安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

线性代数

Linear Algebra

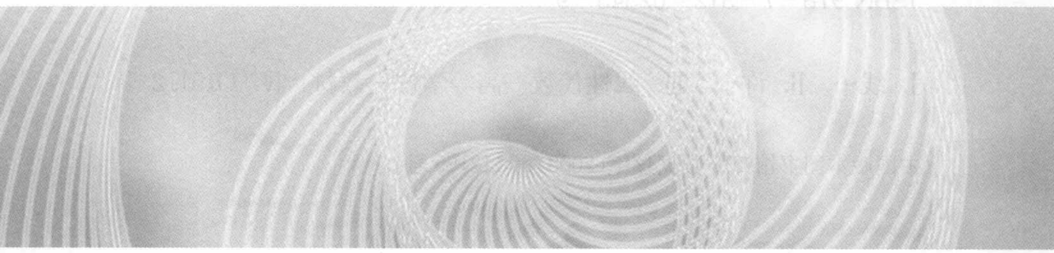
许 峰／主编

中国科学技术大学出版社

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

线性代数

主编/许　峰　副主编/殷志祥　李　勇



中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/许峰主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2008. 8
(安徽省高等学校“十一五”省级规划教材)
ISBN 978-7-312-02343-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. 许… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 112165 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press. ustc. edu. cn
印刷 中国科学技术大学印刷厂
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 880 mm×1230 mm 1/32
印张 9. 25
字数 289 千
版次 2008 年 8 月第 1 版
印次 2008 年 8 月第 1 次印刷
定价 19. 00 元

前　言

随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，许多实际问题得以通过离散化的数值计算而得到定量的解决. 而线性代数正是实际问题离散化的数学基础. 不仅如此，线性代数在训练学生的逻辑思维和推理能力、分析和解决实际问题的能力方面也起着重要的作用. 因此，线性代数已成为理工、经济、工商管理等各专业大学生必修的重要数学基础课之一.

由于历史原因，我国线性代数的教学内容与课程体系受前苏联的影响很深. 我国 20 世纪五六十年代的线性代数教材往往是高等代数教材的缩写本，理论性很强，难度较大，不太适合普通高校工科专业使用.

20 世纪 80 年代初，同济大学编写了供普通高校工科专业使用的《线性代数》. 该教材较好地把握了工科线性代数课程教学的基本要求，内容选择适当，难度适中，论述通俗易懂，例题与习题较为典型，一经出版，即被大部分普通工科院校广泛采用，历经二十余年，畅销不衰，成为工科线性代数最经典的教材.

近几年来，随着高等学校招生规模的不断扩大，高校的培养模式、教学方法、教学手段等逐渐呈现出多元化. 高校教材也悄然发生着变化，由几花争艳逐步演变为百花齐放. 每门课程不再是只有几种教材供选择，有些基础课程的教材已有数十种之多，而且还不断有新教材问世. 诚然，近年来大量涌现

出来的新教材中不乏精品，但其中也有一些属低水平的重复建设，质量不尽如人意.

作者长期从事线性代数课程的教学，积累了一定的教学经验和教学资料，对线性代数教材也有不少自己的看法，但一直从未有过自己编写教材的奢望. 2007 年 10 月，适逢申报安徽省高等学校“十一五”省级规划教材，在院领导和中国科学技术大学出版社编辑老师的动员和鼓励下，作者打消了各种疑虑，毅然决定编写一本线性代数教材.

为了使得这本教材有一点点自己的特色，避免低水平的重复建设，作者在以下几个方面做了一些工作：

1. 一位哲人曾经说过：“科学只能给我们知识，而历史却能给我们智慧.”在教材每一章的引言中，作者对本章要讨论的主要概念和问题的背景、起源、研究历程以及一些数学家对此所做的贡献做了一点简要介绍，并且在附录中介绍了代数学的发展历史. 这样做不仅能使学生了解一点数学发展历史，接受一点数学文化的熏陶，而且能使学生知晓一点所学内容的来龙去脉和应用领域，提高一点学习兴趣.

作者这样做，是想在提高大学生数学文化素养方面做一点尝试，希望得到读者的认可.

2. 在内容编排方面，与别的教材相比，本教材做了较大变化. 首先，将矩阵的初等变换和矩阵的秩两个内容并入第 2 章“矩阵”，而将关于线性方程组的内容全部合并为第 3 章“线性方程组”. 这样做的目的是使这两章的内容比较完整，利于教学. 其次，对有些内容做了合并、调整. 比如，将全排列、逆序数和对换内容合并入“行列式的定义”一节，将向量组的线性组合内容合并入“向量组的线性相关性”一节，将向量的内积

内容合并入“正交矩阵与正交变换”一节.

不过,内容的编排历来是容易引发争议的问题,“仁者见仁,智者见智”,每本教材都有自己的想法和道理,没有绝对的合理与不合理.

3. 作者在编写本教材时的一个指导思想是:力争使教材通俗易懂,易于自学.具体做法包括:(1)对于一些重要概念,如行列式、矩阵及其运算、矩阵及向量组的秩、特征值与特征向量、正交变换等,都是通过浅显易懂的具体例子引入,以使学生更好地理解这些重要概念,同时也使学生明白:数学概念不是数学家凭空想象出来的,而是来源于实际.(2)在提出本章节的主要问题和给出某些定理时,作者特别注意解说性文字的编写,使学生很容易明白为什么要讨论这个问题,这个问题与其他问题有什么联系,等等.

4. 教材不是教学辅导书,许多内容和方法的总结应该由教师和学生去完成.但考虑到学生的实际情况,从利于教师教和学生学的角度出发,教材对一些重要的内容和方法做了适当的总结和条理化.

这种做法无疑不太利于学生学习能力的培养,是否合适,值得商榷.

5. 例题和习题的选择是教材编写中的重要工作.作者在编写教材时,特别注意例题的代表性和典型性.另外,考虑到教学的方便,采取了按节配置习题的方式.所选习题题型较为丰富,覆盖面大.

由于线性代数学时较少,所以总体感觉教材的习题量偏大.请教师和学生在使用时注意选择.

需要指出的是,与其他所有教材编写者一样,作者在编写

本教材时，参考、借鉴了多种优秀线性代数教材，这些教材在诸如内容编排、定理的论述等方面给了作者许多有益的启示．在此，向这些教材的作者表示感谢和敬意．

这本教材从开始编写到完成只有几个月时间，而且是在繁重的工作之余编写的，因此，教材中存在这样那样的问题甚至错误是在所难免的．一本优秀的教材是要经过反复锤炼的，是要经得起时间检验的．作者期待着广大读者特别是各位同行的批评意见和建议．

最后，特别要感谢作者的夫人和中国科学技术大学出版社，没有他们的支持和关心，本教材不可能按时完成．

许　峰

2008年5月

目　　录

第1章 行 列 式

引 言

行列式的概念最早是在17世纪由日本数学家关孝和(Seki Takakazu,约1642～1708)提出来的.他在1683年写了一部名为《解伏题之法》的著作,意思是“解行列式问题的方法”,书中对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述.欧洲第一个提出行列式概念的是德国数学家、微积分学奠基人之一莱布尼兹(G. W. Leibnitz,1646～1716).1693年4月,莱布尼兹在写给法国数学家洛比达(L'Hospital,1661～1704)的一封信中使用了行列式,并给出了方程组的系数行列式为零的条件.

1750年,瑞士数学家克莱姆(G. Cramer,1704～1752)在其著作《线性代数分析导引》中,对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述,并给出了我们现在熟知的解线性方程组的克莱姆法则.1764年,法国数学家贝祖(E. Bezout,1730～1783)将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化,利用系数行列式概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解.

在很长一段时间内,行列式只是作为解线性方程组的一种工具,没有人意识到它可以独立于线性方程组之外,单独形成一门理论.

在行列式的发展史上,第一个把行列式理论与线性方程组求解相分离的人是法国数学家范德蒙(A. T. Vandermonde,1735～1796).范德蒙自幼在父亲的指导下学习音乐,但对数学有浓厚的兴趣,后来终于成为法兰西科学院院士.他给出了用余子式来展开三阶行列式的法则,并研究了被后人以他的名字命名的“范德蒙行列式”.范德蒙是行列式理论的奠基人.

法国数学家拉普拉斯(P. S. Laplace,1749～1827)在1772年发

表的论文《对积分和世界体系的探讨》中，推广了范德蒙的行列式展开法则，这个方法现在称为拉普拉斯展开法则.

在行列式理论方面做出突出贡献的还有法国大数学家柯西(A. L. Cauchy，1789～1857).1815年，柯西在一篇论文中给出了行列式的系统理论.他给出了行列式的乘法定理；在行列式的记号中，他首次采用了双重足标的新记法；引进了行列式特征方程的术语；改进了拉普拉斯的行列式展开定理，并给出了一个证明.

继柯西之后，在行列式理论方面最多产的人是德国数学家雅可比(J. Jacobi，1804～1851).他引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用，给出了函数行列式的导数公式.雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的形成.

行列式在许多数学分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具.在本门课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量组线性相关性的一种重要工具.

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.此外，还要介绍解线性方程组的克莱姆法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的.下面我们通过解二元线性方程组引出二阶行列式的概念.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法易得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

(1.2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中

分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的四个系数确定的.将这四个系数按它们在方程组(1.1)中的位置,排成二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的**二阶行列式**,并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

数 $a_{ij}\,(i,\ j=1,\ 2)$ 称为行列式(1.4)的**元素**.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为**列标**,表明该元素位于第 j 列.

由上述定义可知,二阶行列式是由四个数按一定的法则运算所得的代数和,这个法则称为**对角线法则**.如图 1.1 所示,从 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**,从 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**.按照对角线法则,二阶行列式等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

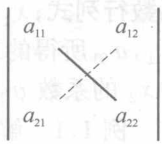


图 1.1

利用二阶行列式的概念,(1.2)式中的分子也可以写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，则方程组(1.1)的解可记为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

这里的分母 D 是方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，称为**系数行列式**；x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}所得的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14,$$

从而

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

1.1.2 三阶行列式

与二阶行列式类似，同样可得三阶行列式的概念.

定义 1.1 设有九个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.6}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.7}$$

称(1.7)为数表(1.6)所确定的**三阶行列式**.

由上述定义可见,三阶行列式有六项,每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其运算规律遵循图 1.2 所示的**对角线法则**:图中的三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

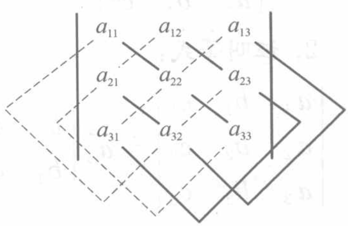


图 1.2

例 1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 $D = 1\times0\times6 + 2\times5\times(-1) + 3\times4\times0 - 1\times5\times0$

$\quad - 2\times4\times6 - 3\times0\times(-1)$

$= -10 - 48$

$= -58.$

例 1.3 求解方程

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$