

生物医学

shengwu yixue xinhao chuli

信号处理

饶妮妮 李凌 编著



电子科技大学出版社

<http://www.uestcp.com.cn>

生物医学信号处理

饶妮妮 李 凌 编著

电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据
生物医学信号处理/饶妮妮, 李凌编著. —成都: 电子科技大学出版社, 2005. 7
ISBN 7—81094—883—0

I. 生... II. ①饶... ②李... III. 信号处理—应用
—生物医学工程 IV. R318

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 080768 号

内 容 提 要

本书主要介绍生物医学信号处理中最重要的基础知识、基本处理方法及其在生物医学中的具体应用。为了体现该领域的经典性与现代性、基础性与前沿性、理论性与实践性的统一, 本书在参考了国内外同类书籍的基础上, 对内容进行了合理的取舍和安排, 以方便教学和自学。本书共分为 8 章: 生物医学信号概述、数字信号处理基础、随机信号基础、数字相关和数字卷积、维纳滤波、卡尔曼滤波、随机信号的参数建模法和自适应滤波等。

本书可作为生物医学工程专业和相关专业的本科生及研究生教材, 也可供有关研究人员、技术人员作为研究生物医学信号处理问题的实用参考书。

生物医学信号处理

饶妮妮 李 凌 编著

出 版 电子科技大学出版社 (成都市建设北路二段四号, 邮编: 610054)
责任编辑 朱 丹
发 行 电子科技大学出版社
印 刷 四川省地矿局测绘队印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 9 字数 216 千字
版 次 2005 年 6 月第一版
印 次 2005 年 6 月第一次印刷
书 号 ISBN 7—81094—883—0/R·3
定 价 13.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 邮购本书请与本社发行科联系。电话: (028)83201495 邮编: 610054。
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前 言

用信号处理方法处理生物医学信号的目的是：(1) 去除不需要的信号成分，因为这些信号成分污染了感兴趣的有用信号；(2) 用更明显或更有用的形式表达提取的生物医学信息，以获得有价值的生物医学解释；(3) 预测生物医学信号未来的行为，如早期发现疾病，为疾病的治疗提供契机。因此，生物医学信号处理在生命科学研究、医学诊断、临床治疗等方面起着重要的作用。

作为生物医学工程、生物信息技术和生物信息学等专业的一门重要专业主干课程，“生物医学信号处理”课程是多学科交叉的结晶，是理、工、生、医高度融合的产物，涉及的知识面宽而广。随着信号处理技术和生命科学的发展，生物医学信号处理涵盖的内容越来越多。然而，当前的教学改革使该课程所允许的授课学时越来越少，学生的知识结构也发生了很大变化。本教材正是为了适应这种形势的需要而编写的。

编者在分析了 20 世纪 80 年代末期以来出版或再版的若干英、美和国内同类教材的基础上，结合近年来对该门课程的教学体会以及在该领域的科研实践编写了本教材。在教材的编写过程中，重点考虑了以下问题：

1. 教材适合于生物医学工程、生物信息技术和生物信息学等专业高年级本科学生或研究生，授课课时大约在 40 学时（不包括实验学时）；
2. 教学内容建立在先修课程“生物化学”、“人体解剖生理学”、“信号与系统”和“数字信号处理”的基础之上，但又不与先修课程的内容重复；
3. 教学内容不应该包罗万象，应有所侧重，但又具有连贯性和系统性，易于“生物医学信号处理”课程的教学和学生自学；
4. 通过该课程，为学生架设一座联系信号处理方法与生物医学真实世界的桥梁。

由于信号处理新技术层出不穷，各种生物医学问题千变万化，因此，要想在一门 40 学时的课程中囊括各种信号处理技术或涉及各种生物医学信号问题

是不现实的。在本教材中，许多现代信号处理方法，诸如二维信号处理、多元时间分析、非高斯信号处理、信号的时频分析、小波变换等内容均未编入本教材。编者认为，上述知识可安排在学生的下一阶段（如硕士和博士阶段）学习。本书重在基础，既包含有经典的信号处理技术，又包含有部分现代信号处理技术，通过具体的生物医学应用实例，讲清、讲透方法的基本原理，强调可读性，适合于教学。

本书在编写过程中，得到了电子科技大学各级领导的关心、支持及许多专家的帮助、指正。电子科大生命学院的领导在人力、条件上提供了大量帮助，尧德中教授在本书大纲审定、具体编写上提出了许多宝贵意见，电子科技大学出版社朱丹编辑为保证本书质量付出了辛勤的劳动，在此一并表示衷心的感谢！

本书由饶妮妮和李凌编著。限于作者水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评、指正。

编 者

2005 年 5 月于成都

目 录

第 1 章 生物医学信号概述	1
1.1 学习生物医学信号处理的理由.....	1
1.2 信号及其类型	1
1.3 一些典型的生物医学信号简介.....	3
1.4 处理生物医学信号的目的.....	5
第 2 章 数字信号处理基础	6
2.1 傅里叶变换及其意义	6
2.1.1 傅里叶变换的意义及各种变换对.....	6
2.1.2 离散傅里叶变换	7
2.2 傅里叶变换的性质	9
2.3 频域分析和谱图表示	14
2.4 频域分辨率	18
2.5 数字滤波器的设计和实现.....	22
习题	25
第 3 章 随机信号基础	26
3.1 随机信号	26
3.2 随机信号的统计特征描述.....	27
3.2.1 概率分布函数	28
3.2.2 各态遍历随机过程.....	29
3.2.3 统计特征量	29
3.2.4 样本数字特征	31
3.3 几种典型的随机过程	33
3.4 随机信号通过线性系统	35

习题	38
第 4 章 数字相关和数字卷积	39
4.1 线性相关	39
4.2 循环相关	42
4.3 相干函数	45
4.4 线性卷积	51
4.5 循环卷积	55
4.6 相关函数和功率谱的估计.....	59
4.7 相关技术的应用	62
习题	68
第 5 章 维纳滤波	69
5.1 维纳滤波器的时域解	70
5.1.1 因果的维纳滤波器.....	70
5.1.2 有限脉冲响应法求解维纳-霍夫方程.....	71
5.1.3 预白化法求解维纳-霍夫方程.....	73
5.2 维纳预测器	77
5.2.1 因果的维纳预测器.....	77
5.2.2 纯预测器	79
5.2.3 一步线性预测器	80
5.3 维纳滤波器的应用	81
习题	85
第 6 章 卡尔曼滤波	87
6.1 信号模型	87
6.1.1 状态方程和量测方程.....	87
6.1.2 信号模型	88
6.2 卡尔曼滤波方法	89
6.2.1 卡尔曼滤波的一步递推法模型.....	89

6.2.2 卡尔曼滤波的递推公式.....	90
6.3 卡尔曼滤波器的应用	92
习题	95
第 7 章 随机信号的参数建模法	96
7.1 3 种参数模型	96
7.1.1 MA 模型	96
7.1.2 AR 模型	97
7.1.3 ARMA 模型	97
7.2 AR 模型参数的估计	97
7.3 参数建模法的应用	107
习题	112
第 8 章 自适应滤波	113
8.1 LMS 自适应维纳滤波器	113
8.1.1 基本 LMS 算法	113
8.1.2 基本 LMS 算法的性能.....	117
8.2 自适应噪声抵消器	119
8.2.1 自适应噪声抵消原理.....	119
8.2.2 基于最小均方误差准则 (LMS) 的自适应噪声抵消.....	121
8.2.3 基于 RLS (递推最小二乘) 算法的自适应噪声抵消	123
8.3 生物医学应用	125
8.3.1 自适应噪声抵消法增强心电图 (ECG) 监护.....	125
8.3.2 自适应噪声抵消方法增强胎儿 ECG 心电监护.....	128
8.3.3 自适应噪声抵消在增强胃电测量中的应用.....	129
习题	132
参考文献	134

第 1 章 生物医学信号概述

1.1 学习生物医学信号处理的理由

生物医学工程是一个应用性的研究领域，生物医学信号处理自然应该成为该专业的主干课程之一，本课程使学生掌握处理信号和系统的方法。

信号处理的含义比纯粹的数学运算更深、更广。生物医学信号处理以严谨的组织行为方式为分析和概念化物理行为提供了一个基础框架，而不管这种行为是一个电子控制系统的输出还是一次种植与周围组织的反应。

对信号/系统进行计算能够获得较精确的分析结果，但对分析过程的理解（定性的）也十分重要。例如，若想用小波来检测心电图信号中的异常，则必须理解小波变换的数学概念；若希望研究全身振动对视觉功能的影响，则需要理解共振的概念。类似地，要研究心率的神经中枢控制，不管用哪种方法来描述心率，都需要理解与记忆相关的概念以及在能量记录中瞬时变化的原因。简言之，要想成为一名生物医学工程师，就应该掌握信号处理的定性描述并具备应用定量分析方法解决生物医学问题的技能。通过学习“生物医学信号处理”课程，学生可以达到上述要求。

更具体地说，“生物医学信号处理”课程将教给学生两种主要技能：（1）为了提取原始的生物医学信息，获取和处理生物医学信号的技能；（2）解释处理结果性质的技能。为此，该课程应该包含以下 4 个重要内容：

- （1）测量生物医学信号，即量化和校正测量仪器对待测信号的影响。
- （2）操作（即滤波）生物医学信号，即识别和分离信号中的有用成分和无用成分。
- （3）定量描述生物医学信号，即揭示产生生物医学信号的本质，根据第（2）步得出的结果预测信号未来的行为。
- （4）探测生物医学信号源，即描述一个生物医学物理系统的输入与输出信号之间的内在联系。

大多数有关信号处理的教材都很强调计算和算法。对于生物医学工程专业的学生来说，如果在生物医学信号处理课程中仍大量强调信号处理的内容，则可能是熟悉知识的枯燥重复。本教材的宗旨是通过许多具体生物医学信号处理实例，将真实世界与理论研究联系起来，并指导学生如何应用一项信号处理理论去解决一个具体的生物医学问题。

1.2 信号及其类型

信息是一个过程产生的能量的测量，而信号则是信息的一种表达形式。来自于真实世界的信号各不相同，但大致可分为 4 种类型：（1）确定性信号；（2）随机信号；（3）分形

信号；(4) 混沌信号，图 1-1 (a)、(b)、(c) 和 (d) 分别是这 4 种类型信号的一个例子。

确定性信号在教材中常作为例子给出，是学生最熟悉的一类信号，但这类信号在真实世界中则较少出现。所谓确定性信号是指在已知足够过去值的条件下，能够准确预测该信号未来值的一类信号。例如，正弦波信号 $A\sin\omega t$ 。换句话说，只要能够用数学封闭表达式来表达的一类信号就是确定的信号。

即使信号的全部过去值已知，也不能准确预测其未来值的一类信号称为随机信号。

随机信号在真实世界中大量存在。严格地说，实际的物理信号总具有某些随机因素。例如，测量仪器中电流产生的噪声就是一类常见的随机信号，大多数生物医学信号包含有随机成分。反过来说，目前认为是随机性的事物，往往只是由于在现阶段还没有掌握影响该事物的诸因素所遵循的规律，这种情况在生物医学系统的测量中尤为突出。因为大多数生物医学系统都很复杂，不可能完全辨别出影响一次测量的所有因素，未认识清楚的因素自然被归入“噪声”，即信号中的随机行为。随机信号中也包含一些有规律的因素，这种规律性是从大量样本统计分析后呈现出来的。本书第 3 章将对随机信号作较详细的定量分析和描述，这里不再赘述。

生物医学系统中存在分形信号在过去十多年里已经取得了广泛共识。分形信号具有十分有趣的特性，即它们在各种放大倍数下看上去都很类似，这种特性称为尺度不变性。如果我们根据如图 1-1 (c) 所示的图形构建一个新信号，且新信号在每一个时间点上的信号值由原信号中连续 4 个时间点上的信号值平均所得，以头 4 个时间点作为计算起点，以此类推，则所得新信号的时间分辨率是原信号的四分之一。仅仅采用常规的测量工具是不能区别新信号和原信号的，如图 1-2 所示。图 1-2 表明，两种信号在视觉上不同，但实质上却很类似。心率信号是分形信号的一个例子。随机信号是否具有这种特性呢？回答是否定的，分形信号与随机信号的尺度特性在量上存在很大差别。随着科学技术的发展，我们相信将有更多的分形生物医学信号被发现。此外，分形的概念也能够应用于空间变量中，例如，血管或航路的分支等。目前，直接证明一个信号是否具有分形特性还存在困难，只有一些技术可确定分形信号的尺度不变性指标。

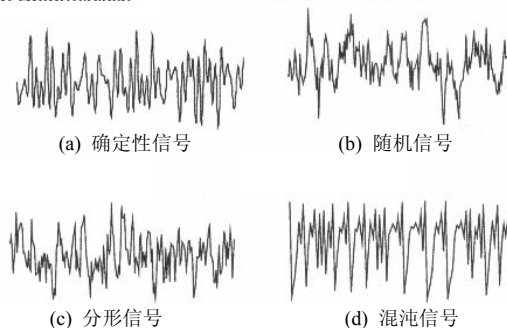


图 1-1 4 种信号类型的例子



图 1-2

混沌信号是一类不能准确预测其未来的确定性信号。混沌信号定义上的矛盾可用其初

值敏感性来解释。对于一些确定性的信号，它们在未来的轨迹对其过去值很敏感，因此，无法用足够的精度来预测未来值。理论上这些信号是确定的，但对未来值的预测误差很大。混沌信号在视觉上具有随机信号的一些特征，但是随机信号不是混沌的，混沌信号也不是随机的。与分形信号类似，学者们认识到生物医学系统能够产生混沌行为也只是近十来年的事情。因此，现在要证明一个信号是混沌的仍然存在困难，其中一项困难是随机成分普遍存在，这严重地破坏了对混沌信号的分析。另一项困难是一个过程在某些情形下表现出混沌行为，而在其他情形下又不是混沌的。发展新方法来证明一个信号的混沌性是一项有价值的研究课题。已有大量事实表明，生物化学的调控过程展现为混沌行为；脑电活动和呼吸也具有混沌特征；从多细胞振荡器到单个神经元等神经生理系统也已经报道展现出了混沌现象。

1.3 一些典型的生物医学信号简介

生物系统根据生理功能归纳成几个基本系统——循环系统、神经系统、呼吸系统和消化系统等。每一个基本系统实际上又是一些复杂的生物物理和生物化学过程的综合表现。而且，这些基本系统还互相交织、渗透和影响着。因此，生物医学信号是一种相当复杂的信号。

从生物的细胞到器官组织都可以成为生物信号源。就人体而言，其生物医学信号大致有两类：(1) 由生理过程自发产生的主动信号，例如心电(ECG)、脑电(EEG)、肌电(EMG)、眼电(EOG)、胃电(EGG)等电生理信号和体温、血压、脉搏、呼吸等非电生理信号。它们是对人体进行诊断、监护和治疗的重要依据。(2) 外界施加于人体、把人体作为通道、用以进行探查的被动信号，如超声波、同位素、X射线等。关于生理、病理状况的信息将通过被动信号的某些参数来携带。从整个生物体来看，生物医学信号的种类各式各样，但根据其特征可归入上一节介绍过的4种信号类型中。

ECG 记录了胸部电极上的电位（或两个电极之间的电位差），反映了心肌中的时变电活动，而这些电活动与动作电位的产生和传播相关。每一次心跳产生一个电波（P、Q、R、S 和 T 波）序列，如图 1-3 所示。通过检测 ECG 波形的形状，医生能够发现心脏的收缩是否正常。观察 ECG 信号尽管在临床上很有用，但对心电图进行分析和处理以获得有用的病理信息更为重要。例如，在心室收缩恢复期间，探测大峰（R 波）后 ECG 波形在形状上的细微变化曾经是一个热点研究课题，一些谱分析方法被用来分析 ECG 信号。另一个与临床相关的问题是心跳属于规则还是不规则，不管你是否相信，太规则的心跳反而被认为是不健康的。通过对 ECG 进行信号处理，可以发现心跳不规则的类型和程度。

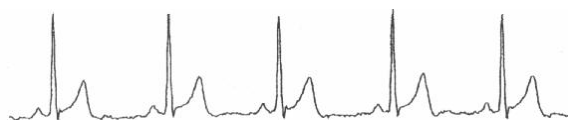


图 1-3 ECG 信号

生物电信号的另一个例子是肌电（EMG）。把电极放在肌肉内、肌肉上或肌肉附近并放大两个电极之间的电位差可记录 EMG 信号。电位差引起沿肌肉纤维的动作电位的产生和传播。多单元 EMG（Multiple-Unit EMG, MUEMG）记录了来自多块肌肉纤维的电位信号，如图 1-4 所示。

此外，生物电信号还包括眼电（EOG）、胃电（EGG）和脑电（EEG），受限于篇幅，这里不再一一列举。



图 1-4 EMG 信号

当一束超声照射一个动目标时，反射波束的频率不同于入射波束的频率，即存在多普勒频移。该频移正比于目标的速度。高频超声信号能够穿透硬生物组织（如较薄的骨头），超声的这种特性为不可触及或不可进入的生物组织（如血细胞）提供了一种测速工具。尽管这种测量不是血流的直接估计，但它能用于人类识别大脑中的血管。如图 1-5 所示是血细胞信号。

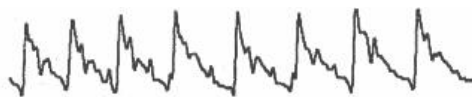


图 1-5 血细胞信号

图 1-6 是 100 次连续心跳的瞬时心率信号（跳/分），未标注的独立变量是“心跳数”，属于离散时间信号。

本节只给出了少量生物医学信号的例子，更多的信号将在后面章节中陆续介绍。在第 1 章中给出生物医学信号例子的目的是要说明生物医学工程问题的复杂性；另一个目的是要说明信号处理是生物医学工程活动中的一个重要环节，而不管所解决的问题是全身性的、器官系统的、组织细胞的还是分子水平的。表 1-1 是常用生理信号的频宽、幅值范围及量化位数。



图 1-6 心率信号

表 1-1 常用生理信号的频宽、幅值范围及量化位数

信 号	频宽 (Hz)	幅值范围	量化 (位数)
脑电图 (EEG)	0.5~50	60 μ V	4~6
眼电图 (EOG)	0.2~15	10mV	4~6
心电图 (ECG)	0.15~150	10mV	10~12
肌电图 (EMG)	20~8000	10mV	4~8
血压	0~60	400mmHg	8~10
呼吸描记图	0~40	10L	8~10
心音图	5~2000	80dB	8~10

1.4 处理生物医学信号的目的

信号处理定义为对一个信号的操作，并达到以下目的：

- (1) 从信号中提取信息；
- (2) 提取有关两个信号（或更多）关系的信息；
- (3) 构建信号的表达式。

最常用的操作过程是由数学方程确定的，定量的分析或“模糊”规则也是常用的方法。

处理信号的动机可归纳如下：

- (1) 去除不需要的信号成分，因为它们污染了感兴趣的信号；
- (2) 用更明显或更有用的形式表达提取的信息；
- (3) 为了预测信号源的行为和信号的未来值。

很清楚，第一个动机可通过滤波处理来完成，以后各章几乎都涉及从信号中去除噪声的问题。问题的关键在于必须决定什么是有用信号和什么是噪声。

用信号处理来提取信息的思路在生物医学应用中很普遍。处理的目的是要区分正常信号与异常信号，在此基础上诊断疾病的存在。这种处理过程就像医生用听诊器来检查异常心声或肺声一样。生物医学工程师常将信号分解为基本信号类型的和，以检查异常信号并发现疾病。这些方法中有许多需要利用傅里叶变换中的特性，例如，心脏阻塞以及几秒至几十秒的血压振荡等几种疾病的表达就是如此。另一方面，我们也会发现许多生物医学信号并不服从上述傅里叶变换的基本特性（从实际的角度，不是从数学的角度）：即信号不能够表达为正弦和。因此，我们需要发展新的方法，将信号分解为基本的信号类型，以更好地代表生物医学信号的属性。

在两种情况下通常需要预测信号的未来值：第一，控制行为的时候。例如，通过周期性注射胰岛素来控制血液葡萄糖的含量。由于任何控制行动都需要一定时间之后才能知道效果，所以如果我们能在短时间内预测到控制行动将产生的效果，则对病人十分有用。本教材不涉及有关控制理论的介绍，但将介绍如何通过信号处理来预测信号未来的行为。第二，一种疾病发作的早期检测。早期发现疾病有利于该疾病的治疗，所以需要进行早期检测。现有方法主要是预测未来的正常行为，即便是正常情况的微小偏离也将有助于疾病的识别。这个问题一直是生物医学领域的热点研究，不断有新方法被提出。

因此，对生物医学信号进行处理是生物医学工程领域的一个必不可少的重要环节。

第 2 章 数字信号处理基础

对采集到的信号进行处理，除了传统的时域分析之外，各种各样的变换发挥了重要作用，包括从最熟悉的傅里叶（Fourier）变换到现在的小波（Wavelet）变换以及主成分分析（Principal Component Analysis）、独立成分分析（Independent Component Analysis）和稀疏成分分析（Sparse Component Analysis）。每一种变换都有其独特的视野，为信号的分析处理提供了不同的思路。这里我们将介绍最基本的一种变换，即在线性时不变系统（LTI, Linear Time Invariance）中广泛使用的傅里叶变换以及频谱分析，本章还是以离散数据为主，介绍离散傅里叶变换（DFT）的有关知识。

2.1 傅里叶变换及其意义

傅里叶分析方法的建立有过一段漫长的历史，涉及到很多人的工作和不同物理现象的研究。在近代欧拉、伯努利、傅里叶、狄里赫利等学者的努力完善下，建立了傅里叶分析方法，他们的研究主要是集中在连续时间信号的分析问题上。与此同时，对于离散时间信号的傅里叶分析方法却有着不同的发展过程，用于处理离散数据以产生数值近似的有关内插、积分和微分等方面的公式早在 17 世纪的牛顿时代就被研究过，从事时间序列的研究曾吸引了 18、19 世纪包括高斯在内的许多著名科学家，从而为离散傅里叶变换提供了数学基础。

在 20 世纪 60 年代中期，库利（Cooley）和图基（Tukey）各自独立发表了一篇文章，也就是快速傅里叶变换算法（FFT）。FFT 是非常高效的算法，使得计算变换所需要的时间减少了几个数量级。由于计算机速度的迅速提高，越来越多的连续时间信号被离散化，然后用计算机进行处理。

2.1.1 傅里叶变换的意义及各种变换对

利用“三角函数和”的概念来描述周期性过程至少可以追溯到古代巴比伦人时代，三角函数和也即是成谐波关系的正弦和余弦或周期复指数函数的和。这些成谐波关系的复指数函数在 LTI 系统分析中变得十分有用：如果一个 LTI 系统的输入可以表示为周期复指数的线性组合，则输出也一定能表示成这种形式，并且输出线性组合中的加权系数与输入中对应的系数有关，如图 2-1 所示， $x(n)$ 表示输入或者激励， $y(n)$ 表示系统输出或者响应， $H(e^{j\omega})$ 表示系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的频率响应。

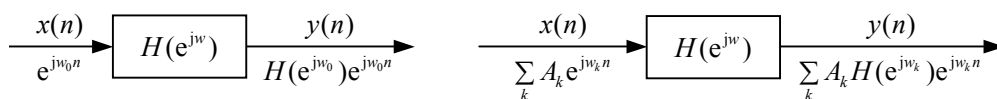


图 2-1 成谐波关系的复指数信号的响应

在研究 LTI 系统时，复指数信号的重要性就体现在图 2-1 中：一个 LTI 系统对复指数信号的响应也同样是一个复指数信号，不同的只是乘了一个复振幅因子 $H(e^{j\omega_k})$ ，频率并没有发生变化，由于是复数因子，就有了幅度和相位或者实部和虚部的变化。

表 2-1 简要地综合了连续和离散时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换表达式，有时为了统一，也把周期信号的傅里叶级数表示利用单位脉冲序列或单位冲激函数表示成傅里叶变换。

表 2-1 各种信号的傅里叶级数和傅里叶变换对

	傅里叶级数	傅里叶变换
时域 $\updownarrow$ 频域	$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$ 时域是连续周期的	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 时域是连续非周期的
	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0} \tilde{x}(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$ 频域是离散非周期的	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ 频域是连续非周期的
时域 $\updownarrow$ 频域	$\tilde{x}(n) = \sum_{k=(N)} \tilde{a}_k e^{jk(2\pi/N)n}$ 时域是离散周期的	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ 时域是离散非周期的
	$\tilde{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} \tilde{x}(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$ 频域是离散周期的	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ 频域是连续周期的

从表 2-1 可以发现傅里叶变换在 LTI 系统分析中的思想，就是把一个无论多复杂的输入信号分解成复指数信号的线性组合，那么系统的输出也能通过如图 2-1 所示的关系表达成相同复指数信号的线性组合，并且在输出中的每一个频率的复指数函数上乘以系统在那个频率的频率响应值。系数 $\{a_k\}$ 称为信号 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数系数或频谱系数或线谱等； $X(j\omega)$ 称为 $x(t)$ 的频谱； $X(e^{j\omega})$ 也称为 $x(n)$ 的频谱。作为线性组合所取的形式从求和过渡到积分，就是利用傅里叶的思想，一个非周期信号可以看成是周期无限长的周期信号，当周期增加时，基频 ω_0 越小，成谐波关系的各分量在频率上越来越近，当周期变得无穷大时，离散的线谱就形成了一个连续谱，也就从求和变成了积分。

从表 2-1 中时域和频域的关系还能得到如下规律：时域的离散必然导致频域的周期化；频域的离散必然导致时域的周期化。简单地说，就是一个域离散必然另外一个域是周期的；相反，如果一个域连续必然另外一个域是非周期的。掌握了这个规律，我们很快就能判断出一个信号在频域的表现形式。

2.1.2 离散傅里叶变换

表 2-1 中给的 4 对傅里叶级数和傅里叶变换对在理论上有重要的意义，但在实际中往往难以实现，尤其在数字计算机上实现是不太现实的，例如计算机无法处理连续的、周期的信号。因此我们需要的是一种在时域和频域都离散、非周期的一对傅里叶变换对，这就

是离散傅里叶变换，简称（DFT）。离散傅里叶变换的导出有多种方法，比较方便同时物理意义也比较清晰的是从离散时间傅里叶变换（DTFT）和从离散傅里叶级数（DFS）入手。

DTFT 变换为： $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$ ，时域是离散、非周期的，但频域是连续、周期的，对连续变量 w 均匀采样，也就是对单位圆进行 N 等分，取一个周期的结果即得：

$$X(e^{jw}) \Big|_{w=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (0 \leq k \leq N-1), \text{ 这样频谱变量由连续量 } w \text{ 变成了离散变量。}$$

从 DFS 到 DFT 更加明显，DFS 对应的时域和频域都是离散周期信号，可以在这两个域中分别取它们的主值，也就是限定在一个周期内，这样就得到了 DFT 变换对。具体给出如下：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2-1)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2-2)$$

式（2-1）称为正变换，式（2-2）称为反变换。注意：这一对变换对中信号 $x(n)$ 的长度为 N ，它的频谱 $X(k)$ 点长也为 N ，则 $x(n)$ 和 $X(k)$ 具有唯一的映射对应关系。也有可能给一个 7 点的时间序列，求该信号的 4 点 DFT 或者 10 点 DFT，明显前者求得的频谱不能真实反映出信号，而后者不存在混叠现象，能反映出信号的频谱。因此在求 DFT 时要注意到底是求多少点长的 DFT，只有时域样点数小于或等于频域样点数，频谱才是真实的反映。

【例 2-1】试计算常用信号 $R_N(n)$ 和 $\cos(\frac{4\pi}{N}n)R_N(n)$ 的 N 点 DFT。

解： $R_N(n)$ 表示一个矩形窗，在滤波器设计中经常使用，我们在对一段未知信号进行分析时的截取实际上就相当于乘了一个矩形窗，在实际分析信号时要注意矩形窗对信号频谱的影响。

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} N, & k=0 \\ \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = 0, & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases} = N\delta(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\frac{4\pi}{N}n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k-2)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2+k)}$$

与 $X_1(k)$ 的求法类似，可得：

$$X_2(k) = \frac{N}{2} \delta(k-2) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2+k-N)} = \frac{N}{2} [\delta(k-2) + \delta(k-(N-2))], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

为了表示方便，一般用符号 W_N 来表示正交序列集中的基 $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ，即 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。因此，离散傅里叶变换对也可表示为：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2-3)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2-4)$$

W_N 具有下列性质：

周期性： $W_N^n = W_N^{n+rN}$

共轭对称性: $W_N^n = (W_N^{-n})^*$

可约性: $W_N^m = W_{N/r}^n$ 或 $W_{rN}^m = W_N^n$

以上性质很容易证明, 它们是计算傅里叶变换中非常有用的特性。

2.2 傅里叶变换的性质

离散傅里叶变换是有限长序列的 Z 变换在单位圆上抽样的结果, 因而很多性质和序列傅里叶变换性质类似, 但由于 DFT 还可以从离散傅里叶级数引入, 因而隐含了周期性, 所以又有些不同。

设序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是 N 点长, 它们对应的 N 点 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$, 下面来讨论傅里叶变换的一些性质。

1. 线性

$$\text{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2-5)$$

式中, a 、 b 为任意常数。如果两个序列的长度不同, 则短的序列补零使得两个序列长度相同即可。

2. 时间翻转特性

$$\text{DFT}[x(N-n)] = X(N-k) \quad (2-6)$$

$$\text{证明: } \text{DFT}[x(N-n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)W_N^{nk} = \sum_{m=1}^N x(m)W_N^{(N-m)k} = \sum_{m=1}^N x(m)W_N^{m(N-k)}$$

这里需要补充 $x(N) = x(0)$, 因而有 $\text{DFT}[x(N-n)] = X(N-k)$ 。

3. 序列的循环移位

这里简单给出序列的循环移位的定义:

$$f(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (2-7)$$

上式表示的含义为: 先将序列 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期性延拓, 得到 $\tilde{x}(n)$, 然后再进行移位, 得到 $\tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$, 最后取主值序列, 得到的 $f(n)$ 仍然是一个 N 点长的序列。循环移位后的 DFT 为:

$$\begin{aligned} F(k) &= \text{DFT}[f(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{nk} R_N(n) \\ &= R_N(k) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} = R_N(k) \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] \\ &= R_N(k) W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

因此, 序列循环移位后的 DFT 为:

$$F(k) = W_N^{-mk} X(k) \quad (2-8)$$

即序列的循环移位相当于频域的相移。根据时域和频域的对偶性质, 则频域的循环移位对应时域的调制:

$$W_N^{mn} x(n) = \text{IDFT}[X((k+m))_N R_N(k)] \quad (2-9)$$

4. 循环卷积

第 4 章将介绍循环卷积的计算, 这里考虑时域循环卷积结果和频域的关系。设: