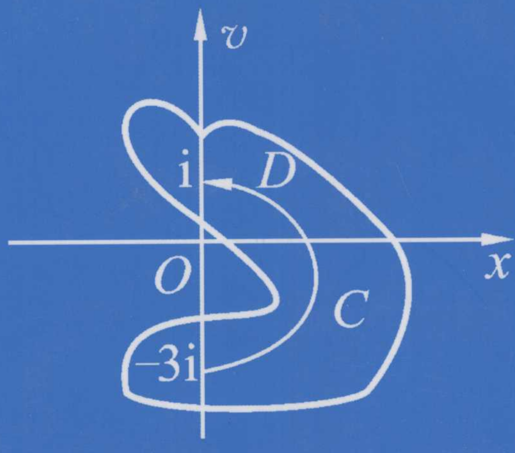
新编高等院校公共基础课系列规划教材

Fubian Hanshu Yu Jifen Bianhuan

复变函数与积分变换

林　益　刘国钧　叶提芳　张红玉　主编



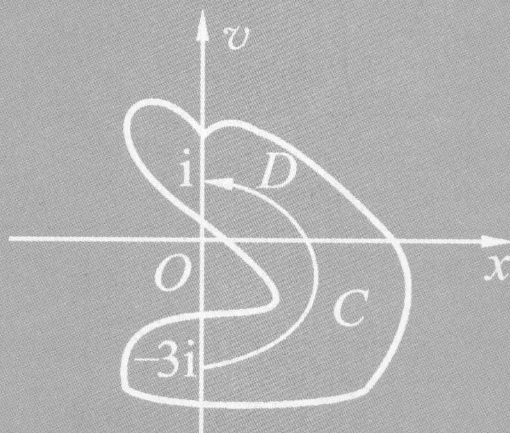
华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

新编高等院校公共基础课系列规划教材

Fubian Hanshu Yu Jifen Bianhuan

复变函数与积分变换

主编　林　益　刘国钧　叶提芳　张红玉
编者　李开丁　胡晓山　朱祥和



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/林　益　刘国钧　叶提芳　张红玉　主编.—武汉:华中科技大学出版社，2008年9月
ISBN978-7-5609-4561-3

Ⅰ.复…　Ⅱ.①林…　②刘…　③叶…　④张…　Ⅲ.复变函数-高等学校-教材
Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第074184号

复变函数与积分变换　　　林　益　刘国钧　叶提芳　张红玉　主编

策划编辑:谢　荣
责任编辑:王汉江　　　　封面设计:杨　玲
责任校对:刘　竣　　　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　排:武汉星明图文制作有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm　1/16　　印张:10.5　　字数:215 000
版次:2008年9月第1版　　印次:2008年9月第1次印刷　　定价:17.80元
ISBN 978-7-5609-4561-3/O·445

前　　言

本书是为独立学院学生而编写的理工类基础课“复变函数与积分变换”的教材。

“复变函数与积分变换”是高等学校的一门重要的数学基础课，是自然科学与工程技术中常用的数学工具，是微分方程、奇异积分方程、计算数学和概率论等数学分支的主要解析方法，也是空气动力学、流体力学、弹性力学、电磁学和热力学等学科的重要的几何定性研究方法.

本书内容以“必需、够用”为度，不追求理论上的完整性和系统性，而是增强其应用性。本书主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数定理、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等。

本书的作者都是具有丰富的教学经验的一线教师，针对目前独立学院学生的实际情况与课程的教学要求，精心编写了本教材，其特色如下：

(1) 语言通俗易懂，公式方便易记；

(2) 例题典范，注重方法，解答详尽；

(3) 知识点清晰明了，方便自学。

本书由林益、刘国钧、叶提芳、张红玉主编，李开丁、胡晓山、朱祥和编。由于作者水平有限，时间紧迫，不可避免会有差错或不尽人意之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2008 年 7 月

目　　录

第1章　复数和复变函数 …… (1)
1.1　复数 …… (1)
1.1.1　复数的概念 …… (1)
1.1.2　共轭复数及复数的四则运算 …… (1)
1.2　复平面及复数的三角表达式 …… (4)
1.2.1　复平面 …… (4)
1.2.2　复数的模与辐角及三角表达式 …… (4)
1.2.3　复数模的三角不等式 …… (7)
1.2.4　利用复数的三角表达式作乘除法 …… (8)
1.2.5　复数的乘方和开方 …… (10)
1.3　平面点集 …… (12)
1.4　复变函数 …… (14)
1.4.1　复变函数的概念 …… (14)
1.4.2　复变函数的极限和连续性 …… (15)
习题1 …… (17)
第2章　解析函数 …… (20)
2.1　解析函数的概念 …… (20)
2.1.1　复变函数的导数 …… (20)
2.1.2　解析函数的概念与求导规则 …… (21)
2.1.3　函数解析的充要条件 …… (22)
2.2　解析函数与调和函数的关系 …… (27)
2.3　初等函数 …… (30)
2.3.1　指数函数 …… (30)
2.3.2　对数函数 …… (32)
2.3.3　幂函数 …… (34)
2.3.4　三角函数 …… (35)
习题2 …… (36)
第3章　复变函数的积分 …… (39)
3.1　复变函数的积分 …… (39)
3.1.1　复变函数积分的定义 …… (39)

3.1.2 复变函数积分的基本性质…………(40)
3.1.3 复变函数积分的计算方法…………(41)
3.2 柯西积分定理…………(44)
3.3 柯西积分公式…………(49)
习题 3 …………(53)
第 4 章 级数 …………(56)
4.1 复级数的基本概念…………(56)
4.1.1 复数项级数…………(56)
4.1.2 复变函数项级数…………(58)
4.2 幂级数…………(59)
4.3 泰勒(Taylor)级数…………(61)
4.4 罗朗(Laurent)级数…………(65)
习题 4 …………(70)
第 5 章 留数定理 …………(72)
5.1 零点与孤立奇点…………(72)
5.2 留数定理…………(77)
5.3 留数理论在实积分中的应用…………(83)
5.3.1 $[0,2\pi]$上三角函数的积分…………(83)
5.3.2 $(-\infty,+\infty)$上某些函数的广义积分…………(85)
5.3.3 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx$,其中$a>0$…………(90)
习题 5 …………(91)
第 6 章 保形映射 …………(93)
6.1 保形映射的概念…………(93)
6.1.1 导数的几何意义…………(93)
6.1.2 保形映射的概念…………(95)
6.1.3 解析函数的保域性与边界对应原理…………(96)
6.2 分式线性变换…………(97)
6.2.1 分式线性变换的分解…………(97)
6.2.2 分式线性变换的保形性…………(98)
6.2.3 分式线性变换的保对称点性…………(100)
6.3 分式线性变换的应用举例…………(102)
6.4 几个初等函数的映射…………(107)
6.4.1 指数函数 $\omega=e^z$ …………(107)
6.4.2 幂函数 $\omega=z^n(n>1)$ …………(109)
习题 6…………(110)

第 7 章 傅里叶变换 ······ (112)
7.1 傅里叶变换的概念与性质 ······ (112)
7.1.1 傅里叶积分定理 ······ (112)
7.1.2 傅里叶变换 ······ (115)
7.1.3 单位脉冲函数及傅里叶变换 ······ (117)
7.2 傅里叶变换的性质 ······ (120)
7.2.1 线性性质 ······ (120)
7.2.2 位移性质 ······ (120)
7.2.3 微分性质 ······ (122)
7.2.4 积分性质 ······ (122)
7.2.5 乘积定理 ······ (122)
7.2.6 能量积分 ······ (123)
7.2.7 卷积定理 ······ (123)
7.3 傅里叶变换的应用 ······ (125)
习题 7 ······ (127)
第 8 章 拉普拉斯变换 ······ (129)
8.1 拉普拉斯变换的概念 ······ (129)
8.1.1 傅里叶变换的局限性 ······ (129)
8.1.2 拉普拉斯变换的定义与存在性定理 ······ (129)
8.1.3 拉普拉斯逆变换公式 ······ (132)
8.2 拉普拉斯变换的性质 ······ (133)
8.2.1 线性性质 ······ (133)
8.2.2 微分性质 ······ (133)
8.2.3 积分性质 ······ (134)
8.2.4 位移性质 ······ (135)
8.2.5 延迟性质 ······ (136)
8.3 卷积及其性质 ······ (136)
8.3.1 卷积的概念 ······ (136)
8.3.2 卷积定理 ······ (137)
8.4 拉普拉斯变换的应用 ······ (138)
习题 8 ······ (140)
附录 A 傅里叶变换简表 ······ (142)
附录 B 拉普拉斯变换简表 ······ (148)
部分习题答案 ······ (152)
参考文献 ······ (158)

第 1 章　复数和复变函数

复变函数论中所研究的函数的自变量与因变量均为复数，因此，对复数及复变函数应有清晰的认识. 本章将介绍复数的概念、四则运算及三角表示法，平面点集，复变函数的概念、极限和连续性.

1.1　复　　数

1.1.1　复数的概念

由于二次方程 $x^2+x+1=0$ 在实数范围内没有解，为了使这个方程有解，就把数的范围扩大，引进虚数单位 i，且

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

从而方程 $x^2+x+1=0$ 就有了两个不同的解，即

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

我们把形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**，其中 x 和 y 均为实数，x 称为复数 z 的**实部**，记为 $x=\mathrm{Re}z$，y 称为复数 z 的**虚部**，记为 $y=\mathrm{Im}z$. 例如，$z=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$，$\mathrm{Re}z=1$，$\mathrm{Im}z=\sqrt{2}$.

特别地，当 $\mathrm{Im}z=y=0$ 时，$z=\mathrm{Re}z+\mathrm{i}0=x$ 是实数；当 $\mathrm{Re}z=0$ 且 $\mathrm{Im}z\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}\mathrm{Im}z=\mathrm{i}y$，称为**纯虚数**.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，如果 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称两个复数 z_1 与 z_2 **相等**，记为 $z_1=z_2$；即 $z_1=z_2$ 的充要条件是 z_1 与 z_2 的实部和虚部分别相等.

1.1.2　共轭复数及复数的四则运算

设 $z=x+\mathrm{i}y$，则称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 z 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，显然实数的共轭复数仍然为该实数.

设有两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，它们的**四则运算**定义如下.

加法和减法　$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$；

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2).$$

乘法　$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$，

即按多项式的乘法法则进行，注意 $\mathrm{i}^2=-1$.

例如 $(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=3\times 2+3(-\mathrm{i})+2\mathrm{i}+\mathrm{i}(-\mathrm{i})$

$$=6-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2$$

$$=7-\mathrm{i}.$$

特别地，当 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $z\bar{z}=x^2+y^2$.

称非负实数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模，记为 $|z|$，于是可以写成下列恒等式：

$$z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2.$$

除法 z_1 除以 $z_2(z_2\neq 0)$ 定义为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\,\bar{z}_2}{z_2\,\bar{z}_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{|z_2|^2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

事实上，除法运算是乘法运算的逆运算，即有

$$z_2\cdot\frac{z_1}{z_2}=z_1.$$

例如 $\dfrac{3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-5\mathrm{i}}{2}.$

从上面的运算规则可知，复数运算满足下列规律，设 z_1,z_2,z_3 是复数，则

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1z_2=z_2z_1$（**交换律**）；

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$（**结合律**）；

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$（**分配律**）.

对于共轭复数，有下列**运算性质**：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$；

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

(4) $\bar{\bar{z}}=z$；

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}z$；

(6) $z\bar{z}=|z|^2=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2$；

(7) 复数 z 是实数的充要条件是 $z=\bar{z}$，z 是纯虚数的充要条件是 $z=-\bar{z}$ 且 $z\neq 0$.

这些性质都不难证明，留给读者做练习.

例 1 求下列复数 z 的实部、虚部、共轭复数及模.

(1) $z=\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}$；

(2) $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(3) $z=\mathrm{i}^{12}-4\mathrm{i}^{21}+2\mathrm{i}$；

(4) $z=\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}-3)}$；

解 (1) $z=\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$,

因此，

$$\mathrm{Re}z=\frac{1}{5},\ \mathrm{Im}z=-\frac{2}{5},\ \bar{z}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i},\ |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(2)$z=\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-i-\frac{3i(1+i)}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$,

因此,$\text{Re}z=\frac{3}{2}$,$\text{Im}z=-\frac{5}{2}$, $\bar{z}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$, $|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}^2\right)}=\frac{\sqrt{34}}{2}$.

(3)$z=i^{12}-4i^{21}+2i=(i^2)^6-4(i^2)^{10}i+2i$

$=(-1)^6-4(-1)^{10}i+2i=1-2i$,

因此,$\text{Re}z=1$,$\text{Im}z=-2$, $\bar{z}=1+2i$, $|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

(4) 由于$(i-1)(i-2)(i-3)=[(i-1)(i-2)](i-3)$

$$\begin{aligned}&=[i^2-2i-i+2](i-3)\\&=(1-3i)(i-3)\\&=i-3-3i^2+9i\\&=10i,\end{aligned}$$

故

$$z=\frac{i}{10i}=\frac{1}{10}.$$

因此,$\text{Re}z=\frac{1}{10}$,$\text{Im}z=0$, $\bar{z}=z=\frac{1}{10}$, $|z|=\frac{1}{10}$.

例 2　设 $z=x+iy$,$y\neq 0$,$z\neq\pm i$,证明:当且仅当 $x^2+y^2=1$ 时,$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证　证明$\frac{z}{1+z^2}$是实数等价于证明

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即 $z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2)$,也就是$(z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0$.

由于 $z-\bar{z}=2iy\neq 0$,$z\neq\bar{z}$,从而

$$z\bar{z}=1,\quad |z|^2=1,$$

即

$$x^2+y^2=1.$$

由于上述推导的每一步都是可逆的,因此命题得证.

例 3　试写出方程 $x^2+2x+y^2=1$ 的复数形式.

解　令$z=x+iy$,则 $\bar{z}=x-iy$,于是

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},\quad x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z}.$$

将以上三式代入原方程,得到复数方程为

$$z\bar{z}+z+\bar{z}=1.$$

例 4　设 z_1,z_2 为任意复数,证明

$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

证 先证 $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

由共轭复数的性质 $z\bar{z}=|z|^2$ 知,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1.\end{aligned}$$

注意到 $z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$,从而有

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

对于等式 $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$,类似地可以证明.

1.2 复平面及复数的三角表达式

1.2.1 复平面

在平面上建立直角坐标系 xOy,则对于每一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$,在平面上有唯一的一个点(x,y) 与之对应;反之,对于平面上的每一个点(x,y),有唯一复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与之对应(见图 1-2-1).这就是说,全体复数与平面上的点之间建立了一一对应关系,当平面上的点被用来代表复数时,我们就把这个平面叫做**复(数)平面**.复平面上 x 轴上的点表示实数,因此 x 轴称为**实轴**;y 轴上的点(除坐标原点外)表示纯虚数 $\mathrm{i}y(y\neq 0)$,因此 y 轴称为**虚轴**.今后,我们对复数和平面上的点不加区别,即“复数集”与“平面点集”用作同义语,“复数”和“点”也用作同义语.

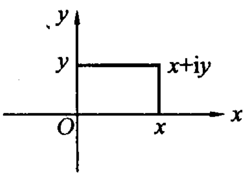


图 1-2-1

1.2.2 复数的模与辐角及三角表达式

在复平面上,复数 z 也可以用平面上的一个自由向量来表示,这个自由量在实轴和虚轴上的投影分别为 x 和 y,它的起点可以是平面上任意一点,如果起点是原点,则向量的终点即是平面上的 z 点,点 z 的位置也可以用它的极坐标 r 和 θ 来确定,如图 1-2-2 所示.

r 称为复数 z 的**模**,θ 称为复数 z 的**辐角**,记为

$$r=|z|,\quad \theta=\mathrm{Arg}z.$$

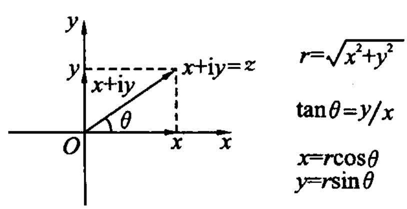


图 1-2-2

关于辐角必须注意以下两点.

(1) 对于任意复数 $z\neq 0$ 有无穷多个辐角,我们把 z 的辐角 θ 落在$(-\pi,\pi]$这个范围内的值称为辐角的**主值**,记为 $\arg z$.显然,主值 $\arg z$ 是由 z 唯一确定的,如 $z=x+\mathrm{i}y$.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}(z\text{ 在第一、四象限内})；\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}(z\text{ 在第二象限内})；\\ -\pi+\arctan\dfrac{y}{x}(z\text{ 在第三象限内}).\end{cases}$$

z 在正负实轴上辐角的主值分别是 0 和 π；在上下半虚轴上辐角的主值分别是$\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$，而且 $z\neq 0$ 时任一辐角与辐角的主值有如下关系：

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k\text{ 为任意整数}).$$

(2) 当 $z=0$ 时，$|z|=0$，但辐角是无意义的.

当已知复数 $z(z\neq 0)$ 的模 r 和辐角 θ 后，这个复数也就完全确定了，因为

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

所以

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

即
$$z=|z|\ (\cos\mathrm{Arg}z+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z=|z|\ (\cos\arg z+\mathrm{i}\sin\arg z),$$

这就是复数的**三角表达式**.

设 $z_1=r_1(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则 $z_1=z_2$ 的充要条件是$r_1=r_2$ 且 $\theta_1=2k\pi+\theta_2$(k 为任意整数).

例 1　用三角表达式表示下列复数，并求出辐角及辐角的主值.

(1)$z=1-\mathrm{i}$；　　(2)$z=-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　(3)$z=-1-3\mathrm{i}$.

解　(1)$z=1-\mathrm{i}=x+\mathrm{i}y$，则 $x=1,y=-1$，z 在第四象限，于是 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-1$.

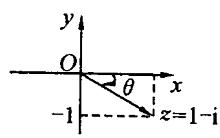


图 1-2-3

如图 1-2-3 所示，z 的辐角的主值表示为 $\arg z=-\frac{\pi}{4}$，因此，$z=1-\mathrm{i}$ 的三角表达式为

$$z=1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$z=1-\mathrm{i}$ 的辐角为

$$\mathrm{Arg}z=2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\text{ 为任意整数}).$$

(2)$z=-\sqrt{3}\mathrm{i}=x+\mathrm{i}y$，则 $x=0$，$y=-\sqrt{3}$，z 在下半虚轴上，于是 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}$，$z$ 的辐角主值 $\theta=-\frac{\pi}{2}$，如图 1-2-4 所示.

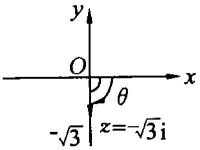


图 1-2-4

因此，$z=-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的三角表达式为

$$\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

$z=-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的辐角为

$$\mathrm{Arg}(-\sqrt{3}\mathrm{i})=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\text{ 为任意整数}).$$

(3)$z=-1-3\mathrm{i}=x+\mathrm{i}y$，则 $x=-1, y=-3$，z 在第三象限，于是

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=3.$$

z 的辐角主值为 $-\pi+\arctan3$，如图 1-2-5 所示.

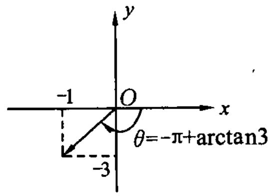


图 1-2-5

因此 $z=-1-3\mathrm{i}$ 的三角表达式为

$$-1-3\mathrm{i}=\sqrt{10}[\cos(-\pi+\arctan3)+\mathrm{i}\sin(-\pi+\arctan3)].$$

$z=-1-3\mathrm{i}$ 的辐角为

$$\mathrm{Arg}(-1-3\mathrm{i})=2k\pi-\pi+\arctan3\quad(k\text{ 为任意整数}).$$

例 2 求 $z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 及 $2\pi\leqslant\theta\leqslant4\pi$ 的三角表达式.

解 当 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 时，$0\leqslant\frac{\theta}{2}\leqslant\pi, \sin\frac{\theta}{2}\geqslant0$，于是

$$\begin{aligned}1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta&=2\sin^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right](\text{三角表达式}).\end{aligned}$$

当 $2\pi\leqslant\theta\leqslant4\pi$ 时，$\pi\leqslant\frac{\theta}{2}\leqslant2\pi, \sin\frac{\theta}{2}\leqslant0$，于是

$$\begin{aligned}1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta&=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)(\text{注意 }|z|\geqslant0)\\&=-2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right](\text{三角表达式}).\end{aligned}$$

例 3 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，求 $\bar{z}$ 及 $\frac{1}{z}$ 的三角表达式.

解 依题意

$$\bar{z}=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)],$$

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{1}{r^2}r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)].$$

例 4　设复数 z 满足 $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg(z-2)=\dfrac{6}{5}\pi$，求 z.

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $z+2=(x+2)+\mathrm{i}y$，$z-2=(x-2)+\mathrm{i}y$，于是，依题意

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x+2},\tan\frac{6}{5}\pi=\frac{y}{x-2},$$

$$\begin{cases}x+2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y,\\ x-2=-\sqrt{3}y,\end{cases}$$

解之得
$$x=-1,\quad y=\sqrt{3}.$$
因此
$$z=x+\mathrm{i}y=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

1.2.3　复数模的三角不等式

设 $z=x+\mathrm{i}y$，可以得到关于复数模的几个重要不等式.

(1) $|x|=|\operatorname{Re}z|\leqslant|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，　$|y|=|\operatorname{Im}z|\leqslant|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2) $|z|\leqslant|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|=|x|+|y|$.

现在说明复数加减法的几何意义. 既然复数可以用起点是原点的向量来表示，因此两个复数的加减法可以利用向量的平行四边形法则或三角形法则来进行，如图 1-2-6 所示.

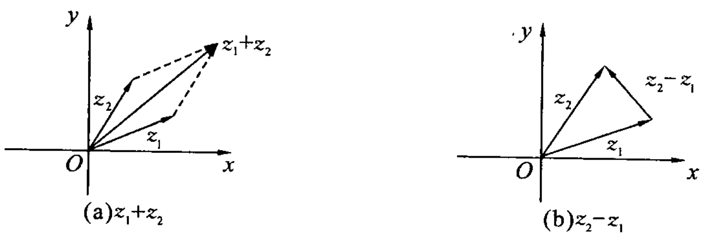


图 1-2-6

因此，复数 z_1 的模 $|z_1|$ 也可以解释成复平面上点 $z=z_1$ 与坐标原点 $z=0$ 的距离，$|z_2-z_1|$ 解释成复平面上点 $z=z_2$ 与点 $z=z_1$ 之间的距离，按照三角形的两边之和不能小于第三边(见图 1-2-6(a))，两边之差不大于第三边(见图(1-2-6(b))，就可得到下列关于复数模的三角不等式.

(3) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

把 z_1 改写成 $-z_1$，得

$$|z_2-z_1|\leqslant|z_2|+|z_1|.$$

(4) $||z_2|-|z_1||\leqslant|z_2+z_1|$.

把 z_1 改写成 $-z_1$，得

$$||z_2|-|z_1||\leqslant|z_2-z_1|.$$

在不等式(3)、(4)中,等号当且仅当是点 z_1 与 z_2 位于通过原点的同一直线上时成立. 这两个不等式还可以用代数方法证明,由本章 1.1.2 节中例 4 知

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

又因为

$$|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)|\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||\bar{z}_2|=|z_1||z_2|,$$

即

$$-|z_1||z_2|\leqslant\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant|z_1||z_2|,$$

所以有

$$|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2,$$

$$|z_1-z_2|^2\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|=(|z_1|-|z_2|)^2,$$

即得 $\quad |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \quad$ 及 $\quad |z_2-z_1|\geqslant||z_1|-|z_2||.$

将不等式(3)和(4)合在一起也可写成下列形式:

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

及

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

利用不等式(3)及数学归纳法可证明不等式(5).

(5) $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$

这里需要强调的是,由于 $|z_1-z_2|$ 在复平面上表示点 z_1 与 z_2 之间的距离,因此,对固定的复数 z_0 及实数 $R>0$, $|z-z_0|=R$ 表示以 z_0 为圆心、R 为半径的圆周. $|z-z_0|\leqslant R$ 表示圆周的内部及圆周, $|z-z_0|>R$ 表示圆周的外部.

以上所有不等式(1)~(5)都是相对复数的模而言的. 注意复数本身是不能比较大小的,这是复数与实数的一个不同之处.

1.2.4 利用复数的三角表达式作乘除法

设有两个复数

$$z_1=r_1=(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1), z_2=r_3=(\cos\theta_3+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2]+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

也就是说,两个复数的乘积是这样的一个复数:**它的模等于原两复数模的乘积,它的辐角等于原来两复数辐角之和**,即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

注意 由于第二个等式的两边都是表示多值的式子,因此,在这里"="应理解成集合 $\mathrm{Arg}z_1z_2$ 与集合 $\{\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\}$ 相等,即对于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值,一定存在一个 $\mathrm{Arg}z_1$ 及 $\mathrm{Arg}z_2$,它们之和等于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$;反过来,对于每一个 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$,一定存在

一个 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$，使得 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 等于 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 之和.

从几何意义上解释复数乘法 z_1z_2：把表示 z_1 的那个向量转动一个角度 θ_2，并将长度放大 r_2 倍，就得到代表 z_1z_2 的向量，如图 1-2-7 所示.

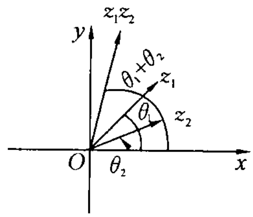


图 1-2-7

如把向量 z 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，就得到了 $\mathrm{i}z$，即 $\mathrm{i}z=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)z$；把向量 z 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，就得到了向量 $-\mathrm{i}z$，即 $-\mathrm{i}z=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]z$.

对于除法，同样有公式

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]\quad(z_2\neq 0),$$

即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2},\quad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

例 5　利用复数的三角表达式计算 $\mathrm{i}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})$.

解　因为

$$\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2},$$

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{i}&=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{3}+\mathrm{i})\\&=[\mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})](\sqrt{3}+\mathrm{i})\\&=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=2+2\sqrt{3}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 6　利用复数的三角表示式计算 $\frac{1}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}$.

解　由于 $1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$，

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

故
$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3&=[(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})](\sqrt{3}+\mathrm{i})\\&=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

因此
$$\frac{1}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}=\frac{1}{8}\left[\cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(0-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{1}{8}\mathrm{i}.$$

1.2.5 复数的乘方和开方

设 n 是正整数，z^n 表示 n 个复数 z 的乘积，显然当 $z=0$ 时，$z^n=0$，当 $z\neq 0$ 时，设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，由乘法的运算规则知

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.2.1}$$

易知，式(1.2.1)对于 $n=0$ 时也成立(定义 $z\neq 0$ 时，$z^0=1$)，如果定义

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n},$$

则

$$\begin{aligned}z^{-n}&=[r\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta]^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{\cos 0+\mathrm{i}\sin 0}{r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)}\\&=r^{-n}[\cos(-n\theta)+\mathrm{i}\sin(-n\theta)].\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

在式(1.2.1)及式(1.2.2)中令 $r=1$，得

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

其中 n 为任意整数，此公式称为**德摩弗(De Moivre)公式.**

如 $n=3$ 时，

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta,$$

即

$$\cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta,$$

比较等式两边的实部和虚部，得到下列公式

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,\quad \sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

下面考虑开方，设 z 为已知的复数，凡是满足方程

$$\omega^n=z\quad(n\text{ 为正整数}) \tag{1.2.3}$$

的所有解 ω，称为 z 的 **n 次方根**，记为 $\omega=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$.

当 $z=0$ 时，显然 $\omega^n=0$ 只有唯一解 $\omega=0$，即 $0^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{0}=0$；

当 $z\neq 0$ 时，设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$\omega=p(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，代入方程(1.2.3)并利用德