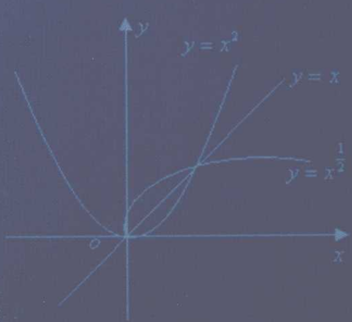
沙荣方　黄建雄　主编

（成教版）

高等数学

GAODENG SHUXUE



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学

（成教版）

主　编　沙荣方　黄建雄

副主编　张丽蕊　金　晔　付　昱

同济大学 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

全书主要内容包括：函数、极限与连续，微分学，积分学，对坐标的曲线积分和曲面积分，无穷级数，微分方程等.

本书可供成人教育本科和大专有关专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：成教版/沙荣方，黄建雄主编. —上海：同济大学出版社，2009.1

ISBN 978-7-5608-3892-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①沙…　②黄…　Ⅲ. 高等数学—成人教育：高等教育—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 187014 号

高等数学(成教版)

主编　沙荣方　黄建雄

责任编辑　辜　翔　　责任校对　杨江淮　　封面设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　17.5

印　　数　1—5 100

字　　数　350 000

版　　次　2009 年 1 月第 1 版　　2009 年 1 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-3892-2

定　　价　38.00 元

前　言

随着高等教育的发展，各种层次的本科大学生教育也蓬勃兴起，针对不同类型大学生的《高等数学》课程的教材建设也成为急需进行的工作.

针对成人教育本科生的高等数学课程教学特点，本书对教学内容体系进行了调整。考虑到不定积分是定积分的主要计算工具，将不定积分的教学内容压缩到定积分中；考虑到一元函数与多元函数在计算方面的许多相似性，将一元函数与多元函数合并教学；对教学中的难点，即微元分析法和多元函数微积分学部分的内容作了较完整的讨论；同时对具有较大应用价值的内容，如函数的幂级数展开，Fourier 级数展开，微分方程等方面的内容作了较多的讨论.

本书在部分内容中运用复指数函数处理正弦余弦函数的技巧，相信对学生快速适应后续课程的学习有较大的帮助. 在函数的幂级数和 Fourier 级数展开内容的部分，采用较多的函数图像说明级数的近似效果，以期学生对该部分较抽象的内容有直观的认识.

本书可作为成人教育本科大学生的“高等数学”课程的教材或教学参考用书，包含了函数的极限与连续，函数的微分学，函数的积分学，对坐标的曲线积分和曲线积分，幂级数和傅立叶级数，常微分方程等方面的内容.

本书的编写工作由沙荣方、黄建雄进行策划，具体编写人员为：沙荣方、黄建雄、张丽蕊、金晔、付昱、张申媛、钱道翠、蒋书法、王春华. 全书的修改和统稿工作由沙荣方、黄建雄完成.

编者
2008 年 12 月

目　　录

1　函数　极限　连续

函数关系是指变量之间的某种依赖关系，它是高等数学主要研究的对象. 极限研究的是变量变化的趋势，极限的概念和方法贯穿于微积分理论，是微积分理论的基础. 连续是描述函数某种性态的一个重要概念.

1.1　函数

1.1.1　邻域与区间

(1) 集合的概念　具有某种特定性质的事物的总体称为集合，用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示. 构成某集合的事物称为该集合的元素，用小写字母 $a,b,\cdots$ 表示. $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素，$a \notin A$ 则表示 a 不是集合 A 的元素.

所有元素都是数的集合称为数集，常用的数集有：自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R**，不含任何元素的集合称为空集 Φ. 如果集合 A 中的任一元素都是集合 B 的元素则称集合 A 是集合 B 的一个子集，用 $A \subset B$ 表示.

(2) 邻域　称数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 是以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域，用符号 $U(x_0,\delta)$ 表示；称数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 是以 x_0 为中心、δ 为半径的去心邻域，用符号 $U^0(x_0,\delta)$ 表示.

数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\} = \{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$；

数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\} = \{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta, x\neq x_0\}$.

(3) 区间　称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，用 (a,b) 表示，其中 a 和 b 称为区间端点，$b-a$ 称为区间长度. 称数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，数集 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 为半开半闭区间. 当区间长度有限时，称该区间为有限区间，否则称其为无限区间.

例如，$[-1,3]$、(a,b) 为有限区间；$(-\infty,+\infty)$、$[a,+\infty)$ 为无限区间；邻域为一开区间；空心邻域为两个开区间的并集.

1.1.2　函数的概念

在许多自然现象和社会现象中，往往多个变量之间存在着相互依赖关系，并遵循一定的规律，我们称这些变量之间存在函数关系.

定义 1-1 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，若对任一 $x \in D$，通过对应法则 f，都有确定的数值 y 与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x \in D$，其中，x 称为自变量，y 称为因变量，称数集 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域，有时将它表达为 D_f，称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 称数集 $\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 R_f.

讨论 1 定义域和对应法则是决定函数关系的两个要素，当且仅当两个函数的定义域和对应法则分别相同时这两个函数才相等.

讨论 2 函数的定义域一般是指使函数表达式有意义的自变量变化范围，称这样的定义域为自然定义域. 根据实际情况确定的函数的自变量变化范围，称为函数的实际定义域.

若对于任一 $x \in D$，都有唯一确定的 y 值与它对应，则称该函数为单值函数，否则，称为多值函数. 如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为单值函数，而方程 $x^2+y^2=1$ 确定的 y 关于 x 的函数为多值函数.

函数主要有三种表示法：表格法、图形法、公式法. 高等数学中最常用的函数表示法是公式法.

下面举几个函数的例子.

例 1-1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases} \quad D_f:(-\infty,+\infty).$$

例 1-2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & x>0, \\ 0 & x=0, \\ -1 & x<0, \end{cases} \quad D_f:(-\infty,+\infty).$$

例 1-3 取整函数

$y=[x]$，表示函数值取不超过 x 的最大整数. 如 $[3]=3$，$[3.1]=3$，$[2.9]=2$.

若函数在其不同的定义域范围内表达式不同，称这样的函数为分段函数，如符号函数.

1.1.3 函数的几种特性

(1) 函数的有界性 为表达方便，我们引入记号“$\forall$”表示词语“任意的”；“$\exists$”表示词语“存在”；“$\ni$”表示“使得”.

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在常数 M，使对 $\forall x \in X$，都有 $f(x) \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在常数 M，使对 $\forall x \in X$，都有

$f(x) \geqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界;如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

显然,$f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是存在常数 $M>0$,使对 $\forall x \in X$,都有 $|f(x)| \leqslant M$. 例如,设 $y=\frac{1}{x}$,因为对 $\forall x \in (1,+\infty)$,都有 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$,所以 $\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界;又因为对 $\forall M>0$(无论它有多大),都有 $\exists x=\frac{1}{M+1}$,$x \in (0,1)$ 使得 $\left|\frac{1}{x}\right|>M$,所以 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界. 见图 1-1.

(2) 函数的单调性　设 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,若对 $\forall x_1, x_2$,只要 $x_1<x_2$,就有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增;若对 $\forall x_1, x_2$,只要 $x_1<x_2$,就有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调降. 例如,$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调降函数,在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数.

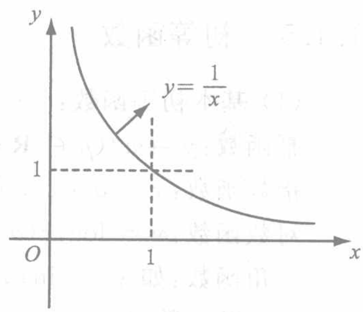


图 1-1

(3) 函数的奇偶性　如果 $f(x)$ 在对称区间 I 上满足:对 $\forall x \in I$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是 I 上的奇函数;如果 $f(x)$ 在对称区间 I 上满足:对 $\forall x \in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是 I 上的偶函数. 例如,$y=\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数;$y=\cos x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

(4) 函数的周期性　如果 $f(x)$ 在 D 上满足:$\exists$ 一个正数 l,使对 $\forall x \in D$,有 $(x+l) \in D$,且 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期,通常所说的 $f(x)$ 的周期是指 $f(x)$ 的最小正周期. 例如:$y=\sin\frac{x}{2}$ 的周期是 4π.

1.1.4　反函数和复合函数

反函数:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,R_f 是 $f(x)$ 的值域,若对 $\forall y \in R_f$,通过对应法则 $y=f(x)$,都有确定的 x 与之对应,形成的变量 x 关于变量 y 的函数,称为 $f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,往往又将 $x=f^{-1}(y)$ 记成 $y=f^{-1}(x)$.

例如,$y=\frac{x}{1+x}$ 的反函数为 $x=\frac{y}{1-y}$,然而,往往我们称 $y=\frac{x}{1-x}$ 是 $y=\frac{x}{1+x}$ 的反函数.

当把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图像画在同一个 xOy 平面上时，两函数图形关于直线 $y=x$ 对称.

复合函数：设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，又函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 和 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 相交为非空集合，则称 $y=f(g(x))$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，称 u 为中间变量.

例如，函数 $y=x^2$ 和 $x=\sin t$ 复合而成 $y=\sin^2 t$，$t\in(-\infty,+\infty)$；而函数 $y=f(u)=\arcsin(2+u)$ 和 $u=g(x)=x^2$ 就不能构成复合函数，因为 $R_u\cap D_f=\phi$.

1.1.5 初等函数

(1) 基本初等函数：

幂函数：$y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）.

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$.

三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等.

反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数，由常数和基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合运算而成的函数称为初等函数，例如，$y=\dfrac{\sqrt{\sin x^2}}{\ln(x^2-1)}+\mathrm{e}^{x+1}$ 是一个初等函数，但函数 $y=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ \cos x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 和函数 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{x^2+n}+\cdots$ 不是初等函数.

本书讨论的大部分是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域

   (1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

2. 下列各题中，函数是否相同？为什么？

   (1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数

$y=\varphi(x)$ 的图形.

4. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=\tan x-\sec x+1$; (2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; (3) $y=|x\cos x|e^{\cos x}$.

5. 下列各函数中哪些是周期函数?若为周期函数指出其周期

(1) $y=\cos(x-1)$; (2) $y=x\tan x$; (3) $y=\sin^2 x$.

6. 求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; (2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

7. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$, $\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$,求 $f(x)$.

8. 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$.

9. 火车站行李收费规定如下:当行李不超过 50kg 时,按 0.15 元/kg 收费,当超出 50kg 时,超重部分按 0.25 元/kg 收费,试建立行李收费 $f(x)$(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系式.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

1) 数列极限的定义

在解决某些实际问题过程中,人们逐渐找到了一种近似、逼近求解的方法,这种方法就是极限的方法.例如,我国古代数学家刘徽用圆内接正 n 多边形的面积 S_n 无限逼近圆面积 S.认为:当圆内接正多边形的边数 n 无限增大时,它的面积 S_n 的趋向值就是圆的面积.

定义 1-2 称按一定次序排列的一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 为无穷数列,简称数列,记为$\{x_n\}$.其中,每个数称为数列的项,x_n 称为通项(或一般项).

一般而言,对于数列$\{x_n\}$,我们都可以观察它的通项 x_n,当 n 无限增大时的趋向值,例如:观察数列 $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$:$0,\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\cdots,\dfrac{n-1}{n},\cdots$,当 n 无限增大时,$\dfrac{n-1}{n}$ 趋向于数值 1.

如果把通项 x_n 看作自变量为 n 的函数 $f(n)=x_n$,则数列$\{x_n\}$可直观地看作平面上一列点(见图 1-2).

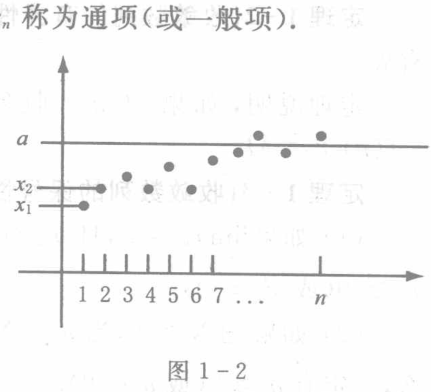


图 1-2

这一列点对应的数值 $f(n)(=x_n)$ 无限接近于数值 a，相当于 $f(n)$ 和 a 的距离 $|f(x)-a|$ 无限接近于零，如果用正数 ε 刻画 $f(n)$ 和 a 的接近程度，那么，"$|f(x)-a|$ 趋于零"，也就是当 n 充分大时，$|f(x)-a|$ 可以小于任何给定的正数 ε. 正是这样的描述实现了极限概念从感性到理性的过渡.

定义 1-3 若对于任意给定的正数 ε(无论 ε 有多小)，总存在正整数 N，$\ni \forall n>N$，都成立 $|f(n)-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{f(n)\}$ 的极限为 a，或称数列 $\{f(n)\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$，或 $f(n)\xrightarrow{n\to\infty}a$.

如果一个数列没有极限，就称该数列发散.

注意 数列极限的定义并未给出求极限的方法，只给出了论证数列 $\{f(n)\}$ 极限为 a 的方法. 该定义又称为 $\varepsilon-N$ 定义.

例 1-4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1.$

证 对 $\forall \varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，一定有：$\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1.$

讨论 要证明对于任一给定的正数 ε，存在使不等式 $|f(n)-a|<\varepsilon,(n>N)$ 成立的 N，就必须找出这样的 N. N 的取值只和 ε 有关，并且 N 的取法不是唯一的，如例 1-4 中，N 也可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 等.

2) 收敛数列的性质

定理 1-1(极限的唯一性) 如果数列 $\{f(n)\}$ 极限存在，那么，它的极限一定唯一.

定理说明，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=b$，必然有 $a=b$.

定理 1-2(收敛数列的有界性) 如果数列 $\{f(n)\}$ 收敛，那么，$\{f(n)\}$ 一定有界.

定理说明，如果 $\{f\{n\}\}$ 收敛，那么，一定存在正数 M，使对 $\forall n$，都有 $|f(n)|<M$.

定理 1-3(收敛数列的保号性)

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$(或 $a<0$)，那么，$\exists N>0$，当时 $n>N$，都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

(2) 如果 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么，一定有 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

定理 1-4(数列和它的子数列收敛的关系) 数列$\{f(n)\}$收敛于 a 的充要条件是$\{f(n)\}$的任一子数列$\{f(n_k)\}$都收敛于 a.

例 1-5 证明数列$\{(-1)^n\}$是发散的.

证 设 $f(n)=(-1)^n$,当 $n=2k$ 时,$f(n)=(-1)^{2k}=1$,所以,$\lim\limits_{k\to\infty}f(2k)=1$;当 $n=2k+1$ 时,$f(n)=(-1)^{2k+1}=-1$,所以,$\lim\limits_{k\to\infty}f(2k+1)=-1$,根据定理 1-4,可知数列$\{(-1)^n\}$发散.

1.2.2 函数的极限

讨论当自变量 x 趋于某个数 x_0(或趋于无穷)时,对应函数值的趋向值问题就是函数的极限问题.

1) 自变量趋于无穷时函数的极限

我们把自变量 x 的绝对值无限增大表示为 $x\to\infty$,自变量 x 的值无限增大趋向正无穷表示为 $x\to+\infty$,自变量 x 的值无限减小趋向负无穷表示为 $x\to-\infty$.

如果在自变量 $x\to\infty$ 的变化过程中,相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于数值 A,那么,就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时极限为 A. 用 ε 语言表达如下.

定义 1-4 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某正数时有定义,如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(无论 ε 有多小),总存在正数 X,使得当 x 满足 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\quad 或\ f(x)\xrightarrow{x\to\infty}A.$$

从几何上来说,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的意义是:作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$,则总存在正数 X,使得当 $|x|>X$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间(见图 1-3).

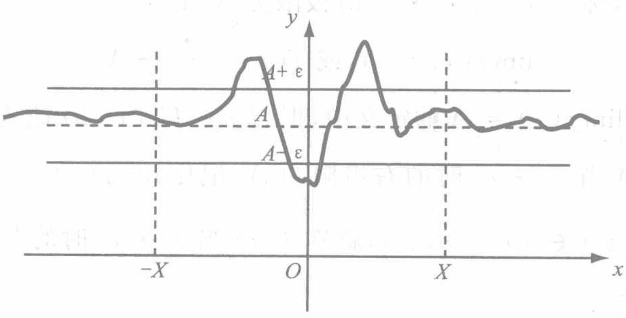


图 1-3

例 1-6 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$.

证 对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\dfrac{2}{x+1}\right|<\varepsilon$,当 $|x|>1$ 时,有 $|x+1|>|x|-1$,这时,$\left|\dfrac{2}{x+1}\right|<\dfrac{2}{|x|-1}$,所以,只要 $\dfrac{2}{|x|-1}<\varepsilon$,即 $|x|>\dfrac{2}{\varepsilon}+1$,因此,取 $X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$,当 $|x|>X$ 时,成立 $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\dfrac{2}{x+1}\right|<\dfrac{2}{|x|-1}<\varepsilon$,所以,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$. 这时,我们称 $y=1$ 为函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的水平渐近线.

如果在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义中,把 $|x|>X$ 改为 $x>X$,则称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时极限是 A,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,则称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时极限是 A,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,容易证明:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad 且\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例 1-7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$.

解 因为函数 e^x 当 $x\to+\infty$ 时对应函数值无限增大,当 $x\to-\infty$ 时对应函数值又无限接近于零,所以,$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

2) 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量的变化过程为 $x\to x_0$(即 x 无限接近 x_0),如果在 $x\to x_0$ 的过程中对应的函数值无限接近于数值 A,那么,就称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限为 A. 用 ε 语言表达如下.

定义 1-5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心领域内有定义,如果存在常数 A,对于 $\forall\varepsilon>0$(无论 ε 有多小),总存在正数 δ,使得对 $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么,称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限为 A,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,或\ f(x)\xrightarrow{x\to x_0}A.$$

类似地,在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中,把 $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$ 改为 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$,就称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;若把 $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$ 改为 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$,就称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

左右极限统称为单侧极限.

容易证明:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

例 1-8 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & 0<x<1,\\ 2x, & 1\leqslant x<3,\\ x^2, & x>3,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$, 所以, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}2x=6$, $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}x^2=9\neq\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$, 所以, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 不存在.

3) 函数极限的性质

定理 1-5(函数极限的唯一性) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则其极限是唯一的.

定理 1-6 (局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 1-7 (局部保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在常数 $\delta>0$,使得当

$$0<|x-x_0|<\delta \text{ 时,有 } f(x)>0(\text{或 } f(x)<0).$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

4) 无穷小和无穷大

在求极限过程中,经常会遇到函数值趋于零和函数值无限增大趋于无穷的情况,我们分别把具有这样极限的函数称为无穷小和无穷大.

定义 1-6 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量,简称无穷小,一般用 α,β 表示.

讨论 1 定义中自变量变化过程也可以是 $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to x_0^+$ 等;

讨论 2 无穷小是指极限为零的函数,而不是一个很小的数;

讨论 3 无穷小和自变量的变化过程密不可分.

例如, $\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小, $\ln x$ 是 $x\to 1$ 时的无穷小, $e^{\frac{1}{x}}$ 是 $x\to 0^-$ 时的无穷小.

定理 1-8 在自变量某一变化过程(如 $x\to x_0$)中, $\lim f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中, α 是自变量同一变化过程($x\to x_0$)中的无穷小,只要令 $\alpha=f(x)-A$ 就可证明上述定理.

定理 1－9 有限个无穷小的和仍为无穷小.

定理 1－10 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例 1－9 求$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 因为x是当$x\to 0$时的无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$是一个有界函数，所以$x\sin\dfrac{1}{x}$是$x\to 0$时的无穷小.

定义 1－7 设函数$f(x)$在x_0的某一空心领域内有定义，如果对任意给定的正数M(无论它多么大)，总存在正数δ，只要$x\in U^0(x_0,\delta)$，就有$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷大量，简称无穷大，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

讨论 1 定义中自变量变化过程也可以是$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to x_0^+$等；

讨论 2 无穷大是指函数值的绝对值无限增大的函数，而不是指一个很大的数；

讨论 3 无穷大和自变量的变化过程密不可分.

例如，$\dfrac{1}{x}$是$x\to 0$时的无穷大，$\ln x$是$x\to 0^+$和$x\to+\infty$时的无穷大，$e^{\frac{1}{x}}$是$x\to 0^+$时的无穷大.

定理 1－11 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，又$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

习题 1.2

1. 观察一般项x_n如下的数列$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限

 (1) $x_n=\dfrac{1}{3^n}$； (2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$； (3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^3}$； (4) $x_n=\dfrac{n-2}{n+2}$；

 (5) $x_n=(-1)^n n$.

2. 设$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$，证明数列$\{a_n\}$没有极限.

3. 在某极限过程中，若$f(x)$有极限，$g(x)$无极限，试判断：$f(x)g(x)$是否必无极限.

4. 讨论函数$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to 0$时的极限.

5. 判断$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}$是否存在，若将极限过程改为$x\to 0$呢？

6. 判断题

(1) 非常小的数是无穷小； (2) 零是无穷小； (3) 无穷小是一个函数；

(4) 两个无穷小的商是无穷小； (5) 两个无穷大的和一定是无穷大.

7. 指出下列哪些是无穷小量，哪些是无穷大量？

(1) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}(n\to\infty)$； (2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}(x\to 0)$； (3) $\dfrac{x+1}{x^2-4}(x\to 2)$.

8. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？当 $x\to+\infty$ 时，函数是否为无穷大？为什么？

9. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

10. 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx}{nx^2+2}$.

1.3 极限运算

本节要建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则.

定理 1-12 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(B\neq 0)$.

讨论 上述定理中“lim”下面可以是自变量的各种变化趋势，$x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 及单侧极限都可以.

定理说明，若两个函数在相同趋势下都有确定的极限，则它们的和、差、积的极限分别等于极限的和，差，积. 若分母的极限是非零常数，则两个函数商的极限等于其极限的商.

讨论 (1)，(2) 可推广到有限个函数的情形.

推论 1 若 $\lim f(x)$ 存在，C 为常数，则 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$；

推论 2 若 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

例 1-10 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-6x+8)$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^3-6x+8)&=\lim_{x\to 2}x^3-\lim_{x\to 2}6x+\lim_{x\to 2}8=(\lim_{x\to 2}x)^3-6\lim_{x\to 2}x+8\\&=2^3-6\times 2+8=4.\end{aligned}$$

例 1-11 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+1)=1\neq 0$.

所以
$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x^2-3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+1)}=\frac{2\times 3+1}{3^2-3\times 3+1}=7.$$