21世纪普通高等教育精品规划教材

公共基础课适用

高等数学辅导 24 讲

24 Lessons on Advanced Mathematics

邱忠文 编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21世纪普通高等教育精品规划教材(公共基础课适用)

高等数学辅导24讲

24 Lessons on Advanced Mathematics

邱忠文　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是普通高等教育精品规划教材．该书作为高等理工科院校本科生高等数学课程的辅导书，其内容(除了傅氏级数之外)基本上包含了大学本科的高等数学内容，并且各部分的内容(除级数部分)均以计算解答题为主．

全书内容全面，重点突出，共分为24个专题讲解．

本书适合于一般本科院校和高职高专院校学生学习高等数学课程参考，对于初学高等数学课程作练习题有困难的学生有所帮助．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导24讲/邱忠文主编．—天津：天津大学出版社，2009.4

21世纪普通高等教育精品规划教材

ISBN 978-7-5618-2947-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．邱…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第030713号

出版发行	天津大学出版社
出版人	杨欢
地址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)
电话	发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印刷	廊坊市长虹印刷有限公司
经销	全国各地新华书店
开本	169mm×239mm
印张	12.5
字数	267千
版次	2009年4月第1版
印次	2009年4月第1次
印数	1-4 000
定价	26.00元

前 言

高等数学是高等学校理工、经济、管理类专业重要的基础理论课之一，同学们普遍反映高等数学内容难学、习题难做、方法也不易掌握.

为了帮助同学们学习高等数学课程，我们编写了《高等数学辅导24讲》，其内容（除傅氏级数之外）基本上包含了大学本科的高等数学内容，并且除了级数部分以外，基本上没有证明题.

同学们在阅读本书的时候，对看不明白的地方，应当多思考一下，要明白运算过程的道理，提高才会快一些.

著名的数学家华罗庚曾经讲过："学习数学，不做好习题，等于入宝山而空返."著名的数学家柯召曾经讲过："读书的第一阶段是把厚书读薄，读书的第二阶段是把薄书读厚."读书是一个不断克服困难的艰苦过程，只有在那崎岖小路不畏劳苦攀登的人，才有希望达到光辉的顶点.

本书对于一般本科院校和高职院校的学生学习高等数学课程有一定的帮助. 本书的初稿曾在天津大学的部分学院试用过.

参加本书编写工作的有邱忠文、赵晓红、杨晓叶、白建侠等. 限于编者的水平，对本书的疏误之处，恳请读者指正.

编　者
2009年1月于天津大学

目　　录

第 1 讲 函   数

函数是高等数学研究的主要对象，也是高等数学中的重要概念之一，是学习高等数学课程的基础.

一、概念、结论与方法

1. 重要概念

①函数的定义. ②函数的定义域. ③函数值. ④复合函数. ⑤反函数. ⑥函数的性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性). ⑦基本初等函数. ⑧初等函数. ⑨数学归纳法.

2. 结论与方法

定义域的求法通常是解不等式或不等式组，并应遵循以下原则：

①函数中含有分母时，分母部分不能为零；

②函数中含有偶次根式时，必须保证偶次根式内为非负；

③函数中含有对数时，其真数部分应大于零；

④函数中含有反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 时，应当满足 $|x|\leqslant 1$；

⑤当函数中含有若干个子函数的和、差、积、商及复合步骤时，定义域应当是各子函数定义域的交集(且交集非空).

二、函数的定义域

例 1.1 求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 为了使函数 $f(x)$ 有意义，其自变量 x 必须满足不等式

$$\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,$$

即

$$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1,\ -7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

得

$$-6\leqslant 2x\leqslant 8,\ -3\leqslant x\leqslant 4.$$

知函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域 $D_f=[-3,4]$.

例 1.2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的定义域.

解 函数的定义域为分母 $x^2-3x+2\neq 0$ 的点集，也就是说，在实数集合中，只需

$x\neq 1$及$x\neq 2$. 可知$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-2}$的定义域$D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 1.3 求函数$f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$的定义域.

解 函数的定义域为$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)\geqslant 0$的点集，即

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x-4\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\x\geqslant 4,\end{cases}\text{得 } x\geqslant 4(\text{或 } x\in[4,+\infty)),$$

$$\begin{cases}x+1\leqslant 0,\\x-4\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -1,\\x\leqslant 4,\end{cases}\text{得 } x\leqslant -1(\text{或 } x\in[-\infty,-1]).$$

可知函数$f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$的定义域$D_f=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$.

例 1.4 求函数$f(x)=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$的定义域.

解 由函数$f(x)$的结构，可知函数$f(x)$的定义域应当满足不等式组

$$\begin{cases}5-x\geqslant 0,\\x-1>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\geqslant x,\\x>1.\end{cases}$$

满足上面不等式组的公共解集为

$$(-\infty,5]\cap(1,+\infty)=(1,5].$$

可知函数$f(x)=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$的定义域$D_f=(1,5]$.

例 1.5 求由$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$决定的函数$F(x)=f(x+\dfrac{1}{4})+f(x-\dfrac{1}{4})$的定义域.

解 首先求$f(x)$的定义域，由

$$\begin{cases}3-x>0,\\x-2>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3>x,\\x>2,\end{cases}\text{其公共解集为 } x\in(2,3),$$

故

$$f(x+\frac{1}{4})\text{的定义域为 } 2<x+\frac{1}{4}<3,\frac{7}{4}<x<\frac{11}{4},$$

$$f(x-\frac{1}{4})\text{的定义域为 } 2<x-\frac{1}{4}<3,\frac{9}{4}<x<\frac{13}{4}.$$

它们的公共解集$D_f=(\dfrac{9}{4},\dfrac{11}{4})$为函数$F(x)=f(x+\dfrac{1}{4})+f(x-\dfrac{1}{4})$的定义域.

三、函数值的求法举例

设函数$f(x)=3x^2+2x+1$，则此函数实际上代表了下面的表达式，

$$f(\square)=3(\square)^2+2(\square)+1.$$

于是令$\square=2$，有

$$f(2)=3(2)^2+2(2)+1=12+4+1=17.$$

例 1.6 已知 $f(x)=x^2-3x+1$,求 $f(x+1)$,$f[f(x)]$.

解 $f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+1=x^2-x-1$.

$$f[f(x)]=[f(x)]^2-3[f(x)]+1=(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1$$
$$=x^4-6x^3+8x^2+3x-1.$$

例 1.7 已知 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$,求 $f(x)$.

解 设 $u=\frac{1}{x}$,则 $x=\frac{1}{u}$,有

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+(\frac{1}{u})^2}=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}},$$

故

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\quad(x>0).$$

例 1.8 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(2x+1)$.

解 设 $u=x-1$,则 $x=u+1$,有

$$f(u)=(u+1)^2,$$

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=(2x+2)^2=4(x+1)^2.$$

例 1.9 设 $f(x)=3x+5$,求 $f[f(x)+1]$.

解 $f[f(x)+1]=3[f(x)+1]+5=3(3x+6)+5=9x+23$.

例 1.10 设 $f(x)$ 满足条件 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$(这里 a,b,c 为常数,且 $|a|\neq|b|$),$f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 由题设条件,有方程组

$$\begin{cases}af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}, \\ & x\neq0, \\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx,\end{cases}$$

可解出当 $x\neq0$ 时

$$f(x)=\frac{c(a-bx^2)}{(a^2-b^2)x},$$

故

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c(a-bx)^2}{(a^2-b^2)x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

四、杂例

例 1.11 设 $\varphi(x)=x^2$,$\psi(x)=2^x$,求 $\varphi[\varphi(x)]$,$\varphi[\psi(x)]$,$\psi[\varphi(x)]$及 $\psi[\psi(x)]$.

解　$\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4$；$\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$；

$\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$；$\psi[\psi(x)]=2^{2^x}$.

例 1.12　设函数 $f(x)$ 满足 $f^2(\lg x)-2xf(\lg x)+x^2\lg x=0, x\in[1,10]$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解　由 $f^2(\lg x)-2xf(\lg x)+x^2\lg x=0$，可解出

$$f(\lg x)=x(1\pm\sqrt{1-\lg x})=10^{\lg x}(1\pm\sqrt{1-\lg x}).$$

由条件 $f(0)=0$，得

$$f(\lg x)=10^{\lg x}(1-\sqrt{1-\lg x}).$$

即

$$f(x)=10^x(1-\sqrt{1-x}), x\in[0,1].$$

例 1.13　求函数 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})(a>0,a\neq1)$ 的反函数.

解　由 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$，可得方程

$$a^{2x}-2ya^x-1=0,$$

解出

$$a^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

因为指数函数 $a^x>0$，所以有

$$a^x=y+\sqrt{y^2+1}.$$

取以 a 为底的对数，得

$$x=\log_a(y+\sqrt{y^2+1}).$$

知所求的反函数为

$$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1}), x\in(-\infty,+\infty).$$

例 1.14　判定函数 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}(x\neq0)$，且 $f(0)=0$ 的奇偶性.

解　当 $x\neq0$ 时，因为

$$f(-x)=\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\\&=\frac{2^x-1}{1-2^x}+1=0,\end{aligned}$$

并且由题设知 $f(0)=0$，故知 $f(x)$ 为奇函数.

*例 1.15　验证：函数 $f(x)=[x]-3\left[\frac{x}{3}\right]$ 是以 3 为周期的周期函数（这里“[　]”是高斯取整符号）.

解　因为

$$
\begin{aligned}
f(x+3) &= [x+3]-3\left[\frac{x+3}{3}\right]=[x]+3-3\left[\frac{x}{3}+1\right] \\
&= [x]+3-3\left[\frac{x}{3}\right]-3=[x]-3\left[\frac{x}{3}\right] \\
&= f(x),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数.

第 2 讲　极限的计算

极限的计算，主要是函数极限的运算，它是高等数学中的基本运算之一，也是以后学习的导数、积分等内容的基础.

一、概念、结论与方法

1. 重要概念

①数列与函数极限的定义. ②函数单侧极限的概念. ③无穷小与无穷大的定义. ④无穷小的运算性质. ⑤等价无穷小、同阶无穷小及高阶无穷小的定义. ⑥函数极限的性质. ⑦数列极限与函数极限的关系（海涅定理）. ⑧极限存在的单调有界准则与夹挤准则.

2. 结论与方法

(1)两个重要极限及几个极限的结果

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+kt)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}^k\quad(k\text{ 为常数}).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad(a>0,a\neq 1).$$

(2)连续函数求极限的法则

$$\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]\quad(f[\varphi(x)]\text{连续时}).$$

二、简单未定式的极限

例 2.1　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

解　原式 $\xlongequal{t=\sqrt[3]{x}}\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{t^3-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\dfrac{1}{3}$.

例 2.2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2[(x+1)-(x-1)]}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-2}=2$.

例 2.3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

解　原式 $\xlongequal{t=\sqrt[12]{1+x}}\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^4-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\dfrac{3}{4}$.

例 2.4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3}=\dfrac{1}{3}$.

例 2.5　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.

三、利用两个重要的极限计算极限

例 2.6　计算$\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan x)^{\cot x}$.

解　原式$\xlongequal{t=\cot x}\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{2}{t})^t=e^2$.

例 2.7　计算$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

例 2.8　计算$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{1+3x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e^3$.

例 2.9　计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

例 2.10　已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2a}{x-2a}\right)^x=8$，求非零常数 a 的值.

解　由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-2a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4a}{x-2a}\right)^x$

$\xlongequal{t=\frac{4a}{x-2a}}\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{4a}{t}+2a}=\lim\limits_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{4a}\cdot\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{2a}$

$=e^{4a}=8$.

故

$$4a=\ln 8=3\ln 2,$$

$$a=\frac{3}{4}\ln 2.$$

四、利用等价无穷小求极限

例 2.11 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x}\dfrac{x-\sin x}{x-\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}=1.$

例 2.12 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)\dfrac{1}{x}\right]=1.$

例 2.13 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{3x^2}-1}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}.$

例 2.14 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}}{1-\cos x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}}{\dfrac{1}{2}x^2}=2.$

例 2.15 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2})^x$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})^x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}=e^3.$$

五、利用幂指函数的公式求极限

例 2.16 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}u(x)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}v(x)=\infty$,则有幂指函数求极限的公式

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[u(x)-1]v(x)}.$$

证 我们仅证明 $x\to x_0$ 的情况.

因为 $u(x)^{v(x)}=\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{[u(x)-1]v(x)}$,所以

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\{[1+(u(x)-1)]\}^{\frac{1}{u(x)-1}[u(x)-1]v(x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}.$$

例 2.17 计算$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1-2x}{x}}$.

解 因为 $u(x)=1+3x, v(x)=\dfrac{1-2x}{x}$,所以

原式$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+3x-1)\frac{1-2x}{x}}=e^3.$

例 2.18　计算$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解　因为$u(x)=2-x,v(x)=\tan\dfrac{\pi x}{2}$,所以

原式$=e^{\lim\limits_{x\to1}(2-x-1)\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}}\xlongequal{t=1-x}e^{\lim\limits_{t\to0}\left[t\cdot\tan\frac{\pi(1-t)}{2}\right]}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

例 2.19　计算$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3x}}$.

解　因为$u(x)=\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right),v(x)=\dfrac{1}{\sin^3x}$,所以

原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)-1\right]\cdot\frac{1}{\sin^3x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}$.

(说明:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$,见例 2.9)

例 2.20　计算$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{3}{x}}\left(\dfrac{\tan x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{3}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}[(1+x)-1]\cdot\frac{3}{x}}\cdot e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{\sin x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}$

$=e^3\cdot e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\cdot x^2}}=e^3\cdot e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{7}{2}}$.

六、利用海涅(Heine)定理求极限

例 2.21　计算$\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+2)-\ln n]$.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}x[\ln(x+2)-\ln x]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\ln e^2=2.$$

所以由海涅定理知

原式$=2$.

例 2.22　计算$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\quad(a>0)$.

解　因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)&=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x^2a^{\frac{1}{x+1}}\left[\frac{1}{x(x+1)}\ln a\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\cdot\ln a=\ln a.\end{aligned}$$

所以由海涅定理,知

原式$=\ln a$.

例 2.23　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)^n$.

解　因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=e^{-2}.$$

所以由海涅定理，知

$$原式=e^{-2}.$$

例 2.24 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{f\left(\frac{3}{x}\right)}=2$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{f\left(\frac{3}{x}\right)}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{f(3t)}=2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{f(3x)}=6$.

令 $u=3x$，知 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{f(u)}=6$，$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}=\dfrac{1}{6}$. 则当 $u=2t$ 时，得

$$\lim_{t\to0}\frac{f(2t)}{2t}=\frac{1}{6}，知\lim_{t\to0}\frac{f(2t)}{t}=\frac{1}{3}.$$

而 $nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$ 当 $n\to\infty$ 时，是函数 $\dfrac{f(2t)}{t}$ 当 $t\to0$ 的一个子数列（令 $t=\dfrac{1}{n}$ 即可看出），所以

$$原式=\frac{1}{3}.$$

例 2.25 计算 $\lim\limits_{n\to0}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n\quad(a>0,b>0)$.

解 因为

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=e^{\frac{1}{2}\ln(ab)}$$

$$=\sqrt{ab}.$$

所以由海涅定理，知

$$原式=\sqrt{ab}.$$

第 3 讲　简单函数的导数

导数是一元函数微分学中的重要概念之一，它在数量上描述了由于自变量的变化引起的函数变化“快慢”的问题，即函数的变化率. 因此，导数是研究函数性质的有力工具之一.

一、概念、结论与方法

1. 重要概念

①导数的定义. ②左、右导数的概念. ③函数在一点处可导的充分必要条件. * ④函数的可导性与连续性的关系. ⑤微分的概念. ⑥高阶导数的概念. ⑦隐函数与参量方程的导数.

2. 结论与方法

(1)基本初等函数的导数与微分公式

表 2.1

序号	导数公式	微分公式
1	$(c)'=0$	$\mathrm{d}(c)=0$
2	$(x^a)'=ax^{a-1}$	$\mathrm{d}(x^a)=ax^{a-1}\mathrm{d}x$
3	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
4	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
5	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
6	$(a^x)'=a^x\ln a$	$\mathrm{d}a^x=a^x\ln a\mathrm{d}x$
7	$(\sin x)'=\cos x$	$\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$
8	$(\cos x)'=-\sin x$	$\mathrm{d}\cos x=-\sin x\mathrm{d}x$
9	$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x$
10	$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\mathrm{d}x$
11	$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}\sec x=\sec x\tan x\mathrm{d}x$
12	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}\csc x=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$
13	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
14	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
15	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
16	$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(2)函数和、差、积、商及复合函数的求导公式($u(x),v(x)\in \mathrm{D}$, $f(x),\varphi(x)\in \mathrm{D}$)

① $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.

② $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

③ $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad(v(x)\neq 0)$.

④设 $y=f(u),u=\varphi(x)$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x).$$

二、求初等函数的导数举例

例 3.1 求 $y=\sin x\cos x$ 的导数 y' 及 $y'|_{x=0}$.

解 $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x$,

$y'|_{x=0}=\cos^2 0-\sin^2 0=1$.

例 3.2 求 $y=\dfrac{\ln x}{x}$的导数 y' 及 $y'|_{x=1}$.

解 $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ y'|_{x=1}=\dfrac{1-\ln 1}{1^2}=1.$

例 3.3 求 $y=\sqrt{x^2+a^2}\,(a>0)$的导数 y'.

解 $y'=[(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]'=\dfrac{1}{2}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+a^2)'$

$=\dfrac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

由例 3.3,不难得到

$$(\sqrt{x^2+1})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

类似地,还可以得到

$$(\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},(\sqrt{a^2-x^2})'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

例 3.4 求 $y=\arccos\dfrac{1}{x}(x>1)$的导数 y'.

解 $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

例 3.5 求 $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 3x$ 的导数 y'及 $y'|_{x=0}$.

解 $y'=(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})'\sin 3x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\sin 3x)'$

$=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)\sin 3x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\cos 3x\cdot 3$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 3x+3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos 3x.$