理科

华东师范大学第二附属中学校本课程

华东师范大学第二附属中学 主编

LIKE

四面体中的数学问题

唐立华 著

华东师范大学出版社

华东师范大学第二附属中学
1958 - 2008

华东师范大学
第二附属中学
校本课程

华东师范大学第二附属中学　主编

四面体中的数学问题

唐立华　著

理科

华东师范大学出版社

目录

第一章　四面体的概念及性质

四面体即三维欧氏空间中的三棱锥，是平面三角形在空间的直接推广，它具有一系列可与平面三角形相媲美的有趣而优美的性质，因此有关四面体性质的研究在三维欧氏空间中占据着极其重要的地位，也为研究平面三角形在高维空间的推广提供了一个具体的立体模型和几何直观。

§1.1　空间向量及其运算

在空间中取定一点 O 作为三维直角坐标系的原点，那么空间中任意一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 与有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 构成一一对应，我们称 $\overrightarrow{OP}$ 为点 P 的向量表示。将三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3) 叫做一个三维向量，记为 $\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$，其中 $x_i(i=1, 2, 3)$ 为向量 $\vec{\alpha}$ 的分量。平面向量中的许多概念，例如向量的模、两个向量相等、负向量、零向量、单位向量、两个向量的平行等，在空间向量中仍适用。平面向量的线性运算（如加法、减法、数乘及它们的混合运算）法则和运算律对空间向量亦全部有效。

定义 1　设 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、…、$\vec{\alpha}_n$ 为 $n(n>1)$ 个空间向量，k_1、k_2、…、$k_n\in\mathbf{R}$，若向量 $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n$，则称 $\vec{\beta}$ 为向量组 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、…、$\vec{\alpha}_n$ 的一个线性组合，或称 $\vec{\beta}$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、…、$\vec{\alpha}_n$ 线性表出。

如果存在 k_1、…、k_n 不全为 0，使得 $k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_n\vec{\alpha}=\vec{0}$，$(*)$ 则称向量 $\vec{\alpha}_1$、…、$\vec{\alpha}_n$ 线性相关。如果 $\vec{\alpha}_1$、…、$\vec{\alpha}_n$ 不线性相关，就称其为线性无关，此时由 $(*)$ 可推得 $k_1=\cdots=k_n=0$。

由定义，取空间直角坐标系 $O-xyz$ 中三条坐标轴上的单位向量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，则它们是线性无关的，并对任意的三维向量 $\vec{\alpha}$，可由 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 线性表出，即存在 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}$，使得 $\vec{\alpha}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$。数组 (x_1, x_2, x_3) 称为向量 $\vec{\alpha}$ 的坐标表示，即 $\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$。向量的运算有数量积、向量积和混合积。

定义 2　设 $\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$，$\vec{\beta}=(y_1, y_2, y_3)$，称数量 $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 为 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的数量积，记为 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$；当 $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ 时，也可简

记为$\vec{\alpha}^2$。

由定义 2,我们得出数量积有如下性质:

(1) 交换律　$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$;

(2) 结合律　$(k\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(k\vec{\beta})=k(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$;$(k\in\mathbf{R})$

(3) 分配律　$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$;

(4) 非负性　$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\geqslant 0$,当且仅当$\vec{\alpha}=\vec{0}$时等号成立。

由于对任意的向量 $\vec{\alpha}$,$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\geqslant 0$,于是$\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}$有意义,因此有

定义 3　非负实数$\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}$称为向量$\vec{\alpha}$的模长,记为$|\vec{\alpha}|$。

对于向量的模,我们有

定理 1(Cauchy 不等式)　对于任意的向量$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$,有

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|,$$

当且仅当$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$线性相关时等号成立。

证明　当 $\vec{\beta}=\vec{0}$时,不等式显然成立。下设 $\vec{\beta}\neq\vec{0}$,令t是一个任意实数,考察向量 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+t\vec{\beta}$,则

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}+t\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+t\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}t+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}t^2\geqslant 0,$$

因 $t\in\mathbf{R}$,故上式的判别式非正,即

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})\leqslant 0,$$

亦即　$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|。$$

定理 2(三角不等式)　对任意的向量$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$,有

$$|\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|。$$

证明　由
$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}|^2&=(\vec{\alpha}\pm\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}\pm\vec{\beta})\\&=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\pm 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\\&\leqslant|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2\\&=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2,\end{aligned}$$

即得所要证的不等式。

由定义 3 得,若$\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$,$\vec{\beta}=(y_1, y_2, y_3)$,则向量$\vec{\alpha}-\vec{\beta}$的模长为

(5) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$。

设$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$对应的点分别为 A、B，O 为原点，其中 $A=(x_1, x_2, x_3)$，$B=(y_1, y_2, y_3)$，则 A 与 B 的距离

(6) $d(A, B)=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}x_i^2+\sum_{i=1}^{3}y_i^2-2\sum_{i=1}^{3}x_iy_i}$，简记为 $|AB|$，即

$$d^2(A, B)=d^2(O, A)+d^2(O, B)-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta},$$

或 $$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}[d^2(O, A)+d^2(O, B)-d^2(A, B)]。$$

由定理 2，对空间任意三点 A、B、C，对应的向量依次为$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$，则有

(7) $|AB|\leqslant|AC|+|CB|$。

事实上，$|AB|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})+(\vec{\gamma}-\vec{\beta})|$

$$\leqslant|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|+|\vec{\gamma}-\vec{\beta}|=|AC|+|CB|。$$

由定理 1，我们给出两个向量$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$的夹角的定义。

定义 4 非零向量$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$的夹角$\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$规定为

$$\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle=\arccos\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|},\ 0\leqslant\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle\leqslant\pi。$$

定义 5 如果非零向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角为$\frac{\pi}{2}$，则称 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 垂直（正交），并规定零向量与任意向量均垂直，记为 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$。

定理 3 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ 的充要条件是 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$。

下面我们给出正交向量组的概念。

定义 6 设 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 是三个三维欧氏空间 E^3 中的线性无关向量，当 E^3 中任一向量 $\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$ 可表示为向量组 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 的线性组合时，即

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,$$

则称 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 为 E^3 中的一组基。当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 两两垂直且模长均为 1 时，即为$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$时，则称为 E^3 中的一组正交基。

对于向量的向量积、混合积，我们定义如下

定义 7 设 $\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$，$\vec{\beta}=(y_1, y_2, y_3)$，则称向量

$$(x_2y_3-x_3y_2, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1)$$
$$=\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

为 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的向量积，记为 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$。这个向量与 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 均垂直，且 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 按此顺序成右手系。

由定义 7，我们有向量积的如下性质

(1) 反交换律　$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$；

(2) 数乘结合律　$(k\vec{\alpha})\times\vec{\beta}=k(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})$；

(3) 分配律　$\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}$；

(4) 模长公式　$|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sin\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$。

定义 8 对任意三个 E^3 中的向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$，将 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 作向量积，再与 $\vec{\gamma}$ 作数量积，得数值 $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$，称为 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 的混合积。

混合积 $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ 有如下几何意义：对不共面的向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$，$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ 表示以 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的体积 V，且由数量积、向量积的定义可得

定理 4 设 $\vec{\alpha}=(x_1, x_2, x_3)$，$\vec{\beta}=(y_1, y_2, y_3)$，$\vec{\gamma}=(z_1, z_2, z_3)$，则

(1) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$；

(2) $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$；

(3) $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$；

(4) $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=0$。

下面我们来定义平面及其法向量。

定义 9 设 $\vec{n}=(a_1, a_2, a_3)$ 和 p 为已知向量和实数，称集合 $\{\vec{x}\mid\vec{n}\cdot\vec{x}=p\}$ 为 E^3 中的平面，记作 π。其中 $\vec{n}\neq\vec{0}$ 称为 π 的法向量。

当 $|\vec{n}|=1, p\geqslant 0$ 时，方程 $\vec{n}\cdot\vec{x}=p$ 称为平面 π 的法式方程。

对两个平面 $\pi_1: \vec{n}_1\cdot\vec{x}=p_1$，$\pi_2: \vec{n}_2\cdot\vec{x}=p_2$，称 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 的夹角 θ 为两平面的夹角，$\theta\in[0, \pi)$，且

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}。$$

当 $\theta=0$ 时，$\pi_1 /\!/ \pi_2$。

定理 5 空间一点 $M(x_0, y_0, z_0)$（对应向量记为 $\vec{m}$）到平面 $\pi: \vec{n}\cdot\vec{x}=p$ 上任意一点 $X=(x_1, x_2, x_3)$ 的距离的最小值的点对应的向量为

$$\vec{x}=\vec{m}-\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}-p}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n},$$

且其最小值为

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}-p|}{|\vec{n}|}=\frac{|n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0-p|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}。$$

证明 由定理 1(Cauchy 不等式)，有

$$|MX|=|\vec{m}-\vec{x}|=\frac{|\vec{m}-\vec{x}|\cdot|\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$\geqslant\frac{|(\vec{m}-\vec{x})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}-p|}{|\vec{n}|},$$

其中等号成立当且仅当 $\begin{cases}\vec{m}-\vec{x}=\lambda\vec{n},\\ \vec{n}\cdot\vec{x}=p,\end{cases}$ 即 $\vec{x}=\vec{m}-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}-p}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}$。

由定理 5 可得两平行平面

$$\pi_1: a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=p_1 \text{ 与 } \pi_2: a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=p_2$$

间的距离为
$$d=\frac{|p_1-p_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}。$$

§1.2 四面体及相关概念

在给出四面体的定义之前，我们先来定义空间凸集。

定义 1 设 $K\subset E^3$ 是三维空间中的点集，若连接 K 中任意两点的连线段均包含于 K，则称 K 为凸集。

可以证明：若 K_1、…、K_m 都是凸集，则它们的交集 $K_1 \cap \cdots \cap K_m$ 也是凸集。

一个有界的凸集，我们称其为凸图形。

定义 2 包含图形 G 的最小凸图形称为 G 的凸包。

凸包是研究凸集性质的一个重要工具，下面给出四面体的定义。

定义 3 E^3 中互不平行的四个平面所构成的凸图形，我们称为四面体。或者：设 A_0、A_1、A_2、A_3 是 E^3 中不共面的四点，记 $\vec{v}_i = \overrightarrow{OA_i}(i = 0, 1, 2, 3)$，则点集 $\Omega = \{X \mid \overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \vec{v}_i,\ \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0\}$ 称为以 $A_k(k = 0, 1, 2, 3)$ 为顶点的四面体，其中 $A_iA_j(0 \leqslant i < j \leqslant 3)$ 为四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的棱。

若四面体的六条棱都相等，则称它为正四面体。若四面体的三组对棱分别相等，即 $A_0A_1 = A_2A_3$，$A_0A_2 = A_1A_3$，$A_0A_3 = A_1A_2$，则称它为等腰四面体。若四面体过某个顶点的三条棱两两垂直，则称它为直角四面体。若四面体的一个面为正三角形且该面所对顶点在此面上的射影为正三角形的中心，则称它为正三棱锥。

四面体是三角形在三维欧氏空间中的直接推广，因此，三角形中的许多概念，均可移植到四面体中来，如角、外心、内心、重心、中线、高线等等。

定义 4 在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中，称 $\angle A_iA_jA_k(0 \leqslant i < j < k \leqslant 3)$ 为四面体的面角；记顶点 $A_i(0 \leqslant i \leqslant 3)$ 所对的面为 f_i，面 f_i 与 $f_j(0 \leqslant i < j \leqslant 3)$ 所成的角为四面体的内二面角，记为 $\theta_{ij}(0 \leqslant i < j \leqslant 3)$。

我们知道，三角形的内角和为 π，但任意四面体的六个内二面角之和并不为定值（可举出反例，有兴趣的读者不妨一试）；三角形中至多有一个角为钝角或直角，对四面体，我们有：

定理 1（冷岗松[1]） 四面体的六个二面角中至多有 3 个为钝角或直角。

目前我们仅知文[1]中的高等代数的证明，寻找定理 1 的初等证明也是有意义的。

定义 5 四面体中，过每个面的外接圆圆心且与该面垂直的四条直线交于一点，则该点到四面体的四个顶点等距离，称它为四面体的外接球球心。

类似地，四面体的六个内二面角的平分面也相交于一点，该点到四面体的四个面等距离，称为四面体的内切球球心。

定理 2 四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中,G_i 为 A_i 所对面的重心,则 $A_iG_i(0\leqslant i\leqslant 3)$ 四线交于一点 G,且 $A_iG:GG_i=3:1$,我们称 G 为四面体的重心,A_iG_i 为四面体的中线。

证明 如图 1-1,由于 G_0, G_1 为$\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_0A_2A_3$ 的重心,所以 A_1G_0 与 A_0G_1 相交于 A_2A_3 的中点 M,从而 A_0G_0 与 A_1G_1 必相交,设交点为 G。下证 G 为 A_0G_0, A_1G_1 的四等分点。事实上,利用三角形重心的性质,对$\triangle A_0G_0M$及截线 A_1G_1 应用 Menelaus 定理得:

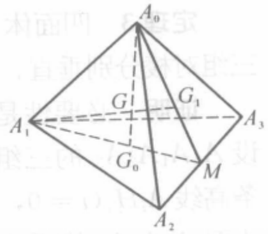

图 1-1

$$\frac{A_0G}{GG_0}\cdot\frac{G_0A_1}{A_1M}\cdot\frac{MG_1}{G_1A_0}=1\Rightarrow\frac{A_0G}{GG_0}=\frac{A_1M}{G_0A_1}\cdot\frac{G_1A_0}{MG_1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{3}{1},$$

同理,G 也是 $A_iG_i(i=1,2,3)$ 的四等分点,故定理 2 得证。

例 1 在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中,设 A_i 所对面的重心为 G_i,记 $a_{ij}=A_iA_j$, $m_i=A_iG_i$ 为中线长,求证:

$$9m_0^2=3(a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2)-(a_{12}^2+a_{23}^2+a_{13}^2)。$$

对 m_1、m_2、m_3 也有类似公式。

证明 取 A_2A_3 中点 M,连结 A_0M、A_1M,设 $A_0M=x$, $A_1M=y$, $\angle A_0G_0A_1=\alpha$,则由三角形的中线公式知

$$x^2=\frac{1}{4}(2a_{02}^2+2a_{03}^2-a_{23}^2),\ y^2=\frac{1}{4}(2a_{12}^2+2a_{13}^2-a_{23}^2)。$$

又由余弦定理,在$\triangle A_0A_1G_0$ 中,有

$$a_{01}^2=m_0^2+\left(\frac{2}{3}y\right)^2-2m_0\cdot\frac{2}{3}y\cdot\cos\alpha, \tag{①}$$

在$\triangle A_0MG_0$ 中,有

$$x^2=m_0^2+\left(\frac{1}{3}y\right)^2-2m_0\cdot\frac{1}{3}y\cdot\cos(\pi-\alpha)。\tag{②}$$

②×2+①,并将 x^2, y^2 代入即得

$$9m_0^2=3(a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2)-(a_{12}^2+a_{23}^2+a_{13}^2)。$$

定义 6 在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中,若 A_iH_i 垂直 A_i 所对的面于点 H_i,则称 A_iH_i 为顶点 A_i 发出的四面体的高线。

我们知道,三角形的三条高线交于一点,即三角形的垂心,但四面体

的四条高线并不一定交于同一点,即四面体不一定有垂心。对于有垂心的四面体(简称为垂心四面体)会具有怎样的几何特征呢?我们有如下

定理 3 四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为垂心四面体的充要条件是四面体的三组对棱分别垂直。

证明 必要性是显然的。下面来证充分性。设 $A_0A_1A_2A_3$ 的三组对棱分别垂直,我们来证四条高线 $A_iH_i(i=0,1,2,3)$ 共点于 H。先证 H_0 为面 $A_1A_2A_3$ 的垂心。因 $A_0H_0\perp$ 面 $A_1A_2A_3$ 于 H_0,又 $A_0A_1\perp A_2A_3$,A_0A_1 在面 $A_1A_2A_3$ 内的射影为 A_1H_0,故由三垂线定理的逆定理得 $A_1H_0\perp A_2A_3$,同理 $A_2H_0\perp A_1A_3$,即 H_0 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心。延长 A_1H_0,交 A_2A_3 于 M,连结 A_0M,在 $\triangle A_0A_1M$ 中作 $A_1H_1'\perp A_0M$,由于 $A_2A_3\perp$ 面 A_0A_1M,故 $A_1H_1'\perp A_2A_3$,从而 $A_1H_1'\perp$ 面 $A_0A_2A_3$,于是 A_1H_1' 就是面 $A_0A_2A_3$ 的高线 A_1H_1,设 A_0H_0 与 A_1H_1 交于点 H。同理可证 A_iH_i 与 $A_jH_j(0\leqslant i<j\leqslant 3)$ 均相交,即任意两条高线相交,但任三条高线不共面,故得它们必相交于同一点 H,即四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为垂心四面体。

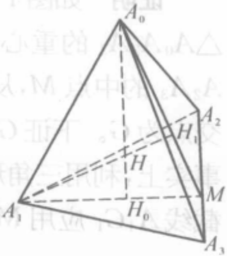

图 1-2

推论 四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为垂心四面体的充要条件是:$A_0A_1^2+A_2A_3^2=A_0A_2^2+A_1A_3^2=A_0A_3^2+A_1A_2^2$,即三组对棱的平方和相等。

事实上,由定理 3,只要证明上述条件等价于三组对棱分别垂直即可。利用图 1-2,由对棱 $A_0A_1\perp A_2A_3$,过 A_1 作 $A_1M\perp A_2A_3$ 于 M,连 A_0M,则 $A_2A_3\perp$ 面 A_0A_1M,从而 $A_0M\perp A_2A_3$。对 $\triangle A_0A_2A_3$ 与 $\triangle A_1A_2A_3$ 应用余弦定理,得

$$A_0A_3^2=A_0A_2^2+A_2A_3^2-2A_0A_2\cdot A_2A_3\cos\angle A_0A_2A_3,$$

$$A_1A_3^2=A_1A_2^2+A_2A_3^2-2A_1A_2\cdot A_2A_3\cos\angle A_1A_2A_3。$$

而 $A_0A_2\cos\angle A_0A_2A_3=A_2M=A_1A_2\cos\angle A_1A_2A_3$ (*),故得

$$A_0A_2^2+A_2A_3^2-A_0A_3^2=A_1A_2^2+A_2A_3^2-A_1A_3^2,$$

即 $A_0A_2^2+A_1A_3^2=A_0A_3^2+A_1A_2^2$,同理 $A_0A_1^2+A_2A_3^2=A_0A_2^2+A_1A_3^2$,必要性得证。

反之,若 $A_0A_2^2+A_1A_3^2=A_0A_3^2+A_1A_2^2$,由上面的推导知(*)成立,从而 $A_0M\perp A_2A_3$ 与 $A_1M'\perp A_2A_3$ 的垂足 M 与 M' 重合,故 $A_2A_3\perp$ 面 A_0MA_1,所以 $A_0A_1\perp A_2A_3$,同理可得另两组对棱也分别

垂直，充分性得证。

下面我们来给出四面体的体积公式。我们将几何体占有空间部分的大小叫做它的体积。利用柱体的体积等于其底面积 S 与高 h 的乘积，借助于图形的分割和祖暅原理，可得四面体（三棱锥）的体积 V 等于底面积 S 与高 h 的乘积的 $\frac{1}{3}$，即

定理 4 在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中，A_i 所对面的面积为 S_i，A_i 发出的高线长为 h_i，则四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}S_ih_i(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)。$$

例 2 求证：在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中，有

(1) $V=\frac{2}{3a}S_iS_j\sin\theta_{ij}$，其中 θ_{ij} 是面 f_i 与 f_j 以棱 a 所构成的二面角，S_i 为面 f_i 的面积；

(2) $V=\frac{1}{6}abc\sin\alpha\sin\beta\sin C$。其中 a，b，c 为自顶点 A_0 引出的三条棱长，α，β 为点 A_0 处的两个面角，C 为面 α 与面 β 所夹的二面角。

(3) $V=\frac{1}{6}aa'd\sin\theta$，其中 a，a' 为四面体的一组对棱的长，d 为 a 与 a' 之间的距离，θ 为 a 与 a' 所成的角。

证明 (1) 过 A_0 作 $A_0H_0\perp$ 面 S_0 于 H_0，作 $H_0M\perp A_2A_3$ 于 M，连 A_0M，则 $A_0M\perp A_2A_3$，于是 $\angle A_0MH_0=\theta_{01}$，$f_0$ 与 f_1 所夹棱为 $A_2A_3=a$，于是 $A_0H_0=A_0M\cdot\sin\theta_{01}$，又 $2S_1=A_0M\cdot a$，所以由定理 4 及上两式得

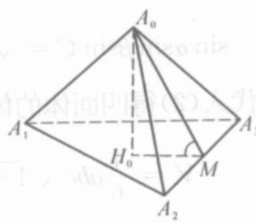

图 1-3

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}S_0\cdot A_0H_0=\frac{1}{3}S_0\cdot A_0M\cdot\sin\theta_{01}\\&=\frac{1}{3}S_0\cdot\frac{2S_1}{a}\cdot\sin\theta_{01}=\frac{2}{3a}S_0S_1\sin\theta_{01}。\end{aligned}$$

同理可得其他情形。

(2) 设 $\angle A_2A_0A_3=\alpha$，$\angle A_3A_0A_1=\beta$，$\angle A_1A_0A_2=\gamma$，以 A_0A_3 为棱的二面角为 C，$A_0A_1=a$，$A_0A_2=b$，$A_0A_3=c$，则由(1)得

$$V=\frac{2}{3c}S_1S_2\sin C,$$

又 $S_1=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$，$S_2=\frac{1}{2}ca\sin\beta$，代入上式即得

$$V=\frac{1}{6}abc\sin\alpha\sin\beta\sin C。$$

(3) 如图1-4，设$A_0A_2=a$，$A_1A_3=a'$，所成角为θ，a与a'之间的距离为d。过A_2作$A_2A \underline{\mathbin{/\!/}} A_1A_3$，则$A_1A_2AA_3$为平行四边形，于是$A_1A_3\mathbin{/\!/}$平面$A_0A_2A$，$\angle A_0A_2A=\theta$，且$A_1A_3$与$A_0A_2$的距离等于$A_3$到面$A_0A_2A$的距离为$d$。所以

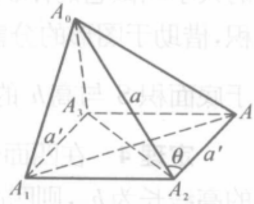

图 1-4

$$V=\frac{1}{2}\cdot V_{A_0\text{-}A_1A_2AA_3}=V_{A_0\text{-}A_2AA_3}=V_{A_3\text{-}A_0A_2A}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\triangle A_0A_2A}=\frac{1}{3}d\cdot\left(\frac{1}{2}aa'\sin\theta\right)=\frac{1}{6}aa'd\sin\theta。$$

［**注记**］ 1° 利用三面角的余弦定理，设面角α，β，γ所对的以A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3为棱的二面角分别记为A，B，C，则

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C\ 等，$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma\ 等，$$

由上式可求得

$$\sin\alpha\sin\beta\sin C=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

代入(2)得四面体的体积

$$V=\frac{1}{6}abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}。$$

2° 同上面的记法，由(2)得三面角的正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}=\frac{abc\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{6V}。$$

3° 设$A_i(x_i, y_i, z_i)$为点A_i的直角坐标，则四面体$A_0A_1A_2A_3$的体积

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\ 的绝对值。$$

我们知道，三角形的面积可由三条边长表示，即 Heron 公式，对四

面体，由文献[2]的结论知也有如下

定理 5 设 $a_{ij}=A_iA_j$ 为四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的棱长，则四面体的体积 V 满足：

$$V^2=\frac{1}{288}D=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a_{01}^2 & a_{02}^2 & a_{03}^2\\ 1 & a_{10}^2 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2\\ 1 & a_{20}^2 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2\\ 1 & a_{30}^2 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0\end{vmatrix},$$

其中 D 为 5 阶 Cayley-Menger 行列式。

例 3 设四面体 $ABCD$ 的体积为 $V=5$，过 AD，BC 的中点 K，N 作一截面交 CD 于 M，若 $CM:MD=3:2$，点 A 到截面的距离为 1，求截面面积。

解 延长 NM 交 BD 的延长线于 J，连结 JK 并延长交 AB 于 L，则 $KLNM$ 为所求截面。对 $\triangle BCD$ 及直线 JMN 应用 Menelaus 定理，有

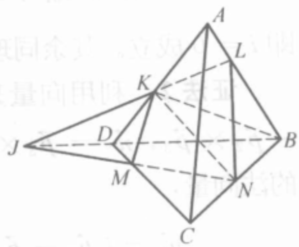

图 1-5

$$\frac{JD}{JB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CM}{MD}=1\Rightarrow\frac{JD}{JB}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{JD}{BD}=2,$$

同理，对 $\triangle ABD$ 及直线 JKL 应用 Menelaus 定理，得 $\frac{AL}{LB}=\frac{2}{3}$，又 $CM:MD=3:2$，所以

$$V_{K\text{-}DMNB}=\left(1-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}V=\frac{7}{20}V,$$

$$V_{N\text{-}KLB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}V=\frac{3}{20}V,$$

$$V_{A\text{-}MCN}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{3}{10}V,$$

又 $V=V_{A\text{-}MCN}+V_{N\text{-}KLB}+V_{K\text{-}DMNB}+V_{A\text{-}MNLK}$，

所以 $V_{A\text{-}MNLK}=\frac{1}{5}V=\frac{1}{3}S_{截面}\cdot h=\frac{1}{3}S_{截面}$，从而 $S_{截面}=\frac{3}{5}V=3$。

§1.3 四面体的余弦定理及正弦定理

本节中我们将三角形的正、余弦定理推广到空间四面体上去，为此

先来介绍射影定理的推广。

射影定理 在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中，A_i 所对面记为 f_i，面积为 S_i，面 f_i 与 f_j 所成的内二面角为 θ_{ij}，则

$$S_i=\sum_{j\neq i}S_j\cdot\cos\theta_{ij},\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3。$$

证法 1 如图 1 - 6，过 A_0 作 $A_0H_0\perp$ 面 $A_1A_2A_3$ 于 H_0，连结 A_1H_0，A_2H_0，A_3H_0，过 H_0 作 $H_0M\perp A_2A_3$ 于 M，连结 A_0M，则 $A_0M\perp A_2A_3$，则 $\angle A_0MH_0=\theta_{01}$，于是 $S_{\triangle H_0A_2A_3}=S_1\cos\theta_{01}$，同理可得：$S_{\triangle H_0A_3A_1}=S_2\cos\theta_{02}$，$S_{\triangle H_0A_1A_2}=S_3\cos\theta_{03}$，故

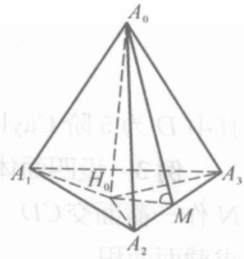

图 1 - 6

$$\begin{aligned}S_0&=S_{\triangle H_0A_2A_3}+S_{\triangle H_0A_3A_1}+S_{\triangle H_0A_1A_2}\\&=S_1\cos\theta_{01}+S_2\cos\theta_{02}+S_3\cos\theta_{03}。\end{aligned}$$

即 $i=0$ 成立。其余同理可证。

证法 2 利用向量来证。记 $\vec{p}_i=\overrightarrow{A_0A_i}(i=1,\ 2,\ 3)$，则 $\vec{n}_1=-\vec{p}_2\times\vec{p}_3$，$\vec{n}_2=\vec{p}_3\times\vec{p}_1$，$\vec{n}_3=-\vec{p}_1\times\vec{p}_2$ 分别是面 f_1，f_2，f_3 上的法向量，

$$\vec{n}_0=(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\times(\vec{p}_3-\vec{p}_1)=-\vec{n}_1-\vec{n}_2-\vec{n}_3$$

是面 f_0 的法向量。由于 θ_{ij} 是内二面角，与 $\vec{n}_i$ 和 $\vec{n}_j$ 的夹角互补，故由向量的夹角公式有

$$\cos\theta_{ij}=-\frac{\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j}{|\vec{n}_i|\cdot|\vec{n}_j|}。\qquad ①$$

又由向量积的定义，有

$$S_i=\frac{1}{2}|\vec{n}_i|,\qquad ②$$

由①②得

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i}S_j\cos\theta_{ij}&=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{3}\frac{-\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j}{4S_i}=-\frac{1}{4S_i}(\vec{n}_i\cdot\sum_{j\neq i}\vec{n}_j)\\&=\frac{|\vec{n}_i|^2}{4S_i}=S_i。\end{aligned}$$

推论 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&-\cos\theta_{ij}\\-\cos\theta_{ji}&1\end{pmatrix}$，则其行列式的值为 0，即

$\det A=0$。

证明 由射影定理，有

$$\begin{cases}S_0-S_1\cos\theta_{01}-S_2\cos\theta_{02}-S_3\cos\theta_{03}=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ -S_0\cos\theta_{40}-S_1\cos\theta_{41}-S_2\cos\theta_{42}+S_3=0。\end{cases}$$

这个关于 S_0，S_1，S_2，S_3 的齐次线性方程组有非零解，故其系数矩阵的行列式等于 0。

推论 1 与三角形相对应的是恒等式：

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C。$$

推论 2 $2S_i<S_0+S_1+S_2+S_3$，$i=0,1,2,3$。

余弦定理 设四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的顶点 A_i 所对面 f_i 的面积为 S_i，侧面 f_i 与 f_j 所成的内二面角为 θ_{ij}，则

$$S_k^2=\sum_{i\neq k}S_i^2-2\sum_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant 3\\ i,\,j\neq k}}S_iS_j\cos\theta_{ij}。\quad(k=0,1,2,3)。$$

证明 由射影定理的证法 2 知，有

$$\vec{n}_0=-\vec{n}_1-\vec{n}_2-\vec{n}_3,$$

上式两边作数量积，得

$$|\vec{n}_0|^2=|\vec{n}_1|^2+|\vec{n}_2|^2+|\vec{n}_3|^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j,$$

将 $\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j=-|\vec{n}_i|\cdot|\vec{n}_j|\cos\theta_{ij}$ 及 $|\vec{n}_i|=2S_i$ 代入上式即得。

［注记］ 1° 将余弦定理的 4 个式子相加得：

$$S_0^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2=2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 3}S_iS_j\cos\theta_{ij}。$$

2° 若四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 是以 A_0 为直角顶点的直角四面体，则有

$$S_0^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2。$$

3° 设 D 为 5 阶 Cayley-Menger 行列式（见 § 1.2 定理 5），用 D_{ij} 表示 a_{ij}^2 的代数余子式，则[2]

$$\cos\theta_{ij}=-\frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{ii}}\cdot\sqrt{D_{jj}}}\quad(i,\,j=0,1,2,3)。$$

4° 利用射影定理也可证明余弦定理，留给有兴趣的读者来完成。