



21

21世纪大学课程辅导丛书

离散数学

学习指导 典型题解

新版

主编 王忠义



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



21
21世纪大学课程辅导丛书

离散数学

学习指导—典型题解

新版

主编 王忠义
编者 刘晓莉
张卫国
周大勇



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书内容主要包括集合论、数理逻辑、图论和代数系统四个部分。各部分分为基本知识点、重点与难点、典型题解析几个环节进行介绍,每章最后一节为自我检测题。附录 A 给出各章自我检测题的详细答案。附录 B 提供了三套近年来高校硕士研究生入学考试试题离散数学部分及其参考答案。

本书例题和自我检测题在选题方面注重代表性,分析和解题过程重视方法和技巧,从易到难,循序渐进,有的题目给出一题多解。

本书可作为计算机和信息类本科、专科学生学习离散数学课程的课外辅导书,也可作为相关专业的考研复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学学习指导 典型题解/王忠义主编. —西安:西安交通大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-5605-2835-9

I. 离… II. 王… III. 离散数学-高等学校-教学参考资料 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 104219 号

书 名 离散数学学习指导 典型题解
主 编 王忠义
责任编辑 李 晶

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 西安市新城区兴庆印刷厂

开 本 787mm×1 092mm 1/16 印张 14 字数 326 千字
版次印次 2008 年 9 月新版 2008 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-2835-9/O·280
定 价 19.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

丛书总序

“21 世纪大学课程辅导丛书”第一版出版已有十年时间,几经再版,深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要,也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求,我们组织作者对本丛书进行了修订,以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的是为普通高等学校理工类专业的大学生提供一流的学习资源,使大家共享一流教师的教学经验和教学成果,更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识,为今后的学习和深造打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府,是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一,1999 年被国家确定为中西部地区惟一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学,1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名,具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编,他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中,深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在,对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究,并将成果体现于书中。

本丛书以普通高等学校的学生为主要对象,不拘泥于某一本教材,而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结,取其精华,自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼,按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排;书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是帮助学生理清学习思路,总结并掌握各章节的要点;通过各类精选题的剖析、求解和示范,分析解题思路,示范解题过程,总结方法要略,展示题型变化;达到扩展知识视野,启迪创新思维,促进能力提高的目的。

本丛书既可以单独使用,也可以与其他教材配合使用;既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材,也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国；也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力，使您一举成功！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们一定会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址：<http://press.xjtu.edu.cn/>

理工医事业部网址：<http://lgny.xjtupeess.com/>

理工医事业部信箱：jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社

2008年6月

前 言

离散数学是现代数学的重要分支,是计算机科学中基础理论的核心课程。离散数学是以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标,其研究对象一般地是有限个或可数个元素,因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。离散数学与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计、系统结构、容错诊断、机器定理证明等课程联系紧密。离散数学内容比较分散,习题多,很多习题初学者难以下手。为帮助学生抓住重点,规范练习,我们根据多年教学经验编写了这本《离散数学——学习指导 典型题解》。

本书是根据国家教育部教学指导委员会编制的《离散数学课程教学的基本要求》并参考工科大学计算机类各专业的离散数学课程教学大纲编写的。内容包括集合论、数理逻辑、图论和代数系统等四个部分的基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题。集合论部分包括集合的概念和集合的运算、二元关系、映射;数理逻辑部分包括命题逻辑和谓词逻辑;图论部分包括图论基本概念和一些特殊图;代数系统部分包括群、环、域、格与布尔代数等内容。

各章节的“基本知识点”分为基本概念、基本理论和基本计算;“重点和难点”解释主要概念、术语和定理;“典型题解析”选择具有代表性的例题进行详细分析,并给出标准解题步骤,对于有些题目还给出一题多解,或对相应的知识点和难点加注,指出容易犯的错误及犯错误的原因;各章最后一节是“自我检测题”,这些题中尽量避免近似程度很高的题。附录 A 中给出各章自我检测题参考答案,附录 B 提供了三套近年来研究生入学考试题中的离散数学部分及详细解答。

本书不仅可以作为计算机类、电子类和其它专业本、专科学生离散数学课程的课外辅导书,也可作为报考研究生的参考书,同时也适合离散数学课程自学者的需要。本书尽量避免难题偏题,围绕基本知识点和基本要求,分析典型题例,从易到难,循序渐进,帮助学生轻松掌握基本内容。

本书第 1、2 章及其自测题答案由张卫国编写,第 3、6、7 章及其自测题答案由王忠义编写,第 4、5 章及其自测题答案由周大勇编写,第 8、9 章和自测题答案以及附录 B 由刘晓莉编写,王忠义负责统稿。

由于作者水平所限,加之时间紧,书中瑕疵,敬请读者和同行批评指正。

编者

2008 年 8 月

目 录

第1章 集合	(1)
1.1 集合的概念	(1)
1.1.1 基本知识点	(1)
1.1.2 重点与难点	(1)
1.1.3 典型题解析	(2)
1.2 集合的运算与文氏图	(3)
1.2.1 基本知识点	(3)
1.2.2 重点与难点	(3)
1.2.3 典型题解析	(4)
1.3 递归定义和笛卡儿乘积	(7)
1.3.1 基本知识点	(7)
1.3.2 重点与难点	(7)
1.3.3 典型题解析	(7)
1.4 计数问题	(9)
1.4.1 基本知识点	(9)
1.4.2 重点与难点	(9)
1.4.3 典型题解析	(9)
1.5 自我检测题	(11)
第2章 二元关系	(13)
2.1 关系及其性质	(13)
2.1.1 基本知识点	(13)
2.1.2 重点与难点	(13)
2.1.3 典型题解析	(14)
2.2 关系的乘积、逆关系、闭包运算	(16)
2.2.1 基本知识点	(16)
2.2.2 重点与难点	(17)
2.2.3 典型题解析	(18)
2.3 集合的划分与等价关系	(19)
2.3.1 基本知识点	(19)
2.3.2 重点与难点	(19)
2.3.3 典型题解析	(20)
2.4 偏序关系	(21)

2.4.1	基本知识点	(21)
2.4.2	重点与难点	(21)
2.4.3	典型题解析	(22)
2.5	自我检测题	(24)
第3章	函数(映射)	(27)
3.1	函数及特殊函数	(27)
(1) 3.1.1	基本知识点	(27)
(1) 3.1.2	重点与难点	(27)
(1) 3.1.3	典型题解析	(28)
(1) 3.2	逆函数和复合函数	(31)
(5) 3.2.1	基本知识点	(31)
(6) 3.2.2	重点与难点	(32)
(8) 3.2.3	典型题解析	(32)
(8) 3.3	可数集与不可数集	(34)
(4) 3.3.1	基本知识点	(34)
(7) 3.3.2	重点和难点	(34)
(7) 3.3.3	典型题解析	(35)
(5) 3.4	自我检测题	(37)
第4章	命题逻辑	(40)
(6) 4.1	命题及命题联结词	(40)
(6) 4.1.1	基本知识点	(40)
(6) 4.1.2	重点与难点	(40)
(6) 4.1.3	典型题解析	(41)
(17) 4.2	命题公式及基本等值式	(43)
(81) 4.2.1	基本知识点	(43)
(81) 4.2.2	重点与难点	(43)
(81) 4.2.3	典型题解析	(44)
(84) 4.3	永真式与永真蕴涵式	(46)
(41) 4.3.1	基本知识点	(46)
(81) 4.3.2	重点与难点	(46)
(81) 4.3.3	典型题解析	(47)
(74) 4.4	对偶式及命题范式	(52)
(81) 4.4.1	基本知识点	(52)
(81) 4.4.2	重点与难点	(52)
(81) 4.4.3	典型题解析	(54)
(84) 4.5	命题推理方法	(58)
(08) 4.5.1	基本知识点	(58)
(18) 4.5.2	重点与难点	(58)

4.5.3	典型题解析	(59)
4.6	自我检测题	(66)
第5章 谓词逻辑 (69)		
5.1	谓词与量词	(69)
5.1.1	基本知识点	(69)
5.1.2	重点与难点	(69)
5.1.3	典型题解析	(69)
5.2	谓词公式与永真式	(73)
5.2.1	基本知识点	(73)
5.2.2	重点与难点	(73)
5.2.3	典型题解析	(74)
5.3	基本等值式与永真蕴含式	(76)
5.3.1	基本知识点	(76)
5.3.2	重点与难点	(76)
5.3.3	典型题解析	(77)
5.4	逻辑推理理论	(80)
5.4.1	基本知识点	(80)
5.4.2	重点与难点	(80)
5.4.3	典型题解析	(80)
5.5	自我检测题	(87)
第6章 图论基础 (90)		
6.1	图的基本概念	(90)
6.1.1	基本知识点	(90)
6.1.2	重点与难点	(90)
6.1.3	典型题解析	(91)
6.2	路、回路与图的连通性	(95)
6.2.1	基本知识点	(95)
6.2.2	重点与难点	(95)
6.2.3	典型题解析	(96)
6.3	图的矩阵表示	(99)
6.3.1	基本知识点	(99)
6.3.2	重点与难点	(100)
6.3.3	典型题解析	(101)
6.4	赋权图的最短路与关键路	(104)
6.4.1	基本知识点	(104)
6.4.2	重点与难点	(104)
6.4.3	典型题解析	(106)
6.5	欧拉图和哈密尔顿图	(108)

6.5.1	基本知识点	(108)
6.5.2	重点与难点	(108)
6.5.3	典型题解析	(109)
6.6	自我检测题	(113)
第7章	特殊的图	(117)
7.1	二分图与匹配	(117)
7.1.1	基本知识点	(117)
7.1.2	重点与难点	(117)
7.1.3	典型题解析	(117)
7.2	平面图及其对偶图	(120)
7.2.1	基本知识点	(120)
7.2.2	重点与难点	(120)
7.2.3	典型题解析	(121)
7.3	树图与图的生成树	(123)
7.3.1	基本知识点	(123)
7.3.2	重点与难点	(124)
7.3.3	典型题解析	(125)
7.4	有向树和有根树	(127)
7.4.1	基本知识点	(127)
7.4.2	重点与难点	(127)
7.4.3	典型题解析	(128)
7.5	自我检测题	(131)
第8章	代数系统基础知识	(134)
8.1	基本概念	(134)
8.1.1	基本知识点	(134)
8.1.2	重点与难点	(134)
8.1.3	典型题解析	(135)
8.2	同态与同构	(138)
8.2.1	基本知识点	(138)
8.2.2	重点与难点	(138)
8.2.3	典型题解析	(138)
8.3	群	(140)
8.3.1	基本知识点	(140)
8.3.2	重点与难点	(141)
8.3.3	典型题解析	(142)
8.4	环与域	(146)
8.4.1	基本知识点	(146)
8.4.2	重点与难点	(147)

8.4.3 典型题解析	(147)
8.5 自我检测题	(149)
第9章 格与布尔代数	(153)
9.1 格的基本概念和特殊的格	(153)
9.1.1 基本知识点	(153)
9.1.2 重点与难点	(154)
9.1.3 典型题解析	(154)
9.2 布尔代数和布尔函数	(157)
9.2.1 基本知识点	(157)
9.2.2 重点与难点	(158)
9.2.3 典型题解析	(159)
9.3 自我检测题	(161)
附录 A 自我检测题参考答案	(163)
附录 B 硕士研究生入学考试试题离散数学部分及参考答案	(201)

第1章 集合

1.1 集合的概念

1.1.1 基本知识点

基本概念 集合、元素、基数、包含、子集、集合相等、空集、全集、幂集等。

基本理论 外延性原理：两个集合相等的充分必要条件是它们的元素相同；如果有限集合 A 有 n 个元素，则幂集合 2^A 有 2^n 个元素。

基本计算 判别一个元素是否属于某个集合；判别两个集合是否具有包含关系；求一个集合的幂集合等。

1.1.2 重点与难点

集合与元素 集合是一个不能精确定义的基本概念，通常把具有某种共同性质的事物汇成一个整体，就形成一个集合，一般用大写字母 A, B, C 等表示集合的名称。把组成集合的事物称作元素，一般用小写字母 a, b, c 等表示。经常用到的几个集合有：

N 自然数集

Z 整数集

Q 有理数集

R 实数集

C 复数集

N_m 不大于 m 的非负整数集

如果 a 是集合 A 的一个元素，则记为 $a \in A$ ，读作“ a 属于 A ”；如果 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a \notin A$ ，读作“ a 不属于 A ”。任一集合 A 具有这样的性质，即对于世界上任何事物，它或者属于 A ，或者不属于 A ，二者必居其一，而且仅满足其中之一。

集合的表示 集合通常有三种表示方法，即列举法、描述法和递归定义法（见下节）。列举法就是把集合中元素一一列举出来。例如，“所有小于 8 的正整数”这个集合的元素为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，如果把这个集合命名为 A ，则记为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 。当集合具有有限个元素时，都可以用列举法来表示，但在能清楚表示集合元素的情况下可用省略号来表示具有无限个元素的集合，例如所有能被 3 整除的整数的集合表示为 $\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ 。描述法就是描述集合中元素的共同性质或应满足的条件。例如： $A = \{x \mid x \text{ 是任一动物}\}$ ， $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 且 } x, y \text{ 为实数}\}$ 。

含有有限个元素的集合称为有限集，否则称为无限集。有限集合 A 所含的元素个数称作集合 A 的基数或势，记作 $|A|$ 。

包含与子集 对任意两个集合 A 和 B ，若对任意 $a \in A$ ，必有 $a \in B$ ，则称 A 被 B 包含，或 B 包含 A ，记作 $A \subseteq B$ 。若 $A \subseteq B$ ，则称 A 是 B 的子集，称 B 是 A 的扩集。若 A 是 B 的子集，且

存在 $b \in B$ 但 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 和 B 相等, 记作 $A = B$.

要正确理解集合的从属关系和包含关系, $a \in A$ 当且仅当 $\{a\} \subseteq A$.

空集、全集、幂集 不包含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$. 在一定范围内, 如果所有集合均为某一集合的子集, 则称该集合为全集, 记作 U . 给定集合 A , 由集合 A 的所有子集为元素构成的集合, 叫做集合 A 的幂集, 记为 $\rho(A)$ 或 2^A .

显然对任一集合 A , 有 $\emptyset \subseteq A$, 空集是唯一的, 而全集是相对唯一的. 根据幂集的定义, 若 $A \subseteq B$, 则有 $A \in \rho(B)$.

1.1.3 典型题解析

【例 1.2】 用列举法表示下列集合:

(1) 1 至 100 中的整数的完全平方数的集合;

(2) 不等式 $x^2 - 9x - 36 < 0$ 的整数解的集合;

(3) 12 的质因数的集合.

解 (1) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$.

(2) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 11\}$.

(3) $\{-2, 2, -3, 3\}$.

【例 1.2】 用描述法表示下列集合:

(1) 所有被 3 整除余 1 的正整数的集合;

(2) 不等式 $x^2 - 9x - 36 > 0$ 的解的集合;

(3) 平面直角坐标系中与原点的距离小于 1 的点集的集合.

解 (1) $\{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{N}, k > 0\}$.

(2) $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 12, x \in \mathbf{R}\}$.

(3) $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbf{R}\}$.

【例 1.3】 判断下列各题是否正确:

(1) $\emptyset \in \emptyset$;

(2) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

(3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

(4) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$;

(5) $\emptyset \in \{a, b, c\}$;

(6) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$;

(7) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

(8) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

(9) $\{a\} \in \{a, b, c\}$;

(10) $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$;

(11) $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b, c\}\}$;

(12) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b, c\}\}$.

解 正确的有: (2)、(3)、(4)、(6)、(7)、(8)、(10)、(12); 错误的有: (1)、(5)、(9)、(11).

【例 1.4】 写出 $\{a, b, c, d\}$ 的全部真子集, 并说明它们的基数.

解 基数为 0 的真子集有 1 个, 即 $\emptyset$;

基数为 1 的真子集有 4 个, 即 $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ 和 $\{d\}$;

基数为 2 的真子集有 6 个, 即 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ 和 $\{c, d\}$;

基数为 3 的真子集有 4 个, 即 $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$ 和 $\{b, c, d\}$.

【例 1.5】 设 $A = \{\emptyset\}$, $B = \rho(\rho(A))$, 以下哪个判断是错误的?

(1) $\emptyset \in B$; (2) $\{\emptyset\} \in B$; (3) $\{\{\emptyset\}\} \in B$; (4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \rho(A)$.

解 因为 $\rho(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, 显然 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in B$, 但 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \notin \rho(A)$, 所以(4)是错误的.

1.2 集合的运算与文氏图

1.2.1 基本知识

基本概念 集合的交、并、补、差和对称差运算, 文氏图.

基本理论 集合的运算及其性质; 补集的唯一性定理.

基本计算 计算集合的交、并、补、差和对称差等; 用集合运算的性质判别两个集合是否相等; 用文氏图表示集合等.

1.2.2 重点与难点

集合运算的定义 集合的交、并、补、差和对称差的定义如下:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$\bar{A} = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\} = \{x | x \notin A\}$$

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

集合运算的性质 集合运算的性质如表 1.1. 利用集合运算的性质, 既可以化简集合表达式, 也可以证明集合恒等式.

表 1.1

序号	性质	描述
1	交换律	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \oplus B = B \oplus A$
2	结合律	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
3	分配律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4	吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
5	同一律	$U \cap A = A$, $\emptyset \cup A = A$, $A \oplus \emptyset = A$
6	零律	$\emptyset \cap A = \emptyset$, $U \cup A = U$
7	互补律	$A \cap \bar{A} = \emptyset$ (矛盾律), $A \cup \bar{A} = U$ (排中律)
8	幂等律	$A \cap A = A$, $A \cup A = A$
9	德·摩根律	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
10	对合律	$\bar{\bar{A}} = A$
11	其他	$A - B = A \cap \bar{B}$, $A \oplus A = \emptyset$, $A \oplus \bar{A} = U$, $A \oplus U = \bar{A}$

文氏图 文氏图是形象直观地表示集合及其运算的有力工具, 应当注意的是在画图时除非两个集合肯定有包含关系或不相交, 否则任意两个集合都应画成相交但彼此不包含的关系.

1.2.3 典型题解析

【例 1.6】 设 A, B 为任意集合, 试证明: $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$, $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$, 并举例说明 $\rho(A) \cup \rho(B) \neq \rho(A \cup B)$.

证 $\forall x \in \rho(A) \cup \rho(B)$, 有 $x \in \rho(A)$ 或 $x \in \rho(B)$, 若 $x \in \rho(A)$, 则 $x \subseteq A$, 而 $A \subseteq (A \cup B)$, 故 $x \subseteq A \cup B$, 因此 $x \in \rho(A \cup B)$; 同理, 若 $x \in \rho(B)$, 也有 $x \in \rho(A \cup B)$. 综上所述, $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$.

$\forall x \in \rho(A) \cap \rho(B)$, 有 $x \in \rho(A)$ 且 $x \in \rho(B)$, 即有 $x \subseteq A$ 且 $x \subseteq B$, 则 $x \subseteq A \cap B$, 故 $x \in \rho(A \cap B)$, 从而有 $\rho(A) \cap \rho(B) \subseteq \rho(A \cap B)$; 反推可证 $\rho(A \cap B) \subseteq \rho(A) \cap \rho(B)$, 总之得证 $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$.

设 $A = \{2\}, B = \{3\}$, 则 $\rho(A) \cup \rho(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$, $\rho(A \cup B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$, 显然 $\rho(A) \cup \rho(B) \neq \rho(A \cup B)$.

【例 1.7】 判断下列结论是否正确, 并说明理由:

(1) 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$;

(2) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;

(3) 若 $A \cup B \subseteq A \cap B$, 则 $A = B$;

(4) 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$;

(5) 若 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$, 则 $A \cap C \subseteq B \cap D$;

(6) 若 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$, 则 $A \cup C \subseteq B \cup D$;

(7) 若 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$, 则 $A - C \subseteq B - D$;

(8) 若 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$, 则 $A - D \subseteq B - C$;

(9) $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 当且仅当 $\bar{A} \cup B = U$.

解 (1) 错误, 例如 $A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{2\}$;

(2) 错误, 例如 $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$;

(3) 正确, 因为 $A \subseteq A \cup B \subseteq A \cap B \subseteq B$, 且 $B \subseteq A \cup B \subseteq A \cap B \subseteq A$, 故 $A = B$;

(4) 正确, 因为 $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$, 有 $(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$, 即有 $\emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C$, 从而 $B = C$;

(5) 正确, 因为 $A \cap C \subseteq A \subseteq B, A \cap C \subseteq C \subseteq D$, 故 $A \cap C \subseteq B \cap D$;

(6) 正确, 因为 $A \subseteq B \subseteq B \cup D, C \subseteq D \subseteq B \cup D$, 故 $A \cup C \subseteq B \cup D$;

(7) 错误, 例如 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{2\}, D = \{1, 2\}$;

(8) 正确, 因为 $C \subseteq D$, 故 $\bar{D} \subseteq \bar{C}$, 结合 $A \subseteq B$ 及 (5) 有 $A \cap \bar{D} \subseteq B \cap \bar{C}$, 即 $A - D \subseteq B - C$;

(9) 正确, $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 两边同取补, 由德·摩根律得 $\bar{A} \cup B = U$.

【例 1.8】 证明德·摩根定律第二式 $A \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$.

分析 集合恒等式的证明有两种方法, 一是用集合相等的定义证明; 二是用已有的集合运算的性质证明. 此处利用集合运算的性质并结合补集的唯一性定理 ($B = \bar{A}$ 当且仅当 $A \cup B = U$ 和 $A \cap B = \emptyset$) 来证明.

证 因为 $(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= (A \cup B \cup \bar{A}) \cap (A \cup B \cup \bar{B})$$

$$= (U \cup B) \cap (U \cup A)$$

$$= U \cap U$$

$$= U$$

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= (A \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= ((A \cap \bar{A}) \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap (B \cap \bar{B}))$$

$$= (\emptyset \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \emptyset)$$

$$= \emptyset \cup \emptyset$$

$$= \emptyset$$

(分配律)

(交换律、结合律、排中律)

(零律)

(零律)

(分配律)

(交换律、结合律)

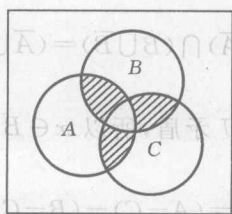
(矛盾律)

(零律)

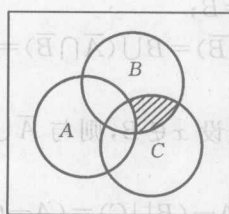
(零律)

故 $A \cup B$ 和 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 互为补集, 从而有 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

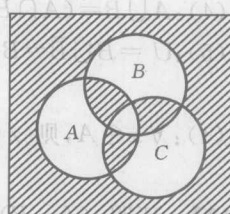
【例 1.9】 分别写出图 1.1 中 3 个文氏图所表示的阴影部分的集合.



(a)



(b)



(c)

图 1.1

解 (1) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - (A \cap B \cap C)$

$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap (\overline{A \cap B \cap C})$$

$$= [(A \cap B) \cap (\overline{A \cap B \cap C})] \cup [(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B \cap C})] \cup [(B \cap C) \cap (\overline{A \cap B \cap C})]$$

$$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (B \cap C \cap \bar{A})$$

$$= (A \cap B - C) \cup (A \cap C - B) \cup (B \cap C - A)$$

$$(2) (B \cap C) - A = B \cap C \cap \bar{A}$$

$$(3) (\overline{A \cup B \cup C}) \cup (A \cap B - C) \cup (A \cap C - B) \cup (B \cap C - A)$$

【例 1.10】 分别用文氏图表示下面 3 个集合:

(1) $A \cap (B - C);$

(2) $A - B - C;$

(3) $A \cap (B \cup \bar{C}).$

解 (1)、(2)、(3) 3 个集合用文氏图表示分别如图 1.2(a)、(b)、(c) 所示.

【例 1.11】 设 A 和 B 为任意集合, 证明以下命题是等价的.

(1) $A \subseteq B;$

(2) $A - B = \emptyset;$

(3) $A \cap B = A;$

(4) $A \cup B = B;$

(5) $\bar{A} \cup B = U.$

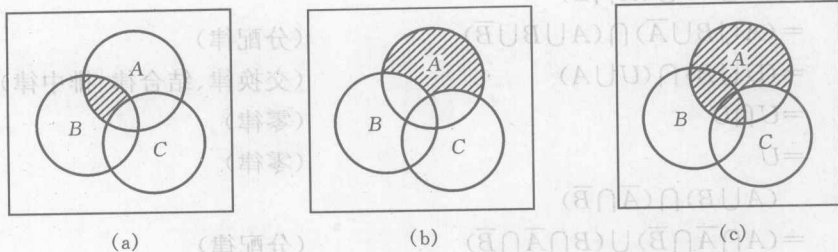


图 1.2

证 只需证明 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ 即可.

(1) $\Rightarrow$ (2): 因为 $A \subseteq B$, 由集合差的定义, 得 $A - B = \emptyset$;

(2) $\Rightarrow$ (3): $A = A \cap U = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$;

(3) $\Rightarrow$ (4): $A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$;

(4) $\Rightarrow$ (5): $U = B \cup \bar{B} = B \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) = B \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (B \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cup B) \cap U = \bar{A} \cup B$;

(5) $\Rightarrow$ (1): $\forall x \in A$, 则 $x \notin \bar{A}$, 假设 $x \notin B$, 则与 $\bar{A} \cup B = U$ 矛盾, 所以 $x \in B$, 从而得证 $A \subseteq B$.

【例 1.12】 证明: $(A - B) - C = A - (B \cup C) = (A - C) - B = (A - C) - (B - C)$.

证 $(A - B) - C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

$A - (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

$(A - C) - B = A \cap \bar{C} \cap \bar{B}$;

$(A - C) - (B - C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B - C)} = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C)$;

$= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup \emptyset = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

综合以上各式, 原式得证.

【例 1.13】 化简下列集合表达式:

(1) $(A \cap B) - (C - (A \cup B))$;

(2) $(A - (B \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$;

(3) $((A \cup (B - C)) \cap A) \cup (B - (B - A))$.

证 (1) $(A \cap B) - (C - (A \cup B))$

$= (A \cap B) \cap \overline{(C - (A \cup B))}$

$= (A \cap B) \cap (\bar{C} \cup A \cup B)$

$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup ((A \cap B) \cap (A \cup B))$

$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B) = A \cap B$;

(2) $(A - (B \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

$= (A \cap \overline{(B \cap C)}) \cup (A \cap B \cap C)$

$= A \cap ((\bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap C)) = A \cap U = A$;

(3) $((A \cup (B - C)) \cap A) \cup (B - (B - A))$

$= A \cup (B \cap \bar{A})$