

电路分析基础

题 解

下 册

北京工业学院自动控制系
电子电路教研室编

中央广播电视大学

目 录

第八章 正弦激励下电路的完全响应

解题提要	1
练习题 8-1 至 8-15 题	5
习题八 1 至 17 题	14
思考题	28

第九章 正弦稳态分析

解题提要	32
练习题 9-1 至 9-21 题	36
习题九 1 至 35 题	57
思考题	108

第十章 正弦稳态功率 三相电路

解题提要	115
练习题 10-1 至 10-16 题	118
习题十 1 至 24 题	129
思考题	156

第十一章 网络函数

解题提要	158
练习题 11-1 至 11-12 题	161
习题十一 1 至 28 题	184
思考题	212

第十二章 非正弦周期波的傅里叶分析

解题提要	215
练习题 12-1 至 12-14 题	218

习题十二 1 至 19 题233

思考题.....258

第十三章 耦合电感和理想变压器

解题提要.....261

练习题 13-1 至 13-17 题265

习题十三 1 至 25 题279

思考题.....304

第十四章 磁路

解题提要.....306

练习题 14-1 至 14-6 题308

习题十四 1 至 6 题311

思考题.....314

习题十五 1 至 10 题318

习题十六 1 至 10 题322

习题十七 1 至 10 题326

习题十八 1 至 10 题330

习题十九 1 至 10 题334

习题二十 1 至 10 题338

习题二十一 1 至 10 题342

习题二十二 1 至 10 题346

习题二十三 1 至 10 题350

习题二十四 1 至 10 题354

习题二十五 1 至 10 题358

习题二十六 1 至 10 题362

习题二十七 1 至 10 题366

习题二十八 1 至 10 题370

习题二十九 1 至 10 题374

习题三十 1 至 10 题378

第八章 正弦激励下电路的完全响应

解 题 提 要

1. 正弦电压 $u(t)$ 可表为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$$

其中 U_m 为电压的最大值或振幅； ω 为角频率(弧度/秒)； ϕ 为初相，与计时的起点有关。

给定正弦波形图要能写出相应的函数表示式；给定正弦函数表示式要能绘出相应的波形图。为此，必须注意初相角的正、负，当初相 $\phi > 0$ 时，波形图如图 8-1 所示。

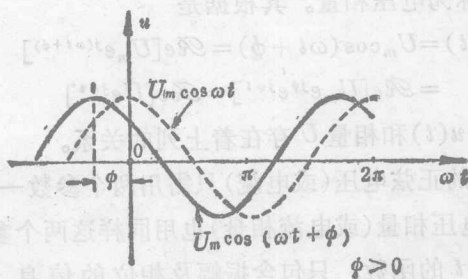


图 8-1

2. 角频率、频率、周期之间的关系

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

其中 f 为频率(赫, Hz)； T 为周期(秒, s)。

3. 两个同频率正弦波的初相之差，称为相位差。它反映了这两个正弦量随时间变化的步调上的差异。

4. 正弦激励下线性、时不变电路的完全响应由电路微分方程求得。解答由对应齐次方程的解(固有响应)和微分方程的特解(强制响应)组成。齐次方程解如第六、七章所述。如果 $j\omega$ (ω 是正弦激励的角频率)不是特征方程的根,则特解可设为同频率的正弦函数,代入微分方程后求得*(用待定系数法)。求得特解后,即可根据初始条件求出齐次方程解中的常数,这也和第六、七章所述相同。

5. 为便于求出特解,可以用相量法。相量法的基础在于用相量表示正弦波。设正弦电压为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$$

它可以用相量

$$\dot{U} = U_m e^{j\phi} = U_m \angle \phi$$

来表示, $\dot{U}$ 称为电压相量。其根据是

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \phi) = \Re e[U_m e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= \Re e[U_m e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \Re e[\dot{U} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

即正弦电压 $u(t)$ 和相量 $\dot{U}$ 存在着上列的关系。

对给定频率的正弦电压(或电流)只需用两个参数——振幅及初相来表征,而电压相量(或电流相量)也用同样这两个参数来表征。它不再是时间 t 的函数,只包含振幅及相位的信息。以电压为例, $u(t)$ 是时间域的表示形式,而 $\dot{U}$ 则为频率域的表示形式,两者由上式相联系。从表面看, $\dot{U}$ 虽然不包含频率,但它是针对给定频率的正弦电压的。

相量可以用复平面上的有向线段来表示,以电压相量为例,其长度为 U_m , 与实轴的夹角为 ϕ (图 8-2)。

如果已知电压相量 $\dot{U} = U_m e^{j\phi} = U_m \angle \phi$ 和角频率 ω , 我们也可

* 樊映川: 高等数学讲义(下) p. 190

以唯一地决定正弦波,即

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[\dot{U}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}[U_me^{j\phi}e^{j\omega t}] \\ &= U_m \cos(\omega t + \phi) = u(t)\end{aligned}$$

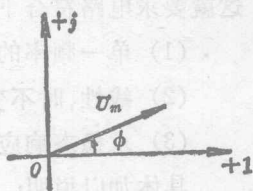


图 8-2

给定正弦波要能写出它的相量; 给定相量 (和频率) 要能求得它所对应的正弦波。这也是学习正弦电路分析的一个基本要求。

6. 如果激励和特解是同频率的正弦函数 (这要求 $j\omega$ 不是特征方程的根), 它们就都可以用相量来表示, 也就可以用相量法来求特解。其方法如下:

把微分方程中的变量 x 和正弦激励用对应相量 $\dot{X}$ 和 $\dot{A}$ 替换, $\dot{X}$ 的 k 次导数用 $(j\omega)^k \dot{X}$ 替换, 这样就可以把微分方程化为对应的相量的复数方程。由复数方程便可求得相量 $\dot{X}$, 并由此求得对应的正弦函数 x 。不必再使用“待定系数法”。

7. 如果线性、时不变电路所有固有频率均位于开左复平面上, 则这个电路就是渐近稳定的。开左半面就是复平面的左半面, 但是虚轴排除在外。换言之, 开左半面包含着具有负实部的所有点。含电阻的电路为渐近稳定电路。在这种电路中固有响应是衰减的, 也不会有 $j\omega$ 等于固有频率 (特征方程根) 的情况发生。

因此, 对于一个由单一 (频率) 的正弦电源激励的任意线性、时不变、渐近稳定电路, 不管初始状态如何, 固有响应将随着 $t \rightarrow \infty$ 而趋于零 (暂态响应), 因而完全响应将随着 $t \rightarrow \infty$ 而变为正弦的。这一正弦响应即为正弦稳态响应。

正弦稳态响应可通过特解求得, 因而, 正弦稳态响应可以用相量法求得。

8. 用相量法求解电路响应的小结:

响应与激励必须是同频率的正弦波, 才能用相量来表示它们。

这就要求电路符合下列三个条件:

- (1) 单一频率的正弦激励;
- (2) 线性、时不变、渐近稳定电路;
- (3) 求稳态响应(针对求过渡状态、响应而言)。

具体加以说明:

(1) 要求激励是单一频率的正弦波,这是很明显的。因为,首先激励要能用相量表示才行,这相量是对应于给定频率的正弦波的。

(2) 要求电路是线性的,因为如果电路是非线性的,激励即便是单一频率的正弦波,响应中也会出现新频率成分的正弦波,无法用相量来表示它们。习题八第 17 题说明非线性电路出现新频率成份(即频率为 150 赫的正弦波)。

要求电路是时不变的,理由相同。习题八第 16 题说明时变电路中会出现新频率成份(即频率为 200 赫及 300 赫的正弦波)。

要求电路是渐近稳定的,这也是为保证响应是同频率的正弦波所需。电路内含(正)电阻元件,固有频率就具有负实部,固有分量才是衰减的,即固有分量为暂态分量,因而电路中才可能存在正弦稳态响应,响应与激励才是同频率的正弦波。习题八第 15 题说明:当固有频率(特征方程的根)为正时,齐次方程解(固有分量)是随 t 增长的,特解(强制分量)即使是同频率的正弦波,电路内也不可能存在正弦稳态响应,亦即电路中不可能出现激励与响应为同频率正弦波的情况。(尽管我们可以用相量法去求特解,但它并不是 $t \rightarrow \infty$ 时的正弦稳态响应,它始终只是响应的一个分量)。

(3) 在满足(1)、(2)两条件后,也只有求解电路的稳态响应时才能用相量法。因为,即使满足(1)、(2),在电路尚未进入稳态时,亦即尚处于过渡过程时,响应也不是正弦的,不能使用。当然求特解这一分量时仍可使用。

练 习 题

8-1. 求图 8-2 所示各波形的周期和频率。

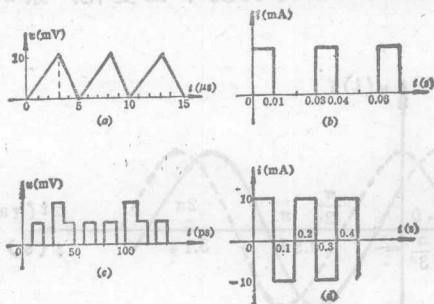


图 8-2 练习题 8-1

解:

$$(1) T = 5\mu\text{s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \times 10^{-6}} = 200\text{kHz}$$

$$(2) T = 0.03\mu\text{s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.03} = 33.3\text{Hz}$$

$$(3) T = 70\text{ps}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{70 \times 10^{-12}} = 14.3\text{GHz}$$

$$(4) T = 0.2\text{s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2} = 5\text{Hz}$$

8-2. 试绘 $u(t) = \cos(2t + 60^\circ) \cdot U(t)$ V 的波形图, 分别用 t 和 ωt 为横坐标。 $U(t)$ 为单位阶跃函数。

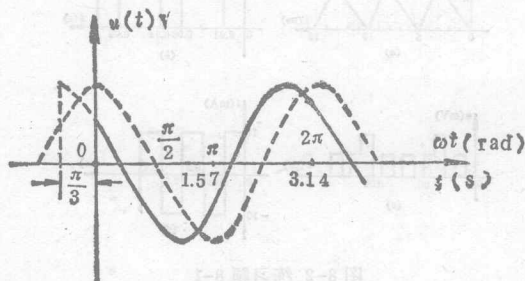
解: (1) 先以 ωt 为横轴画出 $\cos 2t$, 其波形如图练 8-2 虚线所示。又因所给电压波的初相为 60° , 即 $\frac{\pi}{3}$ 。故将 $\cos 2t$ 向左移 $\frac{\pi}{3}$ 。即得 $\cos(2t + 60^\circ)$ 的波形如实线所示。

注意, 因 $u(t)$ 中有 $U(t)$ 阶跃函数, 故波形在 $t \geq 0$ 时存在。当 $t < 0$ 时, $u(t) = 0$ 。

(2) 以 t 为横轴: $\because \omega = 2\pi f$,

$$\text{则 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3.14\text{s},$$

波形与上同, 只是横坐标的长度单位变化: 原 2π 处换为 3.14 即可。



图练习题 8-2

注意当 $t < 0$ 时波形应画成虚线, 因是阶跃响应。

8-3. 图 8-10 所示电压波形, 其最大值为 1V, 试写出时间起

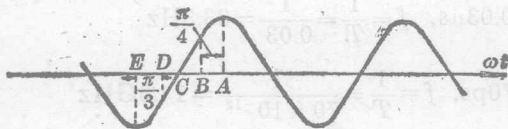


图 8-10 练习题 8-3

点分别定在 A、B、C、D、E 各点时电压 $u(t)$ 的表示式。

解: 时间起始点在 A 时: $u(t) = \cos \omega t \text{ V}$

时间起始点在 B 时: $u(t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$

时间起始点在 C 时: $u(t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$

时间起始点在 D 时: $u(t) = \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \text{ V}$

时间起始点在 E 时: $u(t) = \cos(\omega t - \pi) = -\cos \omega t \text{ V}$

8-4. RL 串联电路 $R=2\Omega$ 、 $L=1H$ ，外施电压 $u_s=10\cos t \cdot U(t)$ 伏，求 $t \geq 0$ 时 $i(t)$ 。已知 $i(0)=0$ 。又电路进入稳态后，电流与外施电压的相位关系如何？

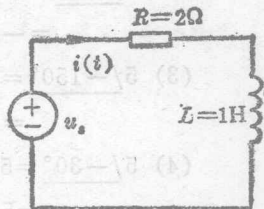
解：电路如图练习题 8-4 所示，则有

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 10\cos t \quad t \geq 0$$

$$i = i_h + i_p$$

$$\text{又 } i_h = ke^{-t/\tau}$$

$$\text{其中 } \tau = L/R = \frac{1}{2}s$$



图练习题 8-4

设 $i_p = \mathcal{I}_m \cos(t + \varphi_i)$ ，将其代入方程式中，则有

$$R\mathcal{I}_m \cos(t + \varphi_i) - L\mathcal{I}_m \sin(t + \varphi_i) = 10\cos t$$

$$[2\cos(t + \varphi_i) - \sin(t + \varphi_i)]\mathcal{I}_m = 10\cos t$$

$$\sqrt{5} \left[\frac{2}{\sqrt{5}} \cos(t + \varphi_i) - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(t + \varphi_i) \right] \mathcal{I}_m = 10\cos t$$

$$\sqrt{5} \mathcal{I}_m \cos(t + \varphi_i + 26.56^\circ) = 10\cos t$$

$$\text{由此可知 } \mathcal{I}_m = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ A}, \quad \varphi_i + 26.56^\circ = 0$$

$$\text{因为 } \varphi_i = -26.56^\circ$$

$$\text{故 } i_p = 2\sqrt{5} \cos(t - 26.56^\circ) \text{ A}$$

$$i(t) = i_h + i_p = 2\sqrt{2} \cos(t - 26.56^\circ) + Ke^{-2t}$$

$$t=0 \text{ 时, } i(0) = 2\sqrt{5} \cos(t - 26.56^\circ) + K = 0$$

$$K = -2\sqrt{5} \cos 26.56^\circ = -4$$

$$\text{所以 } i(t) = 2\sqrt{5} \cos(t - 26.56^\circ) - 4e^{-2t} \text{ A } t \geq 0$$

电路进入稳态后， i 滞后 u_s 26.56° 。

8-5. 把下列复数化为直角坐标形式

$$5/30^\circ, 5/150^\circ, 5/-150^\circ, 5/-30^\circ, 10/240^\circ, 2/90^\circ,$$

$$2/-90^\circ \text{ 及 } 2/180^\circ.$$

解:

$$(1) \ 50/\underline{30^\circ} = 5\cos 30^\circ + j5\sin 30^\circ = 4.33 + j2.5$$

$$(2) \ 5/\underline{150^\circ} = 5\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ = -5\cos 30^\circ + j5\sin 30^\circ \\ = -4.33 + j2.5$$

$$(3) \ 5/\underline{-150^\circ} = 5\cos(-150^\circ) + j5\sin(-150^\circ) \\ = -5\cos 30^\circ - j5\sin 30^\circ = -4.33 - j2.5$$

$$(4) \ 5/\underline{-30^\circ} = 5\cos(-30^\circ) + j5\sin(-30^\circ) \\ = 5\cos 30^\circ - j5\sin 30^\circ = 4.33 - j2.5$$

$$(5) \ 10/\underline{240^\circ} = 10\cos 240^\circ + j10\sin 240^\circ \\ = -10\sin 30^\circ - j10\cos 30^\circ = -5 - j8.66$$

$$(6) \ 2/\underline{90^\circ} = 2\cos 90^\circ + j2\sin 90^\circ = 2j$$

$$(7) \ 2/\underline{-90^\circ} = 2\cos(-90^\circ) + j2\sin(-90^\circ) = -2j$$

$$(8) \ 2/\underline{180^\circ} = 2\cos 180^\circ + j2\sin 180^\circ = -2 + j0 = -2$$

8-6. 把下列复数化为极坐标形式

$$1+j1, \ 1+j10, \ 1-j1, \ -1-j1, \ -1+j1, \ j4, \ -4j,$$

3 及 -3。

解:

$$(1) \ 1+j1 = \sqrt{1+1}/\underline{\arctan 1} = \sqrt{2}/\underline{45^\circ}$$

$$(2) \ 1+j10 = \sqrt{1^2+10^2}/\underline{\arctan 10} = 10.05/\underline{84.3^\circ}$$

$$(3) \ 1-j1 = \sqrt{2}/\underline{-45^\circ}$$

$$(4) \ -1-j = -\sqrt{2}/\underline{45^\circ} = \sqrt{2}/\underline{-135^\circ}$$

$$(5) \ -1+j1 = \sqrt{2}/\underline{\arctan 1/-1} = \sqrt{2}/\underline{135^\circ}$$

$$(6) \ j4 = 4/\underline{90^\circ}$$

$$(7) \ -j4 = 4/\underline{-90^\circ}$$

$$(8) \ 3 = 3/\underline{0^\circ}$$

$$(9) \ -3 = 3/\underline{\pm 180^\circ}$$

8-7. 设 $A=3+j4$, $B=10/\underline{60^\circ}$ 试计算 $A+B$, $A \cdot B$ 及 A/B 。

解: $A = 3 + j4 = 5/\underline{53.1^\circ}$

$$B = 10/\underline{60^\circ} = 10\cos 60^\circ + j10\sin 60^\circ = 5 + j8.66$$

$$A + B = 3 + j4 + 5 + j8.66 = 8 + j12.66$$

$$A \cdot B = 5/\underline{53.1^\circ} \cdot 10/\underline{60^\circ} = 50/\underline{113.1^\circ}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{5/\underline{53.1^\circ}}{10/\underline{60^\circ}} = 0.5/\underline{-6.9^\circ}$$

8-8. 若 K 为复数, 且 $\operatorname{Re} K = 17$ 及 $\operatorname{Re}[(-3 + j6)K] = 4$, 试求 K 。

解: 设 $K = a + jb$, $\because \operatorname{Re} K = 17$. 故 $a = 17$

又 $\because \operatorname{Re}[(-3 + j6)K] = \operatorname{Re}[(-3 + j6)(a + jb)] = 4$

$$-51 - 6b = 4, b = \frac{-55}{6} = -9.17$$

故得

$$K = 17 - j9.17$$

8-9. 求代表下列正弦波的相量, (以 $1/\underline{0^\circ}$ 代表 $\cos \omega t$), 并作相量图。 $5\sin(\omega t + 30^\circ)$; $-8\cos(\omega t - 45^\circ)$; $-6\sin(\omega t - 120^\circ)$ 。

解: $i_1 = 5\sin(\omega t + 30^\circ) = 5\cos(\omega t - 60^\circ)$

$$\dot{I}_1 = 5/\underline{-60^\circ}$$

$$i_2 = -8\cos(\omega t - 45^\circ) = 8\cos(\omega t + 135^\circ)$$

$$\dot{I}_2 = 8/\underline{135^\circ}$$

$$i_3 = -6\sin(\omega t - 120^\circ) = 6\cos(\omega t - 30^\circ)$$

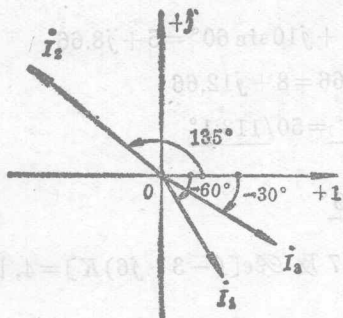
$$\dot{I}_3 = 6/\underline{-30^\circ}$$

其相量如图练8-9所示。

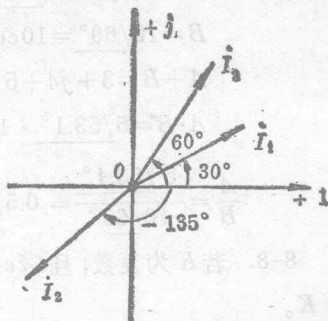
8-10. 重复上题, 但用 $1/\underline{0^\circ}$ 代表 $\sin \omega t$ 。这两题所绘相量图有什么不同?

解:

$$i_1 = 5\sin(\omega t + 30^\circ)$$



图练习题 8-9



图练习题 8-10

$$\dot{I}_1 = 5/\underline{30^\circ}$$

$$\dot{i}_2 = -8\cos(\omega t - 45^\circ) = 8\sin(\omega t + 225^\circ)$$

$$\dot{I}_2 = 8/\underline{225^\circ} \text{ 或 } \dot{I}_2 = 8/\underline{-135^\circ}$$

$$\dot{i}_3 = -6\sin(\omega t - 120^\circ) = 6\sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$\dot{I}_3 = 6/\underline{60^\circ}$$

本题的相量图相当于上题的相量图逆时针旋转 90° 。如图练习题 8-10 所示。

8-11. 试用相量以及本节所述的有关定理，求两个同频率的正弦波 $A_m\cos\omega t$ 及 $B_m\sin\omega t$ 之和。

解：令 $a = A_m\cos\omega t$

$$b = B_m\sin\omega t = B_m\cos(\omega t - 90^\circ)$$

且令

$$c = a + b$$

用相量法求 c 最为方便。

$$\dot{A} = A_m/\underline{0^\circ}, \quad \dot{B} = B_m/\underline{-90^\circ} = -jB_m$$

$$\dot{A} + \dot{B} = A_m - jB_m = \dot{C}$$

$\dot{C}$ 为对应于 c 的相量。

故知
$$\dot{C} = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \angle \arctg \frac{-B_m}{A_m}$$

得
$$C = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos\left(\omega t + \arctan \frac{-B_m}{A_m}\right)$$

或
$$C = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{B_m}{A_m}\right)$$

8-12. 试用本节所述的有关定理说明：若干同频率正弦波之和仍为一同频率的正弦波。

证明：设有 n 个同频率的正弦波。

$$a_1 = A_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) = \mathcal{R}e[\dot{A}_1 e^{j\omega t}]$$

$$a_2 = A_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2) = \mathcal{R}e[\dot{A}_2 e^{j\omega t}]$$

$$a_3 = A_{m3} \cos(\omega t + \varphi_3) = \mathcal{R}e[\dot{A}_3 e^{j\omega t}]$$

$\vdots$

$$a_n = A_{mn} \cos(\omega t + \varphi_n) = \mathcal{R}e[\dot{A}_n e^{j\omega t}]$$

则
$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \mathcal{R}e[\dot{A}_k e^{j\omega t}] = \mathcal{R}e\left[\sum_{k=1}^n \dot{A}_k e^{j\omega t}\right] = \mathcal{R}e[\dot{C} e^{j\omega t}]$$

其中
$$\sum_{k=1}^n \dot{A}_k = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3 + \dot{A}_4 + \dots + \dot{A}_n = \dot{C}$$

即若干个复数和仍为一个复数。故得

$$\sum_{k=1}^n a_k = \mathcal{R}e[\dot{C} e^{j\omega t}] = C_m \cos(\omega t + \varphi)$$

8-13. 接续例 8-11, 试根据已求得的 u_c 稳态响应, 求出 i_L 、 u_L 及 u_R 的稳态响应。

解：在例 8-11 图 8-24 中, 求得

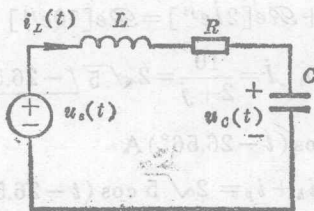


图 8-24

$$u_{cp}(t) = 0.316 \cos(2t - 108.4^\circ)$$

则 $u_{cp}(t) = \operatorname{Re}[0.316 e^{-j108.4^\circ} e^{j2t}]$

$$i_L = i_c = C \frac{du_c}{dt} = C \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[0.316 e^{-j108.4^\circ} e^{j2t}]$$

$$= \operatorname{Re}[0.316 \times j2 \times e^{j2t} \cdot e^{-j108.4^\circ}]$$

$$= \operatorname{Re}[0.632 e^{-j18.4^\circ} e^{j2t}]$$

$$= 0.632 \cos(2t - 18.4^\circ) \text{ A}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{1}{2} \times 0.632 \times 2 \sin(2t - 18.4^\circ)$$

$$= 0.632 \cos(2t + 71.6^\circ) \text{ V}$$

$$u_R = Ri_L = \frac{3}{2} \times 0.632 \cos(2t - 18.4^\circ)$$

$$= 0.948 \cos(2t - 18.4^\circ) \text{ V}$$

其 u_L 与 u_R 均与 $i_L(t)$ 取关联参考方向。

8-14. 用相量法求解练习题 8-4。

解: $Ri + L \frac{di}{dt} = 10 \cos t,$

又

$$i = i_h + i_p$$

其中 $i_h = Ke^{-\frac{t}{\tau}} = Ke^{-2t}$ 令 $i_p = \mathcal{I}_m \cos(t + \varphi_i)$

$i_p = \operatorname{Re}[\dot{I} e^{jt}]$ 将其代入微分方程

$$L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\dot{I} e^{jt}] + R \operatorname{Re}[\dot{I} e^{jt}] = \operatorname{Re}[10 e^{jt}]$$

$$\operatorname{Re}[j \dot{I} e^{jt}] + \operatorname{Re}[2 \dot{I} e^{jt}] = \operatorname{Re}[10 e^{jt}]$$

$$\dot{I}(2 + j) = 10, \quad \dot{I} = \frac{10}{2 + j} = 2\sqrt{5} / -26.56^\circ \text{ A}$$

所以 $i_p = 2\sqrt{5} \cos(t - 26.56^\circ) \text{ A}$

完全响应 $i(t) = i_h + i_p = 2\sqrt{5} \cos(t - 26.56^\circ) + Ke^{-2t}$

由初始条件得

$$i(0) = 2\sqrt{5} \cos(-26.56^\circ) + K = 0, \text{ 则 } K = -4$$

$$\text{所以 } i(t) = 2\sqrt{5} \cos(t - 26.56^\circ) - 4e^{-2t} \text{ A } t \geq 0$$

8-15. RLC 串联电路在 $t=0$ 时与正弦电压 $2\cos 2t$ 接通。已知: $R=5\Omega$ 、 $L=1\text{H}$ 、 $C=1/4\text{F}$; $u_c(0)=1\text{V}$, $i(0)=1\text{A}$ 。试求电流的完全响应。

$$\text{解: } Ri + u_c + L \frac{di}{dt} = 2\cos 2t$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 2\cos 2t$$

$$\frac{5}{4} \frac{du_c}{dt} + u_c + \frac{1}{4} \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 2\cos 2t,$$

$$u_c = u_{ch} + u_{cp},$$

求 u_{ch} : 其特征方程为

$$\frac{1}{4}s^2 + \frac{5}{4}s + 1 = 0, \quad s^2 + 5s + 4 = 0$$

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -4$$

$$\text{则 } u_{ch} = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}.$$

$$\text{求 } u_{cp} \quad \text{设 } u_{cp} = U_{cm} \cos(2t + \varphi_u) = \Re e[\dot{U}_{cm} e^{j2t}]$$

将其代入微分方程式中得

$$10j\dot{U}_{cm} + 4\dot{U}_{cm} + 4j^2\dot{U}_{cm} = 8$$

$$10j\dot{U}_{cm} = 8, \quad \dot{U}_{cm} = \frac{8}{10/90^\circ} = 0.8 \angle -90^\circ$$

$$\text{则 } u_{cp} = 0.8 \cos(2t - 90^\circ) \text{ V}$$

$$\text{完全响应为 } u_c(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t} + 0.8 \cos(2t - 90^\circ)$$

$$\text{由 } u_c(0) = K_1 + K_2 = 1$$

$$\text{又由 } i(0) = C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_0 = 1, \text{ 得 } K_1 + 4K_2 = -2.4$$

$$\text{解得 } K_1 = -1.1, \quad K_2 = 2.1$$

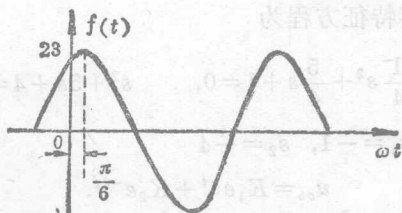
故 $u_c = 2.1e^{-t} - 1.1e^{-4t} + 0.8\cos(2t - 90^\circ) \text{ V} \quad t \geq 0$

$$i_o = C \frac{du_c}{dt} = 1.1e^{-4t} - 0.53e^{-t} + 0.4\cos 2t \text{ A}, \quad t \geq 0$$

习 题 八

- (1) 绘出函数 $f(t) = 23\cos(5000t - 30^\circ)$ 的波形图。
- (2) 问该函数的最大值、角频率、频率、周期各为多少？
- (3) 问该函数分别与下列各函数的相位关系如何？
 $\cos 5000t$; $\sin 5000t$, $\sin(5000t + 60^\circ)$; $\sin(5000t - 60^\circ)$ 。

解：(1) 其波形如图题 8-1 所示，振幅为 23，初相为 $-\frac{\pi}{6}$ 。



图题 8-1

(2) 最大值 = 23，角频率 $\omega = 5000 \text{ rad/s}$

$$\text{频率 } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5000}{2 \times 3.14} = 796 \text{ Hz}$$

$$\text{周期 } T = 1.256 \text{ ms.}$$

(3) $f(t)$ 滞后 $\cos 5000t$ 角 30° ；超前 $\sin 5000t$ 角 60° ；与 $\sin(5000t + 60^\circ)$ 同相，超前 $\sin(5000t - 60^\circ)$ 120° 。

2. 用示波器测得图题 8-2 所示电路的各电压如图中所示。

(1) 试写出 u_{ac} 、 u_{bc} 、 u_{dc} 及 u_{cd} 的表示式。

(2) 如果电流 i 与 u_{1c} 同相，问 i 分别与 u_{ac} 及 u_{bc} 的相位关系如何？