基本实验结果.....	41
5.3 弹塑性变形的物理基础.....	50
5.4 应力应变本构关系.....	54

5.5	弹性应变与塑性应变之间关系	63
第6章	屈服条件、加载条件与加卸载准则	77
6.1	一维问题的屈服条件、加载条件与加卸载准则	77
6.2	复杂应力状态的屈服条件	78
6.3	几个常用的屈服条件	84
6.4	屈服条件的实验验证	90
6.5	复杂应力状态的加载条件与加卸载准则	94
第7章	塑性力学问题的求解方法	101
7.1	塑性力学问题的求解基本方程组	101
7.2	塑性力学问题求解的经典理论方法	102
7.3	塑性力学问题求解的新方法	108
7.4	弹塑性问题基本定理	121
第8章	简单弹塑性问题的经典方法解答	126
8.1	简单桁架的弹塑性分析	126
8.2	加载路径对简单桁架应力应变状态的影响	130
8.3	几何非线性的影响	134
8.4	矩形截面梁的弹塑性弯曲	135
8.5	理想弹塑性材料厚壁圆柱筒的弹塑性分析	142
第9章	典型弹塑性问题的新方法解答与重要结论	151
9.1	杆系结构弹塑性分析	151
9.2	弹塑性纯弯曲梁的求解	156
9.3	半空间体在水平边界上受均布压力	160
9.4	两类边界条件下弹塑性应力场的重要结论	163
9.5	残余应力问题	166
9.6	断裂力学中的应力强度因子问题	167
9.7	弹塑性问题应力场表达式与弹性模量的关系	170
9.8	塑性力学问题的一种近似解法	172
参考文献		177

第 1 章 绪 论

1.1 塑性力学的任务

众所周知,物体受外力作用后形状会有所变化,即有变形.当所受外力较小时,随着外力的除去,已产生的变形能够完全恢复,但当外力大到一定程度后,再除去外力,产生的变形并不会完全恢复,而会保留一部分“残余变形”,在这个过程中,可恢复的变形称为“弹性变形”,不能恢复的“残余变形”则称为“塑性变形”.当物体在外力作用下产生的变形均是可恢复的弹性变形时,可用弹性力学的理论和方法来研究确定这种状态下物体的应力、应变及位移规律;而当产生了塑性变形时,弹性力学便无力解决了,这时的问题属于塑性力学的研究范畴.塑性力学是固体力学的一个分支,它的主要任务就是研究固体发生塑性变形后的应力应变和位移规律.

固体材料的塑性变形性质既与所研究材料的本身性质有关,又与外界条件如温度、工作过程的持续时间等相关.例如,在常温条件下,钢材和各种高强度合金的塑性变形与时间无关,但在高温条件下,维持载荷不变,它们的塑性变形仍会随着时间的延续而增大,这种与时间相关的变形称之为“蠕变”;当材料受到高速载荷作用时,例如子弹的冲击、烈性炸药的爆炸作用等,材料本身的弹塑性性质将与高速载荷相关,这时,载荷与时间均是产生塑性变形的主导因素.要同时研究所有产生塑性变形相关的因素,会使塑性力学这门课程因涉及的因素太多而非常复杂,因此,通常意义上的塑性力学仅研究与时间无关的塑性状态应力、应变和位移规律,这也就是本书要介绍的内容.而与时间相关的问题另有专门课程如“塑性动力学”、“爆炸力学”、“流变力学”等进行研究.

塑性力学是理论性很强、应用范围很广的一门学科,它既是基础学科又是技术学科.塑性力学的产生与发展与工程实践的需求是密不可分的.工程中存在的实际问题,如构件上开有小孔,在小孔周边附近区域会产生“应力集中”现象,导致局部产生塑性变形;又如杆件、薄壳结构的塑性失稳问题,金属的压力加工问题等,均是因产生塑性变形而超出了弹性力学的范畴,需要用塑性力学理论来解决的问题.另一方面,塑性力学能为更有效地利用材料的强度并节约材料、金属压力加工工艺设计等提供理论依据.正是这些广泛的工程实际需要,促进了塑性力学的发展.

1.2 塑性力学的发展简况

金属材料产生塑性变形后应力应变和位移规律的研究,作为一门独立的学科距今已有一百多年的历史.一般认为它始于1864年特雷斯卡(Tresca)公布关于冲压和挤压的初步实验报告,这一报告提出了最大剪应力屈服准则.1870年,圣维南(Saint-Venant)应用 Tresca 屈服准则计算了理想塑性圆柱体受扭转或弯曲时的弹塑性应力,并建立了二维流动平面应变方程式;同年,莱维(Levy)推广了圣维南的工作,列出了三维情况下的方程式.此后,塑性力学的发展在一段时间里相对较缓慢,直到1909年,哈尔(Haar)和冯卡门(T von Kármán)才从某些变分原理出发建立了塑性理论方程式.

在20世纪初,人们已通过实验研究工作总结提出了多种屈服准则,不过对比研究表明,其中较令人满意的还是米泽斯(Mises)在1913年提出的屈服准则,同时 Mises 还提出了类似于 Levy 的方程. Mises 的屈服准则及应力应变关系发表以后,引起强烈反应.1924年,亨基(Hencky)采用 Mises 屈服准则提出另一理论,用于解决塑性微小变形问题很方便;1926年,洛德(Lode)证实了 Levy-Mises 应力应变关系在一级近似下是准确的;1930年罗伊斯(Reuss)依据普朗特(Prandtl)的观点,考虑弹性应变分量后,将 Prandtl 所得二维方程式推广到了三维;1937年,那达依(Nadai)研究了材料的加工硬化,建立了大变形情况下的应力应变关系;1943年,依留辛(Ильюшин)的“微小弹塑性变形理论”问世,由于计算方便,故很受欢迎;1949年,巴道夫(Batdorf)和布第扬斯基(Budiansky)从晶体滑移的物理概念出发提出了滑移理论.

1950年前后,学者们曾应用塑性势理论,讨论了满足德鲁克(Drucker)假定的屈服条件及与之相联系的一般应力应变关系;1953年,考依特(Koiter)和普拉格(Prager)提出了与 Tresca 屈服条件相关联的流动法则,这给极限分析带来了很大的方便.20世纪50年代,塑性力学的研究在许多国家得到重视,那一时期开展了大量的理论和实验研究工作.20世纪60年代,由 Drucker 和 Prager 针对三维应力状态提出的极值原理,导出了上限及下限定理,使结构承载能力的研究取得了进展.

以上介绍的工作主要是针对金属材料的,岩土材料与金属材料相比有如下更加复杂的强度特性和变形特性:

(1) 岩土材料系由颗粒材料堆积或胶结而成,其强度和变形特性与颗粒材料界面或胶结面的摩擦特性(内聚力、内摩擦角及界面压应力)相关,表现形式为岩土材料抗剪强度和刚度在一定范围内随压应力的增大而增大.这种特点称为岩土材料的压硬性.

(2) 岩土材料的体积应变与剪应力有关,这一特点称为剪胀性(或剪缩性)。

(3) 岩土材料的剪应变与平均应力相关。

(4) 静水压力可引起塑性体积变化。

(5) 岩土材料的弹性模量随塑性变形发展而减小,称为弹塑性耦合。而金属材料弹性模量与塑性变形无关,称为弹性不耦合。

由于岩土材料有上述不同于金属材料的特点,在研究其塑性性质时,相关表述与金属材料有所差异,如岩土材料的剪切屈服与破坏必须考虑平均应力及岩土材料的内摩擦,因而它们必须采用不同于金属材料的屈服准则、破坏准则和本构关系,等等。

文献表明,针对岩土类介质材料塑性性质的研究起源很早。例如,1773年,库仑(Coulomb)提出了土质破坏条件,其后推广为莫尔-库仑准则(Mohr-Coulomb);1857年,兰金(Rankine)研究了半无限体的极限平衡,提出了滑移面概念;1929年,芬伦捏斯(Fellenius)提出了极限平衡法;1943年,太沙基(Terzaghi)等人发展了Fellenius的理论,用来求解土力学中的各种稳定问题;其后陈惠发(W F Chen)等人又在发展土的极限分析方面做过许多工作。不过,上述方法没有考虑材料的应力应变关系,一般只局限于求解岩土类材料的极限承载力,因而有一定的局限性。

随着经典塑性力学、近代土力学、岩石力学及有限元法等数值计算方法的发展,岩土材料塑性性质的研究也随之发展。1957年,Drucker等人首先指出平均应力或体应变会导致岩土材料产生体积屈服,因而需要在Mohr-Coulomb的锥形空间屈服面上再加上一族帽形的屈服面。1958年,英国剑桥大学的罗斯科(Roscoe)及其同事提出了土的临界状态概念,1963年又提出了剑桥黏土的弹塑性本构模型。自20世纪70年代前后至今,岩土材料本构模型的研究十分活跃,一直处于百花齐放、方兴未艾的阶段。

塑性力学的最新研究成果表明,上面介绍的一些早期研究成果有些已不适用,因此本书将不一一涉及。

1986年,李铀提出了材料弹性应变和塑性应变之间相互关系的研究方向,这是材料本构方程研究的一个新方向。以此新型本构方程的研究为出发点,通过塑性力学问题求解基本方程组的分解,1991年李铀建立了塑性力学问题的求解新方法。所建立塑性力学问题求解新方法的一个重要特点是,新方法的基本方程组也能用于求解弹性力学问题,它使弹性力学理论与塑性力学理论的求解基本方程融为一体,形成了统一的形式。新方法的求解过程比较简捷,能求解一些经典理论方法难以求解的问题,使塑性力学理论及其应用取得了重大进展。例如,在弹塑性应力场研究中取得了如下重要成果:当边界条件全为应力边界条件,或有位移边界条件但在塑性区边界上仅有零位移边界条件时,塑性力学问题的应力场表达式完全等同于将所讨论问题当成弹性问题求解所获得的应力场表达式等,这些将是本书

重点介绍的内容。

1.3 塑性力学的基本假定

塑性力学和弹性力学都是固体连续介质力学的基本组成部分,因而它们有不少共同的地方,如均将所研究的对象看成是均匀连续介质,都只考虑小变形问题等.因此,弹性力学中的大部分基本概念和与材料性质无关的基本方程如平衡方程、几何方程、边界条件等,在塑性力学中仍然适用.塑性力学与弹性力学的主要区别在于本构关系的不同,弹性力学中的本构关系(应力应变关系)遵循广义胡克定律,而塑性力学中的本构关系是一种非线性、非单值的关系,并且这种关系对于不同的材料、不同的加载过程表现都不一样.

由于塑性问题的规律很复杂,全部考虑所有影响因素存在很大困难,因此有必要根据材料的主要性质作出一些假设,忽略一些次要因素.经典塑性力学理论采用了以下假设:

- (1) 材料是均质连续的,只产生小变形,而且是初始各向同性的.
- (2) 塑性变形部分的体积变化为零,即体积变化是弹性的.因体积变化本身是微小的,有时也采用不可压缩的假设.
- (3) 静水压力不影响屈服应力,也不引起塑性变形,只引起体积的弹性改变.在静水压力不太大的情况下,这个假设对金属和饱和土质是适用的,但对岩石一类材料是不符合实际的.
- (4) 时间因素对塑性变形规律无影响,即不考虑蠕变、松弛效应及变形速度(应变速率)对塑性变形规律的影响.
- (5) 材料的拉、压屈服应力相等.一般不考虑包辛格(Bauschinger)效应(第5章详细介绍).
- (6) 只考虑稳定材料,即只考虑后面将提到的满足 Drucker 公设的材料(第5章详细介绍).

本书将重点介绍的塑性力学求解新方法仍在发展中,目前看可只采用上述假设中的(1)和(4).

第 2 章 笛卡儿坐标张量简介

2.1 预备知识

由坐标原点和三条不共面的标架直线构成的坐标系称为直线坐标系,如果三条标架直线上的单位尺度相同,称为笛卡儿坐标系,否则称为仿射坐标系.

笛卡儿坐标系又分为笛卡儿直角坐标系和斜角坐标系:三标架直线互相垂直时为笛卡儿直角坐标系,否则为笛卡儿斜角坐标系.以下的讨论只针对笛卡儿直角坐标系.

通常习惯用 x, y, z 三个坐标值来定义笛卡儿直角坐标系中的一点,以后将用 x_1, x_2, x_3 来分别代表 x, y, z ,并简记为 $x_i (i=1, 2, 3)$. 类似地用 $i_j (j=1, 2, 3)$ 表示三个坐标的单位矢量 i_1, i_2, i_3 . 下标 $j (j=1, 2, 3)$ 称为自由指标,它可用其他字母替代. 无限定时,下标的取值均是 1, 2 或 3.

2.1.1 求和约定

在同一项中,如果某个下标重复出现两次,就表示要对这个指标从 1 到 3 求和. 例如,算式中有一项 $A_i B_i$, 下标 i 出现了两次,则应理解为

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (= \sum_{i=1}^3 A_i B_i)$$

又如 $C_{mn} D_n$, 意义为

$$C_{mn} D_n = C_{m1} D_1 + C_{m2} D_2 + C_{m3} D_3 \quad m=1, 2, 3$$

式中, m 为自由指标,将其完全展开,则等同于

$$\left. \begin{aligned} C_{1n} D_n &= C_{11} D_1 + C_{12} D_2 + C_{13} D_3 \\ C_{2n} D_n &= C_{21} D_1 + C_{22} D_2 + C_{23} D_3 \\ C_{3n} D_n &= C_{31} D_1 + C_{32} D_2 + C_{33} D_3 \end{aligned} \right\}$$

以后我们称重复出现的下标 i 为约定求和指标,约定求和指标在展开式中不再出现,因此也称为“哑指标”,哑指标的字母可以更换成其他字母而不影响结果.

2.1.2 克罗内克(Kronecker)符号

δ_{ij} 称为克罗内克(Kronecker)符号,其定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ 1, & \text{当 } i = j \end{cases}$$

由定义可知 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

采用 Kronecker 符号和约定求和方法, 可使复杂公式的书写和运算简捷化. 例如, 单位矩阵可表示为

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

又在笛卡儿直角坐标系中, 两单位矢量的点乘 $\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j$ 可表示为

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij}$$

2.1.3 偏导数的下标记法

以后我们将记 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 为 $f_{,i}$, 记 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 为 $f_{,ij}$, 下标中的逗号即为导数记号.

例如, $B_{ij,k}$ 意为 $\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}$; 又 $A_{i,i}$ 应理解为

$$A_{i,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

2.1.4 置换符号 ϵ_{ijk}

置换符号 ϵ_{ijk} 又称 Permutation 符号, 其定义如下:

$\epsilon_{ijk} = 1$, 当 i, j, k 为 1, 2, 3 的循环序列;

$\epsilon_{ijk} = -1$, 当 i, j, k 为 1, 2, 3 的逆循环序列;

$\epsilon_{ijk} = 0$, 当 i, j, k 中有两个赋值相同时.

1, 2, 3 的循环序列与逆循环序列可参见图 2-1, 三个数字按图 2-1(a) 所示顺时针转时, 有 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2. 这种序列即称为循环序列, 也称偶排列. 三个数字按图 2-1(b) 所示逆时针转时, 则为逆循环序列, 也称奇排列, 这时有 1, 3, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3.

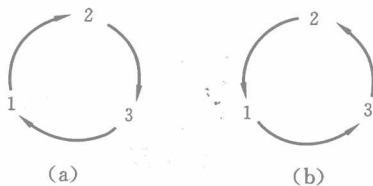


图 2-1

利用置换符号可简化复杂表达式的书写, 如可用置换符号表示三阶行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \\ = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{2j} a_{3k} \quad (i, j, k=1, 2, 3)$$

2.2 张量的定义

张量是由一组元素组成的一个整体,它在坐标变换时满足一定的关系.为便于理解张量的定义,我们先介绍坐标轴旋转时空间一点的坐标变换关系.

2.2.1 坐标变换

参见图 2-2,图中两个坐标系原点相同,设原坐标系为 $Ox_1x_2x_3$,新坐标系为 $Ox'_1x'_2x'_3$,新旧坐标轴的夹角余弦如表 2-1 所示.

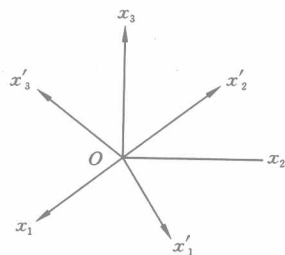


图 2-2

表 2-1 新旧坐标轴的夹角余弦

	x_1	x_2	x_3
x'_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}
x'_2	β_{21}	β_{22}	β_{23}
x'_3	β_{31}	β_{32}	β_{33}

研究一矢量 \mathbf{P} ,其始端在原点,终端在旧系中的坐标为 $x_i (i=1, 2, 3)$;在新系中的坐标为 $x'_i (i=1, 2, 3)$. 我们知道 x'_i 可用 x_i 表示为

$$x'_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3$$

$$x'_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3$$

$$x'_3 = \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3$$

进而可表示为

$$x'_i = \beta_{ij} x_j \quad (2-1)$$

反过来, x_i 也可用 x'_i 表示为

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} x'_1 + \beta_{21} x'_2 + \beta_{31} x'_3 \\ x_2 &= \beta_{12} x'_1 + \beta_{22} x'_2 + \beta_{32} x'_3 \\ x_3 &= \beta_{13} x'_1 + \beta_{23} x'_2 + \beta_{33} x'_3 \end{aligned}$$

即

$$x_i = \beta_{ji} x'_j \quad (2-2)$$

由式(2-1)和式(2-2), 可以导出一个很有用的关系式. 将式(2-2)改写为

$$x_j = \beta_{kj} x'_k$$

代入式(2-1), 有

$$x'_i = \beta_{ij} x_j = \beta_{ij} \beta_{kj} x'_k \quad (2-3)$$

展开式(2-3), 有

$$\begin{aligned} x'_i &= \beta_{i1} \beta_{k1} x'_k + \beta_{i2} \beta_{k2} x'_k + \beta_{i3} \beta_{k3} x'_k \\ &= \beta_{i1} (\beta_{11} x'_1 + \beta_{21} x'_2 + \beta_{31} x'_3) + \beta_{i2} (\beta_{12} x'_1 + \beta_{22} x'_2 + \beta_{32} x'_3) \\ &\quad + \beta_{i3} (\beta_{13} x'_1 + \beta_{23} x'_2 + \beta_{33} x'_3) \\ &= (\beta_{i1} \beta_{11} + \beta_{i2} \beta_{12} + \beta_{i3} \beta_{13}) x'_1 + (\beta_{i1} \beta_{21} + \beta_{i2} \beta_{22} + \beta_{i3} \beta_{23}) x'_2 \\ &\quad + (\beta_{i1} \beta_{31} + \beta_{i2} \beta_{32} + \beta_{i3} \beta_{33}) x'_3 \end{aligned} \quad (2-4)$$

显然, 当 $i=1$ 时, 等式右侧第一项系数应等于 1, 其余项系数应为 0, 即应有

$$\beta_{11} \beta_{11} + \beta_{12} \beta_{12} + \beta_{13} \beta_{13} = \beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 = 1$$

$$\beta_{11} \beta_{21} + \beta_{12} \beta_{22} + \beta_{13} \beta_{23} = 0$$

$$\beta_{11} \beta_{31} + \beta_{12} \beta_{32} + \beta_{13} \beta_{33} = 0$$

当 $i=2$ 和 3 时, 有类似的结果. 综合起来, 即

$$\text{当 } i=k \text{ 时, } \beta_{ij} \beta_{kj} = 1$$

$$\text{当 } i \neq k \text{ 时, } \beta_{ij} \beta_{kj} = 0$$

所以

$$\beta_{ij} \beta_{kj} = \delta_{ik} \quad (2-5)$$

类似地, 还有

$$x_i = \beta_{ji} \beta_{jk} x_k \quad (2-6)$$

由式(2-6), 有

$$\beta_{ji} \beta_{jk} = \delta_{ik} \quad (2-7)$$

2.2.2 张量的定义

张量元素的个数由空间的维数 N 及张量的阶数 n 决定, 即等于 N^n 个. 在笛卡儿坐标系中, $N=3$. 下面给出 $N=3$ 时各阶张量的定义.

1. 零阶张量

零阶张量有 $N^0 = 3^0 = 1$ 个元素,它是坐标变换的不变量,即

$$f'(x'_1, x'_2, x'_3) = f(x_1, x_2, x_3) \quad (2-8)$$

这实际上是我们熟知的标量,是与坐标系无关的量.

2. 一阶张量

一阶张量元素个数为 $N^1 = 3^1 = 3$, 设为 $T_i (i=1, 2, 3)$. 当坐标轴旋转时, 它的变换规律满足式(2-1)或式(2-2), 即有

$$T'_i = \beta_{ij} T_j \quad (i=1, 2, 3) \quad (2-9)$$

或

$$T_i = \beta_{ji} T'_j \quad (i=1, 2, 3) \quad (2-10)$$

由定义可知一阶张量即我们熟知的矢量.

3. 二阶张量

二阶张量元素个数为 $N^2 = 3^2 = 9$, 用 $T_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 表示. 它们随坐标的变化规律为

$$T'_{ij} = \beta_{im} \beta_{jn} T_{mn} \quad (i, j, m, n=1, 2, 3) \quad (2-11)$$

或

$$T_{ij} = \beta_{mi} \beta_{nj} T'_{mn} \quad (i, j, m, n=1, 2, 3) \quad (2-12)$$

也可以这样来理解二阶张量变换系数的形成: 有两个一阶张量 A_i 和 B_j 相乘, 用 A_i 每一个分量与 B_j 每一个分量相乘, 共得到 9 个元素. 用 T_{ij} 表示张量 A_i 和 B_j 相乘的结果, 有

$$T_{ij} = A_i B_j \quad (2-13)$$

写成矩阵形式便为

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix}$$

当坐标变换时,

$$A'_i = \beta_{im} A_m \quad B'_j = \beta_{jn} A_n$$

所以

$$T'_{ij} = A'_i B'_j = \beta_{im} A_m \beta_{jn} B_n = \beta_{im} \beta_{jn} A_m B_n = \beta_{im} \beta_{jn} T_{mn}$$

两个一阶张量作上述张量乘积的运算也称为并矢.

4. n 阶张量

n 阶张量有 $N^n = 3^n$ 个分量, 可用 $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 表示, 它随坐标的变换规律为

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \beta_{i_1 j_1} \beta_{i_2 j_2} \dots \beta_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (2-14)$$

或

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} = \beta_{j_1 i_1} \beta_{j_2 i_2} \dots \beta_{j_n i_n} T'_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (2-15)$$

式(2-14)和式(2-15)中变换系数的来源也可按张量乘积的定义来理解, 张量乘积的一般定义在下一节介绍.

为简单计, 后面 $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $T'_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 有时会记为 T_{i_n} , T'_{i_n} .

2.3 张量的代数运算

下面介绍的内容适用于各阶张量. 因此, 现以黑体字笼统地表示张量, 而不涉及其具体阶次, 同时介绍时略去证明过程.

2.3.1 张量的恒等

如果两个同阶张量的每个对应分量都相等, 则称这两个张量相等.

根据张量的定义可知, 在某一坐标系下, 若两个张量相等, 则变换到任一坐标系下这两个张量也必相等, 即若有 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, 则必有 $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$.

2.3.2 张量的加减

只有同阶张量才可以相加减, 加减结果仍是同阶张量. 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是 n 阶张量, 令其加减结果为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$$

则 \mathbf{C} 也是 n 阶张量.

由张量的恒等与加减规则可得如下结论:

若在某一笛卡儿直角坐标系中建立了张量方程

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 0$$

则当坐标轴旋转时, 总有

$$\mathbf{A}' - \mathbf{B}' = 0$$

这表明张量方程在坐标变换时其形式不变. 进一步的研究表明, 上述结论对任意坐标系都是正确的. 张量这一数学工具的重要性正在于此, 它体现了这样的事实: 任何物理规律都是客观存在的, 与坐标系的选择无关. 而分量方程却不具有这一性质, 在不同坐标系(如笛卡儿直角坐标系、柱坐标系、球坐标系等)中建立的分量