机电类新技师培养规划教材

实用数学

SHIYONG SHUXUE

中国机械工业教育协会
全国职业培训教学工作指导委员会
机电专业委员会
组编

张庆尧 主编

赠送电子教案

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

实用数学

机电类新技师培养规划教材

实 用 数 学

中国机械工业教育协会
全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会　组编
张庆尧　主编

机 械 工 业 出 版 社

本套教材是根据中国机械工业教育协会和全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会组织制定的技师教学计划和教学大纲编写的。本教材的主要内容包括：变量与函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程。

本套教材的教学计划和大纲是依据《国家职业标准》中对技师的要求制定的，内容立足岗位，以必需、够用为度，符合职业教育的特点和规律。本教材配有教学计划和大纲、电子教案，部分教材还有多媒体课件和习题及其解答，可供高级技校、技师学院、高等职业院校等教育培训机构使用。

图书在版编目（CIP）数据

实用数学/张庆尧主编；中国机械工业教育协会，全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会组编. —北京：机械工业出版社，2008.6
机电类新技师培养规划教材
ISBN 978-7-111-24585-8

Ⅰ. 实… Ⅱ. ①张…②中…③全… Ⅲ. 高等数学-技术培训-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第100626号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：王英杰 郎 峰
责任编辑：赵磊磊 版式设计：霍永明 责任校对：魏俊云
封面设计：王伟光 责任印制：邓 博
北京京丰印刷厂印刷
2008年9月第1版·第1次印刷
184mm×260mm·15印张·367千字
0 001—4 000册
标准书号：ISBN 978-7-111-24585-8
定价：23.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379083

机电类新技师培养规划教材
编审委员会

本书主编　张庆尧

本书参编　汪家侃　潘文龙

本书主审　曾燕燕

前　言

随着全球知识经济的快速发展，我国工业化建设也呈现迅猛发展之势，因而技术工人十分缺乏。为了顺应形势的发展要求，我国出台了一系列大力发展职业教育的政策：劳动和社会保障部颁布了最新《国家职业标准》，继续实行职业准入制度，并将国家职业资格由三级（初、中、高）改为五级（初、中、高、技师、高级技师），对技术工人的工作内容、技能要求和相关知识进行了重新界定。教育部根据国务院“大力发展职业教育”的精神进行了职业教育的改革，高职学院、中职学校相应地改制、扩招，以培养更多的技术工人。

经过几年的努力，技术工人在数量上的矛盾在一定程度上得到缓解，但在结构比例上的矛盾突显出来。高级工、技师、高级技师等高技能人才在技术工人中的比重远远低于发达国家，而且他们年龄普遍偏大，文化程度偏低，学习高新技能比较困难。为打破这一局面，加快数量充足、结构合理、素质优良的技术技能型、复合技能型和知识技能型高技能人才的培养，劳动和社会保障部提出的“新技师培养带动计划”，即在完成“3年50万”新技师培养计划的基础上，力争“十一五”期间在全国培养技师和高级技师190万名，培养高级技工700万名，使我国从“世界制造业大国”逐步转变为“世界制造业强国”。为此，劳动和社会保障部决定：除在企业中培养和评聘技师外，要探索出一条在技师学院中培养技师的道路来。中国机械工业教育协会和全国职业培训教学工作指导委员会经研究决定，制定机电行业的技师培养方案。

在上述原则的指导下，中国机械工业教育协会和全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会组织30多所高级技校、技师学院和企业培训中心等单位，经过广泛的调研论证，决定首批选定五个工种（职业）——模具工、机修钳工、电气维修工、焊工、数控机床操作工作为在技师学院培养技师的试点。对学制、培养目标、教学原则、专业设置、教学计划、教学大纲、课程设置、学时安排、教材定位、编写方式等，参照《国家职业标准》中相关工种对技师和高级技师的要求，结合各校、各地区企业的实际，经过历时三年的充分论证，完成了教学计划和教学大纲的制定和审定工作，并明确了教材编写的思想。

使用本套“机电类新技师培养规划教材”在技师学院培养技师，招收的学员必须符合的条件是：已取得高级职业资格（国家职业资格三级）的高级技校的毕业生，或具有高级职业资格证书的本职业或相近职业的人员。本套教材的编写充分体现“教、学、做”合一的职教办学原则，其特点如下：

（1）教材内容新，贴合岗位实际，满足职业鉴定要求。当今国际经济大格局的进程加快了各类型企业的先进加工技术、先进设备和新材料的使用，作为技师必须适应这种要求，教材中也相应增加了新知识、新技术、新工艺、新设备等方面的内容。另外，教材的内容以《国家职业标准》中对技师和高级技师的知识技能要求为基础，设置的实训项目或实例从岗

位的实际需要出发，是生产实践中的综合性、典型性的技术问题，既最大限度地体现学以致用的目的，又满足学生毕业考工取得职业资格证书的需要。

(2) 针对每个工种（职业），均编写一本《相关工种技能训练》。随着全球化进程的加快，我国的生产力发展水平和职业资格体系应与国际相适应，因此，技师应该是具有高超操作技能的复合型人才。例如，模具工技师不应仅是模具工方面的行家里手，还应懂得车、铣、数控、磨、刨、镗和线切割、电火花等加工，以适应现代制造业的发展趋势，故此《相关工种技能训练（模具工）》中，就包含上述内容。其他工种与此类似。

(3) 理论和技能有机结合。劳动和社会保障部颁布的“新技师培养带动计划”中明确指出“建立校企合作培养高技能人才”的制度，现在许多技师学院从企业中聘请具有丰富实践经验的工程技术人员作为技能课教师，各专题理论与实践融合在一起的编写方式，更适于这种教学制度。

(4) 单独编写了两本公共课教材——《实用数学》和《应用文写作》。新时代对技师的要求不仅是技术技能型人才，还应是知识技能型甚至是复合技能型的高技能人才，有一定的数学理论基础和写作能力是新技师必备的素质。《实用数学》运用微积分知识分析解决生产中的实际问题，少推理，重应用；《应用文写作》除介绍普通事务文书、经济文书、法律文书、日常事务文书的写法外，还教授科技文书的写法，其中科技论文的写法对于技师论文的写作会有很大裨益。

(5) 本套教材配有电子教案。电子教案包括教学计划、教学大纲、每章的培训目标、内容简介、重点难点，教师上课的板书，本章小结、配套习题及答案等。

(6) 练习题是国家题库及各地鉴定考题的综合归纳和提升。

本套教材的编写得到了各技师学院、高级技工学校领导的高度重视和大力支持，编写人员都是职业教育教学一线的优秀教师，保障了这套教材的质量。在此，对为这套教材出版给予帮助和支持的所有学校、领导、老师表示衷心的感谢！

本书由张庆尧统稿并任主编，汪家侃、潘文龙参加编写，曾燕燕任主审。

由于编写时间和编者水平所限，书中难免存在不足或错误，敬请广大读者不吝赐教！

中国机械工业教育协会

全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会

目　　录

第一章　变量与函数

数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分与积分也就立刻成为必要的了.

——恩格斯

本章学习内容提要：

函数是微积分学研究的主要对象. 函数概念是微积分学中最重要的基本概念之一.

本章内容是对中学函数的复习、补充和提高. 先从实例引入，概括出变量、函数的概念和性质. 综合叙述六个基本初等函数的性质和图像. 介绍反函数、复合函数及分段函数，给出初等函数的定义. 着重介绍函数模型的构建与应用，引入使用 Mathematica 软件描绘简单函数图像的方法.

本章学习要求：

1. 正确理解函数的定义和性质.
2. 熟悉六种基本初等函数的定义域、性质和图像.
3. 理解反函数、复合函数以及分段函数的意义.
4. 掌握函数模型的构建方法，提高分析问题和解决问题的能力.
5. 了解 Mathematica 软件的使用方法，并会用计算机描绘简单函数的图像.

第一节　变量、函数的概念

一、变量及其表示方法

1. 变量

只要仔细观察周围的自然现象和人们的实践活动，就不难发现我们都生活在一个量的世界里. 例如，在天气变化中有气温、雨量、风力、风向、湿度、舒适度等；在购物活动中，有长度、面积、体积、重力、价格等；在科研活动中，有时间、质量、力、位移、速度、加速度、功率、能量等；在工程技术中，有温度、压力、流量、强度等. 这些量一般可分为两类：一类是在事物运动变化过程中可以取不同数值的量；一类是保持数值不变的量. 例如某金属轴在加热过程中，质量保持不变，其长度与温度都在不断变化. 在一个交流电路中，通过的电流与两端的电压都是不断变化的.

定义　在某一变化过程中，数值保持不变的量，称为**常量**；数值不断变化的量，称为**变量**.

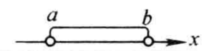
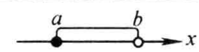
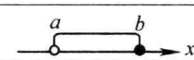
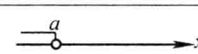
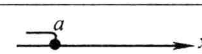
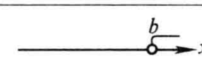
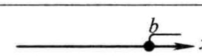
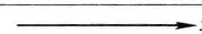
常量是变量的特殊情况.

我们用英文字母 x、y、z、…表示变量. 用英文字母 a、b、c、…表示常量.

2. 变化域及其表示方法

变量通常有一定的变化范围，我们把变量变化的范围称为**变化域**. 变化域用实数集或实数集的部分集合来表示. 如下表 1-1 所示，表中 a、b 为实数，且 $a<b$.

表 1-1

定　　义	名　　称	符　　号	图　　像
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	左半闭区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	右半闭区间	$(a, b]$	
$\{x \mid a<x\}$	左半开无穷区间	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid a\leqslant x\}$	左半闭无穷区间	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x<b\}$	右半开无穷区间	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x\leqslant b\}$	右半闭无穷区间	$(-\infty, b]$	
$\{x \mid x\in R\}$	无穷区间	$(-\infty, +\infty)$	

注："∞"是一个记号，不表示数，"+"、"-"表示方向.

例 1　把下列实数集表示成区间：

（1）$\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 10\}$；　　（2）$\{x \mid x<3\}$.

解　（1）表示成以 -2、10 为端点的闭区间：

$$\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 10\}=[-2, 10];$$

（2）表示成以 3 为端点的右半开无穷区间：

$$\{x \mid x<3\}=(-\infty, 3).$$

3. 绝对值

设 a 为一实数，a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时} \end{cases}.$$

a 的绝对值 $|a|$ 表示点 a 到原点 O 的距离，如图 1-1 所示.

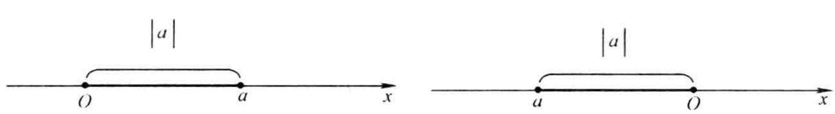


图　1-1

从 a 的绝对值的定义，容易理解

$$|a|\geqslant 0;$$

$$|a|\geqslant \pm a \text{ 或 } -|a|\leqslant a\leqslant |a|;$$

$$|a|=\sqrt{a^2};$$

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|;$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

表示变量变化域还常用含绝对值的不等式来表示. 例如:

$$\{x \mid |x| < \delta, \delta > 0\} = \{x \mid -\delta < x < \delta, \delta > 0\} = (-\delta, \delta), \quad (\delta > 0).$$

我们称它为**原点 O 的 δ 邻域**, 如图 1-2 所示, 它是以原点 O 为中心、δ 为半径的一个对称区间, 又记作 $\delta(0, \delta)$.

一般地, 就是

$$\{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\} = (a-\delta, a+\delta).$$

我们称它为**点 a 的 δ 邻域**. 如图 1-3 所示, 它是以点 a 为中心、δ 为半径的一个对称区间, 又记作 $S(a, \delta)$.

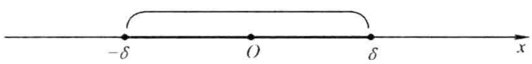


图　1-2

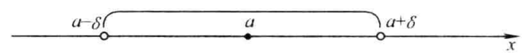


图　1-3

在点 a 的 δ 邻域中, 除去点 a, 就是

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta, \delta > 0\} = (a-\delta, 0) \cup (0, a+\delta).$$

我们称它为**点 a 的 δ 空心邻域**. 如图 1-4 所示, 又记作 $S_0(a, \delta)$.

例 2　把下列实数集写成区间:

(1) $\left\{x \| x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$; (2) $\{x \| x-2| < 4\}$.

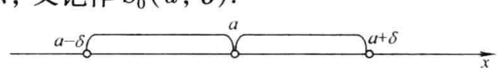


图　1-4

解　(1) 是原点 O 的 $\frac{\pi}{2}$ 邻域, 即 $\left\{x \| x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) 是以点 2 为中心、4 为半径的对称区间, 也就是点 2 的 4 邻域, 即 $\{x \| x-2| < 4\} = (-2, 6)$.

二、函数的定义及其性质

1. 实例

在人们的科学实验、工程技术活动过程中, 往往在一个问题中同时出现几个变量, 我们要研究这几个变量之间的依赖关系, 即**函数关系**, 以便从一个变量的变化去推知另外一个或几个变量的变化规律.

例 3　一根长 1m 的某金属轴做加热膨胀实验, 测得不同温度 t 下的伸长长度 l(μm), 数据如表 1-2 所示。

表　1-2

t/°C	20	30	40	50	60	70
l/μm	15	31	45	59	75	92

在这个试验过程中有两个变量: 温度 t(°C) 和轴伸长长度 l(μm), 其中 t 的变化域是集合

$$D = \{t \mid t = 20, 30, 40, 50, 60, 70\}.$$

l 的变化域是

$$Z = \{l \mid l = 15, 31, 45, 59, 75, 92\}.$$

对于该集合 D 中的任一个 t 值, 根据表 1-2, Z 中有唯一确定的值 l 与之对应.

例 4 经过近几十年来对大气层的考察，科学家发现大气层的臭氧在快速减少，出现臭氧层的空洞. 图 1-5 所示的曲线表示 1979~2001 年这 23 年间南极上空臭氧层空洞面积 S 的变化情况。

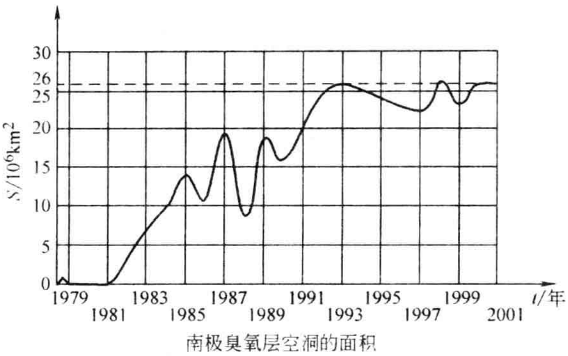


图 1-5

图中曲线关联着两个变量：时间 t（年）和面积 $S(10^6\text{km}^2)$，其中 t 的变化域是集合 $D=\{t\mid 1979\leqslant t\leqslant 2001\}$，$S$ 的变化域是集合 $Z=\{S\mid 0\leqslant s\leqslant 26\}$. 对于集合 D 中任一个 t 值，根据曲线都可求得 Z 中唯一确定的 S 值与之对应. 例如，当 $t=1998$ 年时，南极上空臭氧层空洞的面积达到 $26\times10^6\text{km}^2$，这就是警示人类：控制并减少向大气层温室排放已刻不容缓.

例 5 如图 1-6 所示，在有电阻 R 和电压 U 的直流电路中，当有电流 I 通过时，由欧姆定理知

$$I=\frac{U}{R} \tag{1-1}$$

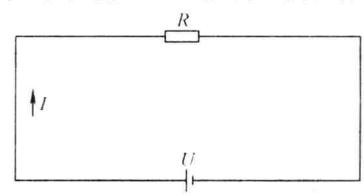


图 1-6

如果电压 U 固定不变，则电流 I 随电阻 R 的改变而变化. R 的变化域是 $D=\{R\mid 0<R<+\infty\}$，I 的变化域是 $Z=\{I\mid 0\leqslant I<+\infty\}$. 对于 D 中的任一个 R 值，通过式(1-1)在 Z 中有唯一的 I 值与之对应.

2. 函数的定义

以上三例，实际意义各不相同，但有共同的变量之间的变化结构：都有两个变量；两个变量之间都有一个确定的对应规则（例 3 的表格，例 4 的曲线，例 5 的公式），对其中一个变量，在其变化域中任取一个数值时，按此对应规则，另一个变量有唯一确定的数值与它对应. 两变量间的这种对应关系，就是数学上的**函数关系**.

定义 设在某个变化过程中，有两个变量 x、y，x 的变化域为 D，如果变量 x 在 D 中任取一个值，变量 y 按照确定的对应规则 f，有唯一确定的值与它对应，那么我们称对应规则 f **为定义在 D 上的一个函数**，记作

$$y=f(x)\qquad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

自变量 x 的变化域 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**. 对于自变量 x 的某一个值 $x_0\in D$，y 有对应的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$，或 $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

因变量 y 的全体函数值称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 $Z=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$.

由函数的定义可知，对应规则 f 与定义域 D 是构成函数的两个决定性因素. 在例 3 中，由表 1-2 确定 t 与 l 之间的对应规则 f，其定义域 $D=\{20,30,40,50,60,70\}$. 在例 4 中，由图 1-5 所示的曲线确定 t 与 S 之间的对应规则 f，其定义域 $D=\{t\mid 1979\leqslant t\leqslant 20001\}$. 在例 5 中，由式(1-1)确定 R 与 I 之间的对应规则 f，其定义域 $D=\{R\mid 0<R<+\infty\}$. 因此，两个函数只要它们的对应规则和定义域相同，就表示同一个函数，而与其表示的字母无关，即如果函数 $y=f(x)$，$x\in D$，与函数 $S=f(t)$，$t\in D$，那么 $y=f(x)$ 与 $S=f(t)$ 就表示同一个函数.

例 6　下列各题中的两个函数是否相同，为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$与 $z=x+1$；

(2) $y=\sin x$，与 $z=\sin t$.

解　(1) 因为 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$的定义域是$(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$，而 $z=x+1$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，所以 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$与 $z=x+1$ 是两个不同的函数.

(2) 因为 $y=\sin x$ 与 $z=\sin t$ 的对应规则和定义域都相同，所以它们是两个相同的函数.

例 7　求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\lg(x+1)$的定义域.

解　这是求两个函数$\dfrac{1}{x}$与 $\lg(x+1)$定义域的交集，先求出每个函数的定义域，再求它们的公共部分.

要使$\dfrac{1}{x}$有意义，必须 $x\neq 0$，所以$\dfrac{1}{x}$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

要使 $\lg(x+1)$有意义，必须 $x+1>0$，所以 $\lg(x+1)$的定义域为$(-1, +\infty)$.

如图 1-7 所示，$\dfrac{1}{x}$和 $\lg(x+1)$定义域的公共部分为$(-1, 0)\cup(0, +\infty)$.

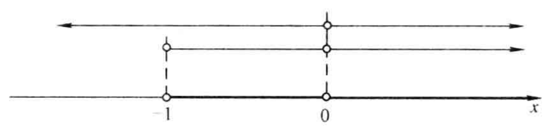


图　1-7

所以，函数的定义域为$(-1, 0)\cup(0, +\infty)$.

例 8　设函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$，求$f(x)$在 $x=\dfrac{3}{2}$、$x=-2$ 及 $x=f[f(x)]$时的值.

解　$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5};$$

$$f(-2)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right|_{x=-2}=\left.\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2-1}}\right|=-\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$f[f(x)]=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right|_{x=f(x)}=\frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2-1}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{\sqrt{x^2-x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}}=x.$$

3. 函数的图像

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如图 1-8 所示，在直角坐标系 Oxy 中，以自变量 x 的值为横坐标，以对应的函数值 $y=f(x)$为纵坐标，就在坐标平面上确定一个点 $M(x, y)=M(x, f(x))$. 点 $M(x, f(x))$组成的全体点集

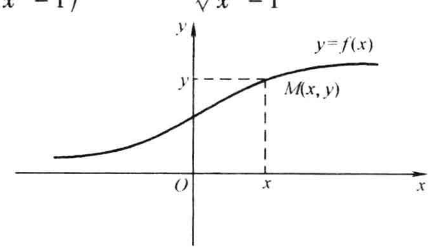


图　1-8

$$\{M(x, y)\mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**(或图形). 函数 $y=f(x)$ 的图像往往是一条曲线或若干条曲线(含直线).

4. 函数的性质

下面我们讨论函数的几种性质:

(1) 函数的单调性 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有意义, 如果对于 D 上任意两点 x_1, x_2,

当 $x_1<x_2$ 时, 有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**, 称 D 为**单调增加区间**.

当 $x_1<x_2$ 时, 有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**, 称 D 为**单调减少区间**.

单调增加或单调减少的函数, 统称为**单调函数**, 其区间统称为**单调区间**.

一般当 $x_1<x_2$ 时, 若有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称为 $f(x)$ 在 D 上严格**单调增加**; 若有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上严格**单调减少**.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升(图 1-9a), 单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降(图 1-9b).

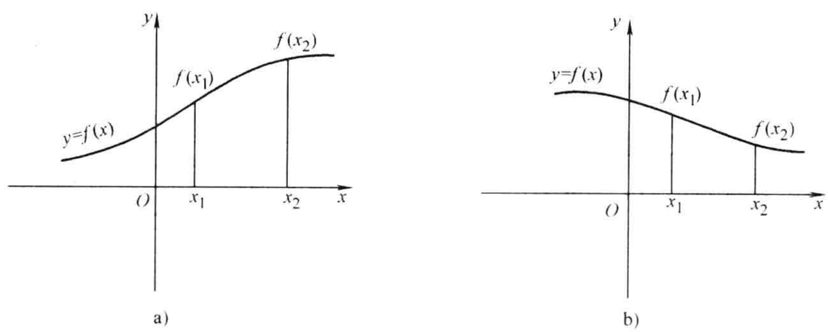


图 1-9

例如: 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

(2) 函数的有界性 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有意义, 如果存在某个正数 $M>0$, 对于区间 D 上每一个 x 值, 对应的函数值都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上**有界**. $|f(x)|\leqslant M$ 就是

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M.$$

如图 1-10 所示, 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有界, 那么它的图像就介于两条平行直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

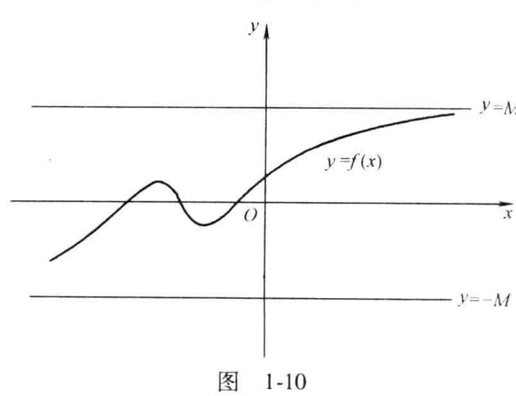


图 1-10

例如: $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为

$$|\sin x|\leqslant 1, x\in(-\infty, +\infty).$$

$y=\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}, x\in(-\infty, +\infty).$$

(3) 函数的奇偶性 设函数 $y=f(x)$ 在关于原点 O 对称的区间 $(-a, +a)$ 上有意义, 而且如果有

$$f(-x)=f(x),\ x\in(-a,\ a),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 $(-a,\ +a)$ 上为**偶函数**. 如果有

$$f(-x)=-f(x),\ x\in(-a,\ a),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 $(-a,\ +a)$ 上为**奇函数**.

如图 1-11 所示，偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称(图 1-11a)，奇函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称(图 1-11b).

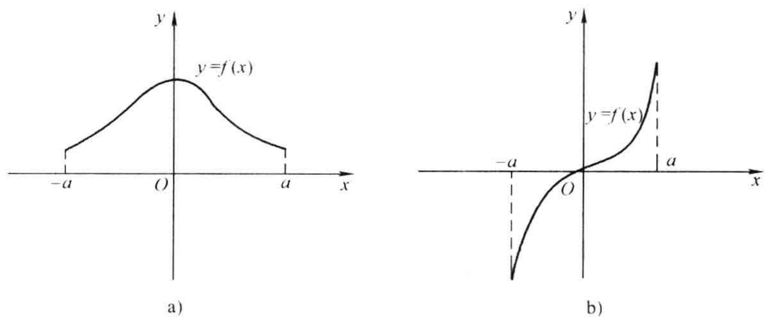


图　1-11

例如：$y=x$，$y=x^3$，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上都是奇函数，$y=x^2$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上都是偶函数. $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上是偶函数，$y=x^3\cos x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上是奇函数. 而 $y=x^2+\sin x$ 既非奇函数也非偶函数.

(4) 函数的周期性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有意义，如果存在常数 $T(T\neq 0)$，使得对于一切的 $x\in D$ 且 $x+T\in D$ 都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**.

任何周期函数都有无穷多个周期. 事实上，若函数 $y=f(x)$ 的周期为 T，则

$$kT(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

都是 $f(x)$ 的周期. 如果在周期函数的无穷多个周期中存在一个最小的正数，那么称此数为函数的**最小正周期**，简称函数的**周期**. 例如，函数 $y=\sin x$ 有周期…，-4π，-2π，0，2π，4π，…，其中最小正周期是 2π，所以，通常称 2π 是函数 $y=\sin x$ 的周期.

周期为 T 的函数，在其定义域内长度为 T 的区间上有相同的图像. 人们在研究转动或振动现象时，总会发现往返循环的情况，这种运动变化的重复性，反映在函数关系上就是函数的周期性.

例 9　求函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期.

解　设函数 $f(x)$ 的周期为 T，则有

$$f(x+T)=A\sin[\omega(x+T)+\varphi]=A\sin[(\omega x+\varphi)+\omega T].$$

要使 $f(x+T)=f(x)$，就是要使

$$A\sin[(\omega x+\varphi)+\omega T]=A\sin(\omega x+\varphi)$$

成立，只有 $\omega T=n2\pi(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，

所以，$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

习 题 1-1

1. 举出由表格表示、曲线表示的函数实例各2例.

2. 表1-3所列是我国从1990年至2005年国内生产总值(GDP)数据(单位:亿元).

表 1-3

年份 t	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
生产总值 G	18598.4	21662.5	26651.9	34560.5	46670.0	57494.9	66850.5	73142.7
年份 t	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
生产总值 G	76967.1	80422.8	89404.0	95933.0	104790.6	116694.0	136515.0	182321.0

试将表格中 t 与 G 之间的关系用折线图形表示出来.

3. 图1-12所示是我国1993年4月到2005年4月的经济预警指数图. 请简述我国从1993年4月到2005年4月的经济发展状况,并指出我国经济发展过热时的最高点、过冷时的最低点分别出现在哪一年?并预测2005年度我国经济发展的总体趋势将会怎样?

图 1-12

第二节 初等函数

一、反函数与复合函数

1. 反函数

我们先从一个具体例子开始.

例1 根据国务院发展中心2000年发表的《未来20年我国发展前景分析》判断,未来20年,我国国内生产总值(GDP)年平均增长率将为7.3%,按照这样的经济增长速度,我们来计算:

(1) 2000年我国国内生产总值是10835亿美元,那么到2020年可望达到多少亿美元?

(2) 实际上,几十年来,我国国内生产总值(GDP)年平均增长率是9.6%,2000年美国国内生产总值是98820亿美元,经过多少年后,我国国内生产总值可望达到美国2000年的相应水平?

解 我们在中学数学里已经学习过,若原有量为 y_0,平均增长率为 p,则经过时间 x 后的总量 y 为

$$y=y_0(1+p)^x \tag{1-2}$$

(1) 在式(1-2)中,当 $y_0=10835$, $p=0.073$, $x=20$ 时,就有