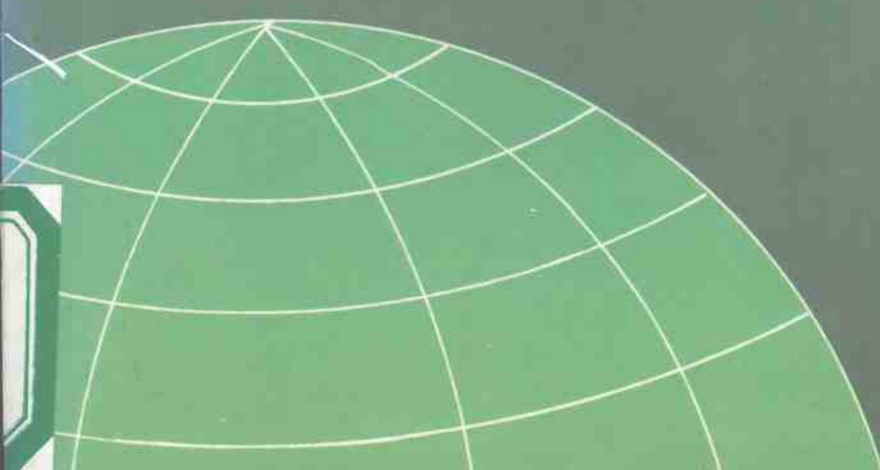
简明 运筹学

赖明勇 李桂云 著

新世纪出版社



简明运筹学

罗志兵
赖明勇　李桂云著

新世纪出版社

简明运筹学

赖明勇　李桂云著

新世纪出版社出版发行
各地新华书店经销
广泰电分印务(深圳)公司印刷

850×1168 毫米　开本大 32 开　字数 28 万
1994 年元月第 1 版　1994 年元月第一次印刷
印数 1—3500　定价:6.80 元

统一书号:ISBN8—209—04678—6/G·3678

前　　言

随着我国四个现代化建设的迅速发展，对经济和管理工作提出了越来越高的要求。运筹学作为实现管理现代化的有力工具，也是现代科学管理的基础。因此，学习和运用运筹学的热潮也就不断高涨。根据国家教委的规定，运筹学作为全国高等院校管理类专业本科生的必修课。因此，本教材根据运筹学本科教学大纲的基本要求而编写。它包括了运筹学各个分支的基本内容，论述力求深入浅出，文字通俗易懂，着重方法介绍和应用实例计算，以突出“简明”二字。并且各章后提供了大量的习题，便于读者自学。本书适宜作为高等理工院校管理类专业教材和同类专业自学考试教材使用，亦可作为工程技术人员自学参考书和教师教学参考书。

我们在编写过程中，参考了不少国内外同类教材，在此表示感谢。在取材过程中，尽可能地把较新的原理、方法编入。全书在阐述原理、方法的同时，都列有典型的例题，为读者应用这些原理、方法提供了范例。对算法的讲解，既注意数学上的逻辑性、严密性，又考虑到管理类专业学生的数学基础及将来工作的需要，不做过多的数学推导和证明。对一些问题，还结合例题说明其经济意义，使之更易为管理类学生接受和运用。

本书共分线性规划、动态规划、图论、存贮论、对策论、非线性规划，单目标决策和多目标决策八部分，由赖明勇、李桂云编著。具体分工如下：

赖明勇　第 1 章——第 5 章

李桂云　第 6 章——第 8 章

在整个编写过程中，一直得到我们的老师湖南大学国际商学

院院长宣家骥教授的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。在出版过程中得到了我们的朋友易军以及出版社和印刷厂同志们的大力支持和帮助，得到了湖南省教委自考办、湖南大学国际商学院领导的支持，在此一并致谢。

限于作者水平，恳切地希望广大读者和师生们能提出宝贵的意见。

赖明勇、李桂云

一九九二年十二月于长沙岳麓山

目　　录

第一章　线性规划

线性规划是目前经济管理中经常使用而又有成效的优化技术，其原因有二：一是应用广泛。因经济管理中的大量优化问题可以用线性规划的数学模型来表示。二是方法成熟。1947年美国数学家丹齐克(George B.Dantzing)已对一般的线性规划问题建立了解法，即单纯形法。今天，用单纯形法解线性规划的计算机程序正大量涌现，致使在电子计算机上求解此类问题已十分容易。

§1　线性规划数学模型及其求解

一、线性规划数学模型的建立

线性规划研究的问题主要有二类：一类是给定了人力、物力资源，研究如何运用资源来更好地完成任务；另一类是研究如何统筹安排，尽量以最少的人力、物力资源来完成该项任务。实际上，这两类问题是一个问题的两个方面，都是所谓寻求整个问题的某个整体指标最优的问题。

在研究解决上述这两类问题时，往往用字母、数字及其他符号建立起来的等式或不等式、图象、框图等形式来抽象描述这些实际问题的特征及其内在联系，这种数学形式被称为数学模型。通过对数学模型的研究，有助于认识这类问题的特征，以及寻求它的一般解法。由于实际的线性规划问题一般都是很复杂的，而我们现在还是刚刚开始学习这些问题，故为了使读者易于掌握建立线性规划模型的方法，我们所选的例子都是经过大大简化的。只要弄懂了这些简单的模型，今后遇到较为复杂的问题就有办法了。

例1—1　某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如表1—1所示。

表1—1

	Ⅰ	Ⅱ	有效台时
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16kg
原材料B	0	4	12kg

该工厂每生产一件产品Ⅰ可获利2元，每生产一件产品Ⅱ可获利3元，问应如何安排计划使该工厂获利最多？

解：本题所求的未知量为该厂的产品Ⅰ、Ⅱ的生产数量，以x_1、x_2（件）表之。最大利润值设为z元，该厂的目标是要

$$z=2x_1+3x_2$$

取最大值。在这里x_1、x_2一般称为决策变量，z称为目标函数。

生产计划的制订常要受到加工的工艺条件、原料等方面的限制。因为设备的有效台时是8，它限制了x_1、x_2的增长。所以，在考虑Ⅰ、Ⅱ的产量时，要考虑不超过设备的有效台时数，即可用不等式表示为：

$$x_1+2x_2\leqslant 8$$

同理，因原材料A、B的限量，可以得到以下不等式：

$$4x_1\leqslant 16$$

$$4x_2\leqslant 12$$

由于产量不可能是负的，就应有：

$$x_1\geqslant 0 \qquad x_2\geqslant 0$$

综上所述，这一问题可用如下的数学语言来描述：

设x_1、x_2为产品Ⅰ、Ⅱ的产量，在满足

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \leqslant 16 \\ \qquad\quad 4x_2\leqslant 12 \\ x_1、\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

的条件下，使目标函数

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

有最大值。

例1—2　某车间用A_1、A_2两台不同的机器，加工三种产品B_1、B_2、B_3，且要使这三种产品的产量之比为1：2：3。两台机器的生产能力（kg/小时）见表1—2。

表1—2　　　　　　　　　　　　　　单位：公斤/小时

产　品	B_1	B_2	B_3
机器A_1	100	—	60
机器A_2	110	60	80

问应如何分配两台机器的加工时间，既使产品配套，又使总的产量有最大值？

解：设决策变量x_{ij}，$(i=1,2;\ j=1,2,3)$，为第i台机器每日加工第j种产品的小时数，则加工B_1种产品的产量为：

$$100x_{11} + 110x_{21}$$

加工B_2种产品的产量为：$60x_{22}$

效应值

加工B_3种产品的产量为：$60x_{13} + 80x_{23}$

为了满足产品的配套要求，就应有

$$\frac{100x_{11} + 110x_{21}}{60x_{22}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{60x_{22}}{60x_{13} + 80x_{23}} = \frac{2}{3}$$

资源限额

假设每日的加工时间为8小时，所以在考虑机器A_1、A_2每日的生产能力时，要受到加工时间的限制，故有

$$x_{11} + x_{13} \leqslant 8$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 8$$

当然，x_{ij}不会是负值，所以有：

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i=1,2;\ j=1,2,3)$$

该车间的目标是：在满足上述各个约束条件下，机器A_1、A_2生产的总产量

$$z=100x_{11}+110x_{21}+60x_{22}+60x_{13}+80x_{23}$$

要求有最大值。综上所述，该问题可以归纳为求x_{ij}，在满足

$$\begin{cases} x_{11}+x_{13}\leqslant 8 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 8 \\ 200x_{11}+220x_{21}-60x_{22}=0 \\ 180x_{22}-120x_{13}-160x_{23}=0 \\ x_{ij}\geqslant 0 \qquad (i=1,2;j=1,2,3) \end{cases}$$

条件下，使目标函数

$$z=100x_{11}+110x_{21}+60x_{22}+60x_{13}+80x_{23}$$

有最大值。

通过上述二个例子的分析，可以看到：它们都有着相同形式的数学表达式。其中：表明各个决策变量应该满足的限制条件，称为约束条件。这些约束条件是用一组线性等式或不等式表示的；表明决策变量能够达到的总的效应函数，被称为目标函数，这个目标函数是用决策变量的线性函数表示的。正因为约束条件和目标函数都是决策变量的线性表达式，所以就把这类模型叫做线性规划模型。也就是说，线性规划的数学模型可归结为：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}(\text{或}\mathrm{Min})Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \\ &\mathrm{s.t}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}\geqslant\text{、或}=)b_i(i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \end{aligned}$$

或写成矩阵形式：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}(\text{或}\mathrm{Min}),Z=CX \\ &\mathrm{s.t}\begin{cases} AX\leqslant(\text{或}\geqslant,\text{或}=)B \\ X\geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

通过对上述两个例子的分析，还可以看出：如果把a_{ij}和c_j分别理解为决策变量x_j的每个单位需用第i种资源的数量和产生的效应值，b_i理解为第i种资源的限额，则不管实际问题如何复杂多样，只要满足以下四个条件，都可归纳为线性规划问题。

1. 比例性　是指a_{ij}和c_j都是关于x_j的比例系数。

2. 可加性　是指各种资源的总的需用量分别等于各个x_j的需用量之和，总的效应值等于各个x_j的效应值之和。

上述1和2可保证约束条件和目标函数都能取线性函数的形式。

3. 连续性　是指决策变量是连续的。

4. 非负性　是指x_j须取非负的数值。

二、线性规划模型的标准型

由于对目标的追求和约束形式的不同，线性规划模型的具体形式是多种多样的，但我们可将它们都化为同一种形式，即所谓标准型。这里规定标准形式为：

$$\text{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_1, x_2, \cdots x_n \geqslant 0
\end{cases}
$$

简写为

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& \operatorname{Max} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1, 2, \cdots, m \\
x_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \cdots, n
\end{cases}
\end{aligned}
}
$$

在标准型中规定各约束条件的右端项$b_i \geqslant 0$，否则等式两端乘以“-1”。

用向量和矩阵符合表述时为：

$$
\operatorname{Max} Z = CX
$$

复

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} P_j X = B \\
x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n
\end{cases}
$$

$\sum_{j=1} P_j = A$

其中：$C = (c_1, c_2, \cdots c_n)$

$$
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

向量P_j对应的决策变量是x_j。

用矩阵描述时为：

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Max} Z = CX \\
& AX = B \\
& X \geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots P_n);$$

称A为约束条件的$m\times n$维系数矩阵，一般$m<n$； $m,n>0$，

B为资源向量

C为价值向量

X为决策变量向量。

实际碰到各种线性规划问题的数学模型都应变换为标准型后求解。

以下讨论如何化标准型的问题。

标准型的变换：

1.若要求目标函数实现最小化,即$\min Z=CX$。这时只需将目标函数最小化变换求目标函数最大化,即令$Z'=-Z$，于是得到$\mathrm{Max}Z'=-CX$。这就同标准型的目标函数的形式一致了。

2。约束方程为不等式。这里有两种情况：一种是约束方程为'≤'不等式,则可在'≤'不等式的左端加入非负松驰变量， 把原'≤'不等式变为等式，另一种是约束方程为'≥'不等式。则可在'≥'不等式的右端减去一个非负剩余变量(也可称松驰变量)，把不等式约束条件变为等式约束条件。

3.若存在取值无约束的变量x_k，可令：

$$x_k=x_k'-x_k'',\qquad 其中x_k',\ x_k''\geqslant 0$$

通过以上讨论说明,任何形式的数学模型都可化为标准型,下面举例说明。

例1—3　将下述线性规划数学模型化为标准型

$$\min Z=-x_1+2x_2-3x_3$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 7\\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2\\ -3x_1+x_2+2x_3=5\\ x_1、x_2\geqslant 0,\quad x_3\text{为无约束}\end{cases}$$

解：根据上讨论说明作以下变化：

1.用x_4-x_5替换x_3，其中x_4，$x_5\geqslant 0$。

2.在第一个约束不等式≤号的左端加入松驰变量x_6；

3.在第二个约束不等式≥号的左端减去剩余变量x_7；

4.令$Z'=-Z$，把求minZ改为求maxZ′；即可得到该问题的标准型

$$\max Z'=x_1-2x_2+3(x_4-x_5)+0\cdot x_6+0\cdot x_7$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+(x_4-x_5)+x_6=7\\ x_1-x_2+(x_4-x_5)-x_7=2\\ -3x_1+x_2+2(x_4-x_5)=5\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

三、线性规划模型求解

（一）图解法

只有两个变量的线性规划问题求解是比较简单的，可以用图解法求解。现以前面的例1—1为例：

$$\mathrm{Max}Z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\ 4x_1\qquad\leqslant 16\\ \qquad 4x_2\leqslant 12\\ x_1、x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：在以x_1、x_2为坐标轴的直角坐标系中，非负条件x_1、$x_2\geqslant 0$是指第一象限。例1中的每个约束条件都代表一个半平面。如约束条件$x_1+2x_2\leqslant 8$是代表以直线$x_1+2x_2=8$为界限的左下方的半

平面，若同时满足x_1、$x_2 \geqslant 0$，$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$，$4x_1 \leqslant 16$和$4x_2 \leqslant 12$的约束条件的点，必然落在由这三个半平面交成的区域内。由例1—1的所有约束条件为半平面交成的区域见图1—1中的阴影部分。阴影区域中的每一个点（包括边界点）都是这个线性规划问题的解（称可行解），因而此区域是例1—1的线性规划问题的解集合，称它为可行域。

再分析目标函数$Z = 2x_1 + 3x_2$，在这坐平面上，它可以表示以Z为参数、$-2/3$为斜率的一族平行线：

$$x_2 = -(2/3)\,x_1 + \frac{Z}{3}$$

$2 = -\frac{2}{3} \times 4 + \frac{Z}{3} \quad \therefore Z = 14$

位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值，因而称它为"等值线"。当Z值由小变大时，直线$x_2 = -(2/3)x_1 + Z/3$沿其法线方向向右上方移动。当移动到Q_2点时，使Z值在可行域边界上实现最大化（见图1—2），这就得到了例1—1的最优解Q_2，Q_2点的坐标为（4,2）。于是可计算出$Z = 14$。

这说明该厂的最优生产计划方案是：生产产品Ⅰ4件，生产产品Ⅱ2件，可得到最大利润为14元。

若问题是求目标函数的最小值，则将目标函数在第一象限的等值线朝原点方向移动，移动到既和可行域有交点，又距离原点最

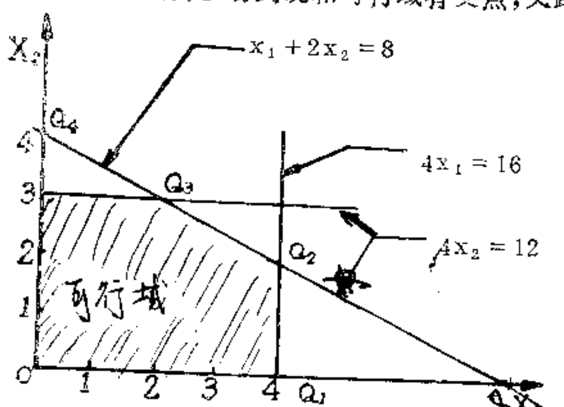


图 1 — 1

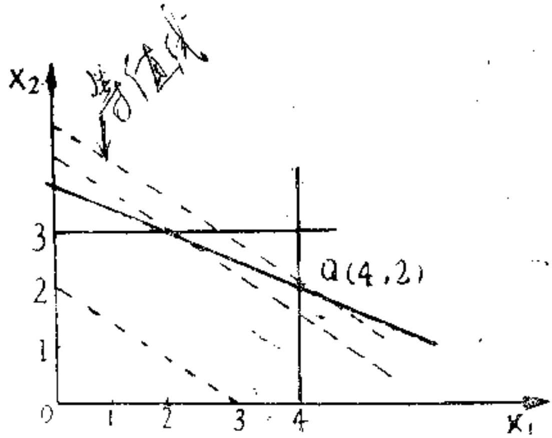


图 1 — 2

近的地方，这时等值线与可行域的交点既满足约束条件，又使目标函数取得最小值。

由此可知，图解法的基本思路是：先画出满足约束条件的可行域，然后，移动目标函数的等值线，以使在可行域中选取最优解。

从上述例子的几何图形中可直观地得出两点重要结论：

1.在图解法中，满足约束条件的区域一般都构成一个凸多边形。这一事实可以推广到更多个变量的场合。

2.在图解法中，最优解必定能在凸多边形的某一顶点上取得。这一事实也可以推广到更多变量的场合。

上例中求解得到问题的最优解是唯一的，但对一般线性规划问题，求解结果还可能出现以下几种情况：

1.无穷多最优解（多重解）。若将例 1 中的目标函数变为求 $\max = 2x_1 + 4x_2$，则表示目标函数中以参数 Z 的这族平行线与约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 的边界成平行。当 Z 值由小到大时，将与线段 Q_2Q_3 重合（见图1—3）。线段 Q_2Q_3 上任意一点都使Z取得相同的最大值，这个线性规划问题有无穷多最优解（多重解）。

2.无界解。对下述线性规划问题