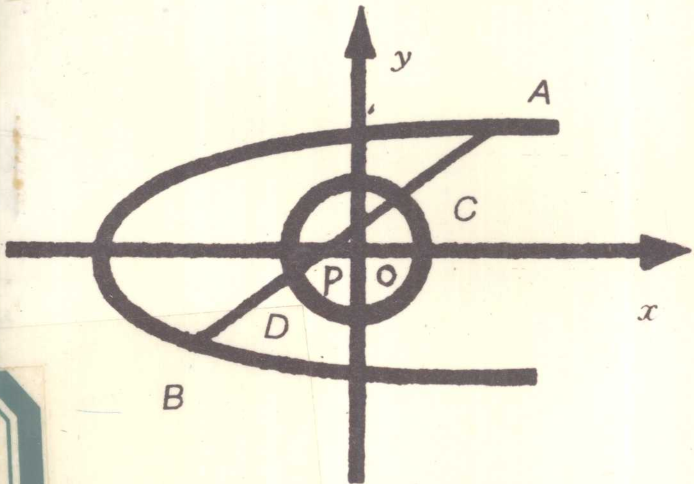
高中几何例题

精讲与解法

北京师大二附中数学教研组编

主　编　古永喜

副主编　张自文　张鸿菊



北京教育出版社

高中几何例题精讲与解法

北京师大二附中数学教研组　编

主　编　古永喜

副主编　张自文　张鸿菊

北京教育出版社

高中几何例题精讲与解法

GAOZHONG JIHE LITI JINGJIANG YU JIEFA

北京师大二附中数学教研组　编

主　编　古永喜

副主编　张自文　张鸿菊

北京教育出版社出版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京朝阳展望印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　9.5印张　180 000字

1994年3月第1版　　1998年1月第2次印刷

印数 6 001—11 000

ISBN 7－5303－0519－0

G·493　定价：8.20元

前　言

《高中几何例题精讲与解法》一书，是我组全体高中教师集体智慧的结晶，是为帮助高中学生学好数学知识、提高分析和解决问题的能力，特别是为希望在高考中取得较好数学成绩的同学而编写的.

高中数学知识庞杂，数学题浩如烟海且高考要求又比教科书所能达到的要求高出一层，故高中学生迫切需要一本好的课外学习读物，特别是既能覆盖高考所需要的各知识点，又能在重点处有所突出且选材少而精的参考书.

这本书是在我组教师多年教学和在指导高考复习的经验基础之上，精选了高中数学几何部分的典型例题，给出精炼的解答. 对解题思路中的一些疑难之处，用"分析"或"说明"的形式加以引导，以求举一反三，触类旁通.

本书按高考复习的需要分章编排. 每章题目分"基本题型"和"综合题型"两部分."基本题型"是用本章知识来解的一些题型，用以帮助同学熟练地应用基础知识和基本技能."综合题型"主要是以本章知识为主，结合其他部分知识来解的综合题，用以提高综合运用数学知识解决问题的能力. 大部分章末附有一自测题，供同学们了解自己的学习水平。书后有自测题答案，供学习参考.

我们特别邀请了北京市特级教师、我校副校长陈俊辉老师参加了本书的编写工作.

参加本书编写工作的老师有：古永喜、张自文、张鸿菊、马兰.

书中不足之处，欢迎读者批评、指正.

北京师大二附中数学教研组

1993.6.

目　　录

第一章　直线和平面

本章的主要内容是有关空间的直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系．所选的例题着重研究的是它们之间的平行与垂直关系有关的题．

四个公理是这一章内容的基础．此外，平面几何里的定义、定理等，对于空间的任何平面内的平面图形仍然适用；但对于非平面图形，则需要经过证明才能应用．在解决立体几何的问题时，常把它转化为平面几何的问题来解决．

空间两条直线的位置关系有“平行”、“相交”、“异面”三种；空间一条直线和一个平面的位置关系有“直线在平面内”、“平行”、“相交”三种；两个平面的位置关系有“平行”、“相交”两种．

在应用空间的直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行与垂直关系的性质定理与判定定理时，一定要弄清定理的题设和结论．另外还要注意性质定理与判定定理有时可以互相转化的，例如可以用“垂直于同一个平面的两条直线必平行”这个性质定理去判定两条直线平行；用“如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面”这个性质定理去判定一条直线与一个平面垂直．

两条异面直线所成的角、直线与平面所成的角以及二面角的平面角都是通过平面几何中的角来定义的，因而，它们都可以看作是平面几何中的角的概念在空间的拓广．更重要

的是在解有关空间角的题时一定要以概念为指导作出有关的角. 另外还要了解这三个空间角在一定的条件下是可以互相转化的.

两条异面直线的距离、平行的直线和平面的距离以及两个平行平面的距离，都分别是它们的两点的距离中最小的. 而且也是相互联系在一定条件下可以互相转化的.

一 基本题型

例1 已知：直线a、b、c、d不共点，并且两两相交.

求证 直线a、b、c、d在同一个平面内.

证明 当a、b、c、d中没有三线共点的情况，如图1-1.

设$a\cap b=P$，过a、b确定平面α.

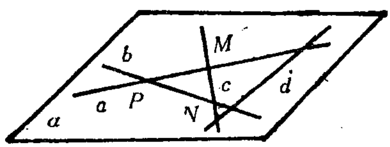


图 1-1

$\because$ $c\cap a=M$，

$\therefore$ $M\in c$，$M\in a$，$M\in\alpha$.

$\because$ $c\cap b=N$，

$\therefore$ $N\in c$，$N\in b$，$N\in\alpha$

$\therefore$ $c\subset\alpha$，同理$d\subset\alpha$，

$\therefore$ a、b、c、d共面.

当a、b、c、d中有三直线共点，如图1-2.

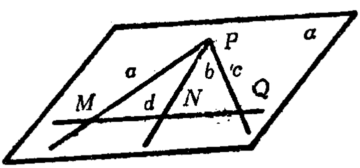


图 1-2

设a、b、c交于P，d和a、b、c 的交点为M、N、Q.

过P 点和直线d可以确定平面α

$\because\ M\in d$，$\therefore\ M\in\alpha$，

又$\because\ P\in\alpha$，$\therefore\ MP\subset\alpha$，

即$a\subset\alpha$，同理$b\subset\alpha$，$c\subset\alpha$.

$\therefore$ a、b、c、d共面.

说明 (1) 例1可推广为：如果n条直线两两相交，但不通过同一点，则这n条直线共面.

(2) 如果四条直线两两相交，但不共面. 则这四条直线必交于一点. 用反证法，由例1即可证明.

例2 如图1-3，已知$a\parallel b\parallel c$，$a\cap l=M$，$b\cap l=N$，$c\cap l=P$. 求证a、b、c、l共面.

证明 $\because$ $a\parallel b$，$\therefore$

过a、b确定平面α，

$\because$ $M\in a$，

$\therefore$ $M\in\alpha$，

$\because$ $N\in b$，$\therefore$ $N\in\alpha$

$\therefore$ $MN\subset\alpha$，即$l\subset\alpha$.

$\therefore$ a、b、l共面.

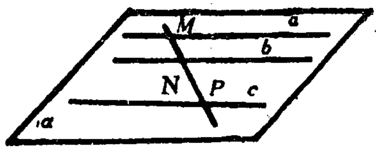


图 1-3

同理可证a、c、l共面.

但由相交直线a和l只能确定一个平面，所以a、b、c、l共面.

说明 (1) 例2可推广为：$a_1\parallel a_2\parallel a_3\cdots\parallel a_n$，直线$l$与这$n$条平行直线都相交，则这$n+1$条直线共面；

(2) 如果a、b是异面直线，过直线a上的点A_1、A_2、…A_n作$b_1\parallel b$，$b_2\parallel b\cdots b_n\parallel b$. 则$b_1$、$b_2$、…$b_n$必共面；

(3) 由(2)可知过直线a而与直线b平行的平面有而且只有一个.

例3 如图1-4，已知空间四边形$ABCD$，$AE=EB$，AF

$=FD.\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DH}{HC}=\dfrac{1}{2}$.

求证：(1) GE、HF延长线必相交；

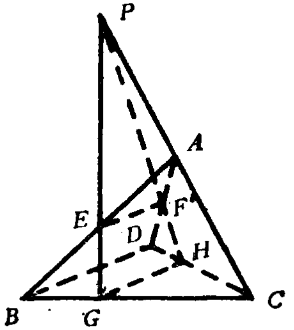


图 1-4

(2) GE、HF的交点P必在直线AC上.

证明 (1) $\because$ $AE=EB$, $AF=FD$

$\therefore$ $EF \perp\!\!\!\!= \dfrac{1}{2}BD$,

又$\because$ $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DH}{HC}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ $GH \perp\!\!\!\!= \dfrac{2}{3}BD$,

$\therefore$ $EF \parallel GH$, $EF<GH$

$\therefore$ $EFHG$为梯形，而GE、HF为梯形的两腰，所以GE、HF延长后必相交. 设交点为P.

(2) $\because$ $GE\cap HF=P$

$\therefore$ $P\in GE$, $GE\subset$平面ABC,

$\therefore$ $P\in$平面ABC.

又$\because$ $P\in HF$, $FH\subset$平面ADC,

$\therefore$ $P\in$平面ADC.

又$\because$ 平面$ABC\cap$平面$ADC=AC$,

$\therefore$ $P\in AC$(公理2)

说明 (1) 在立体几何中证三线共点(GE、HF、CA)，或证三点共线(C、A、P)，常用公理2.

(2) 已知$\triangle ABC$在平面α外，它的三边所在的直线分别与α交于P、Q、R，求证：P、Q、R必在一条直线上，也是

用公理 2 来证.

例4 已知：空间四边形 $ABCD$，E、F、G、H分别是 AB、BC、CD、DA的中点. 求证：(1) 四边形$EFGH$为平行四边形；

(2) 若$AC=BD$时，则$EFGH$为菱形；

(3) 若$AC\perp BD$时，则$EFGH$为矩形；

(4) 若$AC=BD$，且$AC\perp BD$时，则$EFGH$为正方形；

(5) 如AC与BD所成的角为$60°$，$AC=m$，$BD=n$. 求$\square EFGH$的面积.

证明 (1) 如图1-5，在$\triangle ABD$中，$EH \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}BD$，

在$\triangle CBD$中，$FG \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}BD$，

∴ $EH \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} FG$

∴ 四边形$EFGH$为平行四边形.

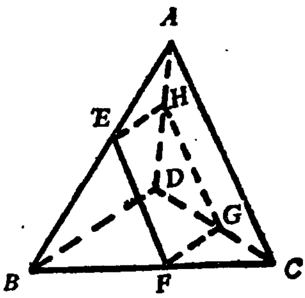


图 1-5

(2) ∵ $AC=BD$，

∴ $EH=EF$，∴ $EFGH$为菱形.

(3) ∵ $AC\perp BD$，

∴ $EH\perp EF$，∴ $EFGH$为矩形.

(4) ∵ $AC=BD$，且$AC\perp BD$，∴ $EH=EF$ 且 $EH\perp EF$，∴ $EFGH$为正方形.

(5) ∵ AC与BD所成的角为$60°$，

∴ $\angle HEF=60°$(或$120°$)

∴ $S_{\square EFGH}=EH\cdot EF\cdot \sin 60°$

$$=\frac{1}{2}n\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}mn.$$

说明 （1）空间四边形（三棱锥、四面体）是立体几何中最基本、最重要的概念之一．有关它的性质和题型需要熟练地掌握．

（2）例 4 中的 5 个小题，完全是由平面几何中类似的题出发，运用类比的方法提出在立体几何中的题，并且也是用类比的方法使问题得到解决．

例5 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$B_1B=2$．求：

（1）AB 与 A_1C_1 所成的角的正切；

（2）A_1A 与 BC_1 所成的角的正弦；

（3）A_1C_1 与 AD_1 所成的角的余弦．

解 （1）如图1-6，$\because$ $AB \parallel A_1B_1$，$\therefore$ $\angle B_1A_1C_1$ 即为 AB 与 A_1C_1 所成的角，在直角$\triangle A_1B_1C_1$中，$\mathrm{tg}\angle B_1A_1C_1=\frac{3}{4}$.

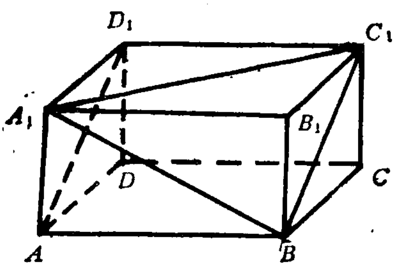


图 1-6

（2）$\angle B_1BC_1$ 即为 A_1A 与 BC_1 所成的角．$\sin\angle B_1BC_1=\frac{3}{13}\sqrt{13}$.

（3）$\angle A_1C_1B$ 即为 A_1C_1 与 AD_1 所成的角．

在斜三角形 A_1BC_1 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle A_1C_1B=\frac{25+13-20}{2\times5\times\sqrt{13}}=\frac{9}{65}\sqrt{13}.$$

说明 求异面直线所成的角一般来说分两个步骤，首先以概念为指导作出所求的角；其次把所作出的角放入某个三角形(直角三角形或斜三角形)解这个三角形求出所要求的角.

例6 已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，M为AB的中点，N为B_1B的中点. 求A_1M与C_1N所成的角的余弦. 如图1-7.（1992年高考题）.

解法一 取A_1B_1中点E，再取EB_1中点F.

$\therefore\quad FN\parallel BE\parallel A_1M$,

$\therefore\quad \angle C_1NF$即为$A_1M$与$C_1N$所成的角.

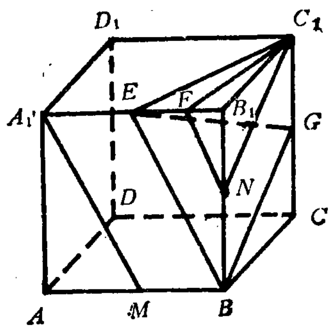


图 1-7

在$\triangle C_1NF$中，

$$C_1N=BE=\frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$FN=\frac{1}{2}BE=\frac{\sqrt{5}}{4}a$$

$$C_1F^2=C_1B^2+BF^2,\quad\therefore\quad C_1F=\frac{\sqrt{17}}{4}a$$

由余弦定理，得

$$\cos\angle C_1NF=\frac{\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{16}a^2-\frac{17}{16}a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}a}=\frac{2}{5}.$$

解法二 取C_1C中点G，连BG、EG，在$\triangle EBG$中，$BE = BG = \frac{\sqrt{5}}{2}a$，$EG^2 = EC_1^2 + C_1G^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2$. 由余弦定理，得

$$\cos\angle EBG = \frac{\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{6}{4}a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{5}.$$

说明 例6是用两次平移的方法作出异面直线A_1M、C_1N所成的角. 然后再用解三角形的方法求出所要求的角.

例7 在长方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1 = c$，$AB = a$，$AD = b$，且$a > b$. 求AC_1与BD所成的角的余弦. 如图1-8.

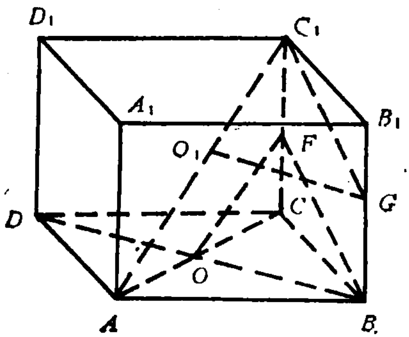


图 1-8

解法一 设$AC \cap BD = O$，取C_1C的中点F，连OF，则$OF \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}AC_1$，$\angle FOB$即为$AC_1$与$BD$所成的角.

在$\triangle FOB$中，$OB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

$OF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$，$BF = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}c^2}$

由余弦定理，得

$$\cos\angle FOB=\frac{OB^2+OF^2-BF^2}{2\cdot OB\cdot OF}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)-\left(b^2+\frac{1}{4}c^2\right)}{2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$$

解法二 取AC_1中点O_1，B_1B中点G．连O_1G．在$\triangle C_1O_1G$中，$\angle C_1O_1G$即为AC_1与BD所成的角．$O_1G\mathrel{\underline{\parallel}}OB$，$C_1G\mathrel{\underline{\parallel}}BF$，$O_1C_1=\frac{1}{2}AC_1$．由解法一可知：

$$\cos\angle C_1O_1G=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}.$$

解法三 如图1-9作$AE\mathrel{\underline{\parallel}}BD$，连$EC_1$，在$\triangle AEC_1$中，$AE=\sqrt{a^2+b^2}$，$AC_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$C_1E=\sqrt{4a^2+c^2}$．由余弦定理，得

$$\cos\angle EAC_1=\frac{(a^2+b^2)+(a^2+b^2+c^2)-(4a^2+c^2)}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2)}}<0$$

∴ $\angle EAC_1$为钝角．

根据异面直线所成的角的定义，AC_1与BD所成的角的余弦为

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2)}}$$

说明 根据异面直线所成的角的概念，作出所成的角，这时所作出的角可能是异面直线所成的角，也可能是它的邻

补角，在直观图中无法判定，只有通过解三角形后，根据这

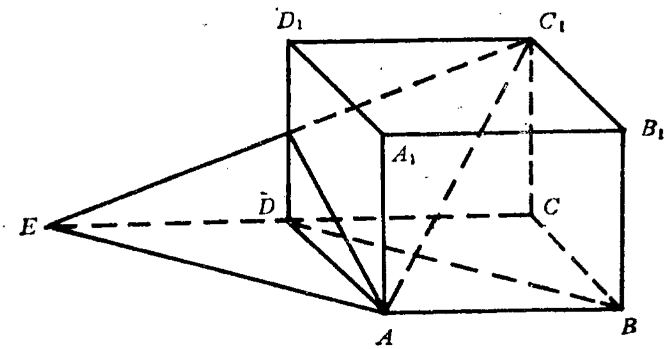


图 1-9

个角的余弦的正、负值来判定这个角是锐角（也就是异面直线所成的角）或钝角（异面直线所成的角的邻补角）.

例8 已知正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，求：

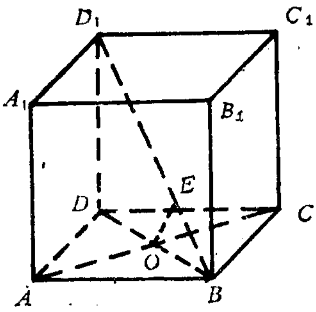


图 1-10

（1）D_1D与AC所成的角和距离；

（2）D_1B与AC所成的角和距离. 如图1-10.

解 （1）∵ $D_1D\perp$平面$ABCD$，∴ $D_1D\perp AC$，∴ AC与D_1D所成的角为90°.

又∵ $DO\perp AC$，$DO\perp D_1D$，∴ DO是D_1D和AC的公垂线段，$OD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，∴ D_1D与AC的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

（2）∵ $ABCD$是正方形，∴ $DB\perp AC$，∴ $D_1B\perp$

AC(三垂线定理)．∴ D_1B与AC所成的角为90°．

作$OE\perp D_1B$于E，∵ $Rt\triangle BOE\backsim Rt\triangle BDD$，

$$\therefore \quad \frac{OE}{D_1D}=\frac{OB}{D_1B}, \quad \frac{OE}{a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a}$$

$$\therefore \quad OE=\frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

∵ $OE\perp DB$，∴ OE是异面直线AC与D_1B的公垂线段，∴ D_1B与AC的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

说明 (1) 如果能证明两条异面直线垂直，则可根据定义得出这两条异面直线所成的角为90°，不要用平移的方法作出这个角；

(2) 当两条异面直线垂直时，一般来说可作出它们的公垂线段来求出它们之间的距离．

例9 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=5cm$，$BC=3cm$，$B_1B=4cm$．求AB与A_1C所成的角和距离．如图1-11.

解 ∵ $A_1B_1/\!/AB$，∴ $\angle B_1A_1C$即为AB与A_1C所成的角．

在$Rt\triangle A_1B_1C$中，$A_1B_1=5$，$B_1C=\sqrt{3^2+4^2}=5$．

∴ $\angle B_1A_1C=45°$．

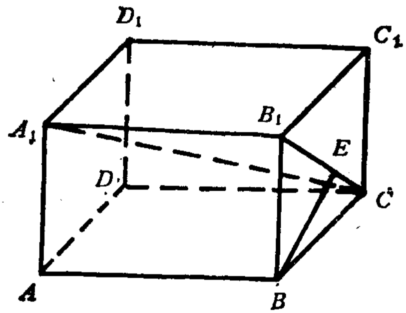


图 1-11

所以AB与A_1C所成的角为45°．