竞赛培优

实践新课程 探索新方法 体验新理念

新课标
数学竞赛阶梯训练

八年级

丁保荣 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新课标数学竞赛阶梯训练

（八年级）

丁保荣　主编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学竞赛阶梯训练·八年级 / 丁保荣主编．—杭州：浙江大学出版社，2004.7(2008 重印)
ISBN 978-7-308-03738-9

Ⅰ.新... Ⅱ.丁... Ⅲ.数学课—初中—习题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 015218 号

新课标数学竞赛阶梯训练·八年级

主编 丁保荣

责任编辑 董雯兰 钱欣平
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571—88925592，88273066(传真)
排　　版 杭州求是图文制作有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 15.5
字　　数 310 千字
版 印 次 2004 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 11 次印刷
印　　数 49001-51000
书　　号 ISBN 978-7-308-03738-9
定　　价 18.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

编写说明

新课改下的数学教学“要创造性地使用教材，积极开发、利用各种教学资源为学生提供丰富多彩的学习素材；关注学生的个性差异，有效地实施差异教学，使每个学生都得到发展”。“对于学有余力并对数学有浓厚兴趣的学生，教师要为他们提供足够的材料，指导他们阅读，发展他们的数学才能。”

为此，我们策划了新课标数学竞赛同步阶梯训练丛书，共分七年级、八年级、九年级三个分册。本丛书进行了新的探索，分年级配合教学进度，顺应学习需要，使初中数学竞赛(数奥)大纲的知识点同步渗透在新教材的各章训练中，为教师提供一种崭新的指导思想，为学生提供一种科学的训练方法。编写过程中，力求突出以下几点：

1. 体验新课改理念

本丛书以新课改下的新教材为背景，以新课标“初中数学竞赛大纲”为指南，培养学生的科学探究精神和创新思维习惯，以激发独立思考和创新意识。

2. 探索新解题方法

本丛书以近年来全国各地中考、国内外各级数学中的典型试题为编选范围，集中体现新中考、新竞赛、新特点。如：由知识立意转向能力立意，在知识交会点上命题，强调应用、创新意识培养，倡导问题的开放性、探索性等。

3. 实践新训练模式

本套书与新课标下的新教材各章完全同步，将数学奥林匹克竞赛对知识与能力的要求渗透在与课程同步的阶梯训练题中。丛书通过丰富的栏目实践新课标的理念，【赛点导入】为你导航；【赛题精析】为你引路；【赛题训练】让你大显身手；详尽的【参考答案】让更多学生得到发展的数奥训练模式。丛书以同步超前训练为特色，促进学生数学才能的发展，丛书是提高学生数学素养的理想读物。

本套书在编著过程中得到金华市教科所原所长黄维龙老师，数学教研员蒋光清、徐显扬老师，义乌市的丁金达、吴务伦老师的指点，义乌市绣湖中学数学组的方利生、王桂芳、王帼芳、王菊清、刘智建、刘旭萍、朱秀云、朱汝芳、朱晓燕、朱海妹、何星天、陈晓岚、陈志强、罗大明、秀惠民、金旭颖、金和谦、骆雄军、戚茂功等老师帮助编选。

丁保荣

目　　录

八年级(上册)

八年级(下册)

八年级(上册)

一 勾股定理(直角三角形)

【赛题导入】

1. 直角三角形有许多特殊性质,比如有两条边互相垂直、两个锐角互余,30°角所对的直角边等于斜边的一半、勾股定理等,这些知识在中考及各类竞赛中常考不衰.

2. 勾股定理是现阶段求线段长度的主要方法,若图形缺乏直角条件,则可通过作辅助垂线的方法,构造直角三角形为勾股定理的应用创造条件.

3. 运用勾股定理的逆定理,通过代数计算方法证得直角,是证明两直线垂直的一种重要方法.

【赛题精析】

例1 如图 1-1,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A=60°$,$\angle B=\angle D=90°$,$BC=2$,$CD=3$,则 AB =( )

A. 4 B. 5 C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

[分析] 通过作辅助线将四边形问题转化为三角形问题解决,关键是对内分割还是向外补形.

例2 如图 1-2,一个直角三角形的三边长均为正整数,已知它的一条直角边的长恰是 1997,那么另一条直角边的长是________. (1997 年北京市竞赛题)

[分析] 设另一直角边为 x,斜边为 y,由勾股定理得关于 x、y 的方程,解不定方程即可.

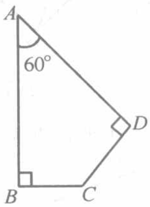


图 1-1

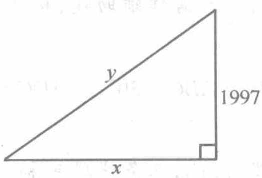


图 1-2

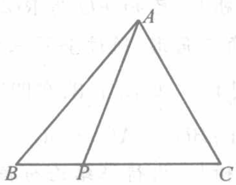


图 1-3

例3 如图 1-3,P 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的一点,且 $PC=2PB$,已知 $\angle ABC=45°$,$\angle APC=$

60°,求$\angle ACB$的度数. (“祖冲之杯”邀请赛试题)

[分析] 不会简单地由角的关系推出$\angle ACB$的度数,综合运用条件$PC=2PB$及$\angle APC=60^\circ$,构造出含30°的直角三角形是解本例的关键.

例4 如图1-4,已知$AB=13,BC=14,AC=15,AD\perp BC$,交$BC$于$D$,求$AD$的长.

(2000年武汉市初三数学竞赛试题)

[分析] 若设$CD=x$,则$BD=14-x$,根据勾股定理,可列出关于AD和x的两个方程.

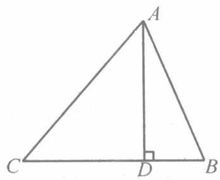


图1-4

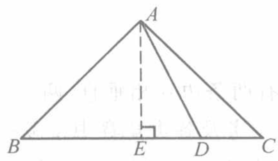


图1-5

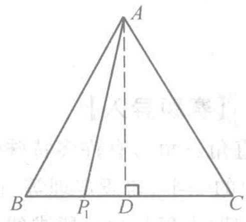


图1-6

例5 如图1-5,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=90^\circ$,$AB=AC$,D是BC上的点,求证:$BD^2+CD^2=2AD^2$.

(1995年南京市初二数学竞赛试题)

[分析] 过A点作$\triangle ABC$的高AE,则$AE=BE=CE$,利用勾股定理$AD^2=AE^2+ED^2$来证明.

例6 如图1-6,在$\triangle ABC$中,$AB=AC=2$,BC边有100个不同的点$P_1,P_2,\cdots,P_{100}$,记$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC(i=1,2,\cdots,100)$,求$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的值.

(1990年全国初中联赛试题)

[分析] 作$\triangle ABC$的高AD,利用勾股定理求出各个m_i的值.

例7 如图1-7,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90^\circ$,$\angle BAC=30^\circ$,分别以AB、AC为边在$\triangle ABC$的外侧作等边$\triangle ABE$和等边$\triangle ACD$,DE与AB交于F,求证:$EF=FD$.

(上海市竞赛题)

[分析] 已知FD为Rt$\triangle FAD$的斜边,因此需作辅助线,构造以EF为斜边的直角三角形,通过全等三角形证明.

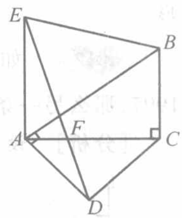


图1-7

例8 如图1-8,在四边形$ABCD$中,$\angle ABC=30^\circ$,$\angle ADC=60^\circ$,$AD=CD$,求证:$BD^2=AB^2+BC^2$.

(北京市竞赛题)

[分析] 由待证结论易联想到勾股定理,因此,三条线段可构造成直角三角形,应设法将这三条线段集中在同一三角形中.

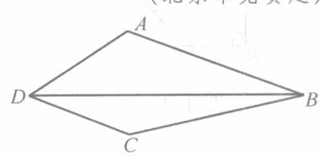


图1-8

【赛题训练】

A　级

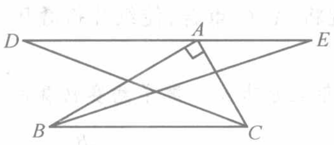
1. 如果一个三角形的一条边是另一条边的 2 倍,并且有一个角是 30°,那么这个三角形的形状是(　　)　　(山东省竞赛题)

A. 直角三角形　　B. 钝角三角形　　C. 锐角三角形　　D. 不能确定

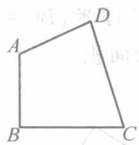
2. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle BAC=90°$,过顶点 A 的直线 $DE\parallel BC$,$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线分别交 DE 于点 E、D,若 $AC=6$,$BC=10$,则 DE 的长为(　　)

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

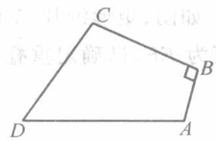
3. 如图,四边形 $ABCD$ 中,已知 $AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$,且 $\angle B=90°$,则 $\angle DAB=$ ________.　　(上海市竞赛题)



(第 2 题)



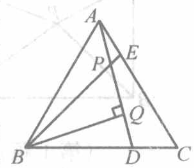
(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,四边形 $ABCD$ 中,$AB=6$cm,$BC=8$cm,$CD=24$cm,$DA=26$cm,且 $\angle ABC=90°$,则四边形 $ABCD$ 的面积是________ cm^2.　　(“希望杯”竞赛题)

5. 如图,△ABC 中,$AB=BC=CA$,$AE=CD$,AD、BE 相交于 P,$BQ\perp AD$ 于 Q,求证:$BP=2PQ$.　　(北京市竞赛题)

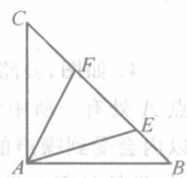


(第 5 题)

6. 已知直角三角形的两直角边长分别为 l 厘米,m 厘米,斜边长为 n 厘米,且 l、m、n 均为正整数,l 为质数.求证:$2(l+m+1)$是完全平方数.

7. 如图,在等腰直角△ABC 的斜边上取异于 B、C 的两点 E、F,使 $\angle EAF=45°$,求证:以 EF、BE、CF 为边的三角形是直角三角形.

(1991 年郑州市初二数学团体赛试题)



(第 7 题)

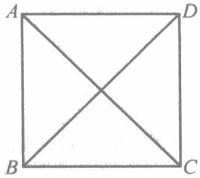
8. 在等腰 Rt△ABC 的斜边 AB 所在的直线上有一点 P,满足 $S=AP^2+BP^2$,试探求 P 点的位置变化时,S 与 $2CP^2$ 的大小关系,并证明你所得到的结论.

9. 我们可以用四个相同的等腰直角三角形拼成一个边长为等腰直角三角形斜边的正方形(如图).

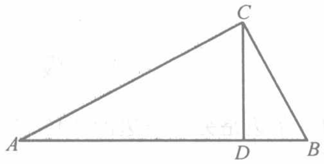
设等腰直角三角形的直角边为 a,斜边为 c,根据面积关系可得:$4\times\frac{1}{2}a^2=c^2$,即 $a^2+a^2=c^2$,这样我们就证明了等腰直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

根据这一思路,你能否证明勾股定理.

10. 如图,△ABC 中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$ 于 D 点,欲求 AC 的长度,应补充哪些边的条件?



(第 9 题)



(第 10 题)

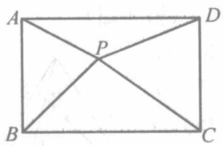
B　级

1. 如图,P 是长方形 $ABCD$ 内一点,已知 $PA=3,PB=4,PC=5$,求 PD^2 的值.

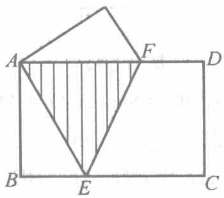
(1996 年第九届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题)

2. 如图,矩形纸片 $ABCD$ 中,$AB=3$ 厘米,$BC=4$ 厘米,现将 A、C 重合,使纸片折叠压平,设折痕为 EF,试确定重叠部分$\triangle AEF$ 的面积.

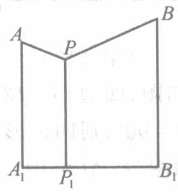
(1997 年北京市初二数学竞赛初赛试题)



(第 1 题)



(第 2 题)

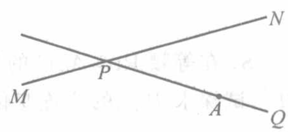


(第 3 题)

3. 如图,已知$\angle A=\angle B$,AA_1、PP_1、BB_1 均垂直于 A_1B_1,$AA_1=17$,$PP_1=16$,$BB_1=20$,$A_1B_1=12$,求 $AP+PB$ 的长.

(1997 年全国初中数学联赛试题)

4. 如图,公路 MN 和公路 PQ 在点 P 处交汇,且$\angle QPN=30^\circ$,点 A 处有一所中学,$AP=160$ 米,假设拖拉机行驶时,周围 100 米以内会受到噪声的影响,那么拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶时,学校是否会受到噪声影响?请说明理由,如果受影响,已知拖拉机的速度为 18 千米/小时,那么学校受影响的时间为多少秒?



(第 4 题)

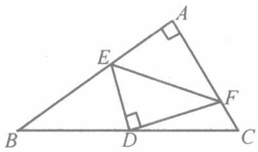
5. 在$\triangle ABC$ 中,若 $AB=2BC$,$\angle B=2\angle A$,试判断$\triangle ABC$ 是什么三角形(对角而言),并说明理由.

(1992 年四川省竞赛题)

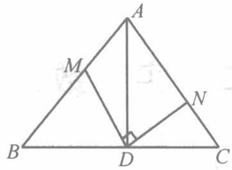
6. 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle A=90^\circ$,D 为斜边 BC 中点,$DE\perp DF$,求证:$EF^2=BE^2+CF^2$.

(2000 年江苏省竞赛题)

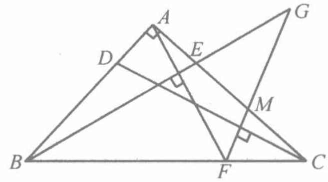
7. 如图,在$\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的中线,点 M 在 AB 边上,点 N 在 AC 边上,并且$\angle MDN=90^\circ$,如果 $BM^2+CN^2=DM^2+DN^2$,求证:$AD^2=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2)$.



(第 6 题)



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图,等腰直角$\triangle ABC$中,$\angle BAC=90°$,$AD=AE$,$AF\perp BE$交BC于点F,过F作$FG\perp CD$,交BE延长线于G.求证:$BG=AF+FG$. (1999 年重庆市初二数学竞赛初赛试题)

9. 周长为 6,面积为整数的直角三角形是否存在?若不存在,请给出证明;若存在,请证明共有几个?

10. 阅读下题的解题过程:

已知a、b、c为$\triangle ABC$的三边,且满足$a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$,试判断$\triangle ABC$的形状.

解:$\because a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$ (A)

$\therefore c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ (B)

$\therefore c^2=a^2+b^2$ (C)

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

(1)上述解题过程,从哪一步开始出现错误?请写出该步代号________;

(2)错误原因为________;

(3)本题正确的结论是________.

二 实 数

【赛点导入】

1. 实数包括有理数与无理数,有理数的所有运算性质和运算律都适用于实数.

2. 开不尽方的算术平方根是一类重要的无理数,实数运算的关键是算术平方根的化简和运算,其中有三点必须引起注意:

(1)多重根式的化简和计算:若 $a+b=A, a\cdot b=B$,则 $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}=|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}|$.

(2)分母有理化:$\sqrt{2}$的一个有理化因式是$\sqrt{2}$;$\sqrt{2}+\sqrt{3}$的一个有理化因式是$\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

(3)实数的整数部分和小数部分:先通过估算已知无理数,确定其整数部分 a 的值,再用已知无理数与 a 的差表示小数部分.

【赛题精析】

例1 化简$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. (第三届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题)

[分析] 解本题的关键是将 $3-2\sqrt{2}$ 化成一个平方数,这里 $3=2+1=(\sqrt{2})^2+1^2$,所以 $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$.

例2 化简$\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (1993 年北京市初二数学竞赛初赛试题)

[分析] 解本题可以将 $4+2\sqrt{3}$ 与 $4-2\sqrt{3}$ 分别化成一个平方数化简;另外由于 $4+2\sqrt{3}$ 与 $4-2\sqrt{3}$ 是互为有理化因式,并且$(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=4$,因此原式平方后是一个正整数,我们也可以利用这一特点求解.

例3 求$\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$的值.

(第三届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题)

[分析] $6\pm\sqrt{35}$不是 $A\pm 2\sqrt{B}$ 的形式,不能直接配方,所以要把 $6\pm\sqrt{35}$ 化成$\dfrac{12\pm 2\sqrt{35}}{2}$后,分子再配方;也可将原式平方后再求值.

例4 已知 $x+y=\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}$,$x-y=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$,求 xy 的值.

(1998 年北京市初二数学竞赛复赛试题)

[分析] $\because (x+y)^2-(x-y)^2=4xy$,$\therefore xy=\dfrac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2]$.

例5 若一个数的平方是 $5-2\sqrt{6}$,求这个数的立方.

(第四届“希望杯”全国数学邀请赛初二第二试试题)

[分析] 可以先求出平方是 $5-2\sqrt{6}$的这个数,再求出这个数的立方.注意 $5-2\sqrt{6}$的平方根

有两个.

例6 计算$\sqrt{31\times30\times29\times28+1}$. （第七届美国数学邀请赛试题）

[分析] 可以利用"四个连续自然数的积与1的和是一个完全平方数"来求解.

例7 已知$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,求$\frac{3}{4}x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{4}x+1$的值.

[分析] 直接将已知条件代入显然太繁,能否将已知中的$\sqrt{2}$化去,用整体代入.

例8 化简:

(1)$\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\frac{\sqrt{b}}{a-b}$; （1998年湖北省黄冈市中考题）

(2)$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$; （五城市联赛题）

(3)$\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$; （北京市竞赛题）

(4)$\frac{3\sqrt{15}-\sqrt{10}-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{2}+18}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$. （1997年陕西省竞赛题）

[分析] 若一开始就把分母有理化,则计算必定繁难;仔细观察每题中分子与分母的数字特点,通过分解、分折等方法寻找它们的联系,问题便迎刃而解.

例9 设$m=\sqrt{5}+1$,求$m+\frac{1}{m}$的整数部分. （1998年全国初中数学竞赛试题）

[分析] 先将已知代入原式中求出该式的值再来估算整数部分.

例10 已知$9+\sqrt{13}$与$9-\sqrt{13}$的小数部分分别为a和b,求$ab-3a+4b+8$的值.

（天津市竞赛题）

[分析] 用估算的方法求出a、b的值,再代入求值.

【赛题训练】

A 级

1. 若$\sqrt{3}=a$,$\sqrt{30}=b$,那么$\sqrt{2.7}$等于(　　) （第十届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题）

A. $\frac{b-a}{10}$　　B. $\frac{b-a}{\sqrt{10}}$　　C. $\frac{3}{10}a$　　D. $\frac{3}{10}b$

2. 设$x=\sqrt{2001}-\sqrt{2000}$,$y=\sqrt{2000}-\sqrt{1999}$,$x$、$y$的大小关系是(　　)

（第十二届"希望杯"全国数学邀请赛试题）

A. $x>y$　　B. $x=y$　　C. $x<y$　　D. 无法确定

3. $\left(\frac{7}{3}\right)^{999}\sqrt{\frac{3^{1998}+15^{1998}}{7^{1998}+35^{1998}}}=$________. （1999年全国初中数学联赛湖北武汉市选拔赛试题）

4. 化简$\sqrt{19-6\sqrt{10}}$. （1990年南昌市初中数学竞赛试题）

5. 计算$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$的值. （2000年全国初中数学联赛试题）

6. 求代数式$\sqrt{8+\sqrt{63}}+\sqrt{8-\sqrt{63}}$的值.

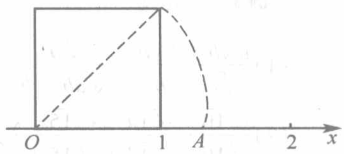
（第九届“希望杯”全国数学邀请赛初二第二试试题）

7. 古希腊数学家把数1,3,6,10,15,21,…叫做三角形数,它有一定的规律性,则第24个三角形数与第22个三角形数的差为________.

8. 求$(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$的值.

（第八届“希望杯”全国数学邀请赛初二第二试试题）

9. 某位老师在讲“实数”时,画了一个图(如图),即“以数轴上的单位长线段作一个正方形,然后以原点O为圆心,正方形的对角线长为半径画弧交x轴于一点A”,作这样的图是用来说明________.



（第9题）

10. 设$\sqrt{39-\sqrt{432}}$的小数部分为b,

求证:$\sqrt{39-\sqrt{432}}=2b+\dfrac{1}{b}$.

（武汉市竞赛题）

B 级

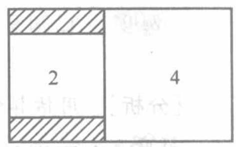
1. 化简$\sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{16-2\sqrt{15}}}$.

（第五届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题）

2. 化简$\sqrt{4+2(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}$.

（1994年武汉市初中数学竞赛试题）

3. 如图,矩形内有两个相邻的正方形,面积分别为4和2,那么阴影部分的面积为________.



（第3题）

4. 某市对电话费作了调整,原市话费为每3分钟0.2元(不足3分钟按3分钟计算),调整后,前3分钟为0.2元,以后每分钟加收0.1元(不足1分钟按1分钟计算),设通话时间为x分钟,调整前的话费为y_1元,调整后的话费为y_2元.

(1)填写下表,并指出x取何值时,$y_1 \leqslant y_2$;

x	4	4.2	5.8	6.3	7.1	11
y_1						
y_2						

(2)当$x=11$时,请你设计三种通话方案(可以分几次打),使所需话费y_3元,满足$y_3<y_2$.

5. 计算$\sqrt{10+8\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

（第十届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题）

6. 计算$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$.

（第四届美国数学邀请赛试题）

7. 化简:

(1)$\sqrt{\dfrac{1998\times1999\times2000\times2001+1}{4}}$;

（“希望杯”邀请赛试题）

(2) $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$; （新加坡中学生竞赛题）

(3) $\frac{8+2\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; （1998 年山东省竞赛题）

(4) $\sqrt{2(6-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15})}$. （1997 年太原市竞赛题）

8. 观察下列各式及其验证过程：

$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$

验证：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$

$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$

验证：$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$

(1) 按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证；

(2) 针对上述各式反映的规律，写出用 n（n 为任意自然数，且 $n\geqslant 2$）表示的等式，并给出证明.

9. 设 a 为 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分，b 为 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ 的小数部分，求 $\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$ 的值. （浙江省第二届初中数学竞赛决赛试题）

10. 已知 b 为正数，a 为 b 的小数部分，$a^2+b^2=27$，求 $a+b$ 的值.

（1998 年四川省初中数学联赛试题）

三　图形的平移和旋转

【赛点导入】

1. 在解决图形问题时，为了寻求解题途径，可以把题目中的某些线段平移到某一适当的位置，作出辅助图形，使问题得到解决. 常见的平移有：平移梯形的腰、对角线、高等.

2. 平面图形绕定点(旋转中心)按一定方向旋转一个角度，称之为旋转变换. 对于有关等边三角形、正方形、等腰三角形一类问题，经常用到旋转变换.

【赛题精析】

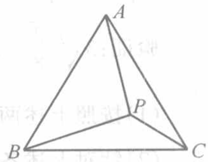


图 3-1

例1　如图 3-1，P 是等边 $\triangle ABC$ 内部一点，$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$ 的大小之比是 5:6:7，则以 PA、PB、PC 为边的三角形的三个角的大小之比(从小到大)是(　　).

(全国通讯赛试题)

A. 2:3:4　　B. 3:4:5　　C. 4:5:6　　D. 不能确定

[分析]　解本例的关键是如何构造以 PA、PB、PC 为边的三角形，若把 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 中的任一个，绕一个顶点旋转 $60°$，就可以把 PA、PB、PC 有效地集中在一起.

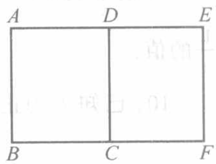


图 3-2

例2　如图 3-2，如果四边形 $CDEF$ 旋转后能与正方形 $ABCD$ 重合，那么图形所在的平面上可以作为旋转中心的点共有________个.

[分析]　图中的矩形 $ABFE$ 和线段 CD 都是中心对称图形，而且对称中心是同一个点(CD 的中点)，这个点符合要求，只要将四边形 $CDEF$ 绕该点旋转 $180°$，便与正方形 $ABCD$ 重合.

不过题目只提到“旋转”，并未要求“旋转 $180°$”，而将四边形 $CDEF$ 绕点 D 顺时针旋转 $90°$，或者绕点 C 逆时针旋转 $90°$，也能与正方形 $ABCD$ 重合.

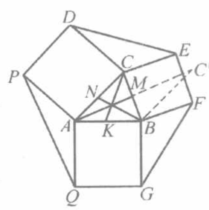


图 3-3

例3　如图 3-3，在一个任意给定的 $\triangle ABC$ 的每一边上，以该边为一边，向图形外作一个正方形，依次连结这 3 个正方形中不与 $\triangle ABC$ 顶点重合的 6 个顶点构成一个六边形 $QGFEDP$，AM、BN、CK 为 $\triangle ABC$ 三边上的中线. 求证：$PQ=2AM$，$GF=2BN$，$DE=2CK$.

(竞赛题)

[分析]　构造 $2AM$ 长的线段，延长 AM 到 C' 使 $MC'=AM$，即将 AC 平移到 BC'，再证 $PQ=AC'$.

例4　如图 3-4，在矩形 $ABCD$ 内任取一点 M. 求证：存在一个四边形，它的边长等于 MA、MB、MC、MD，且它的对角线互相垂直，长度分别等于 AB 和 BC.

(竞赛题)

[分析] 证明存在适合条件的四边形，可以通过作图作出这个四边形，如果把 A、B、M 作为所求四边形的三个顶点，那么只要找出第四个顶点 N 即可.

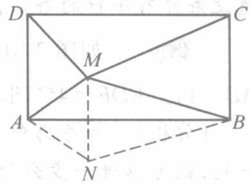


图 3-4

例 5 如图 3-5，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30°$，$\angle ADC=60°$，$AD=DC$. 求证：$BD^2=AB^2+BC^2$. （竞赛题）

[分析] 从求证结论看应该用勾股定理，通过旋转使 BD、AB、BC 线段或与之相等的线段构成一个直角三角形.

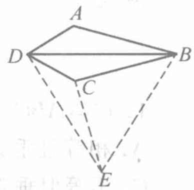


图 3-5

例 6 如图 3-6，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，P 为 AB 上的点，Q 为 AD 上的点，且 $\triangle APQ$ 的周长为 2.

求证：$\angle PCQ=45°$. （竞赛题）

[分析] 关键是条件 $\triangle APQ$ 周长为 2 如何使用，如何与正方形边长 1 联系产生效应.

例 7 如图 3-7，以任意 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 为边分别向外作正方形，中心分别为 O_1、O_2、O_3.

求证：$O_1O_3=AO_2$，且 $O_1O_3\perp AO_2$. （全国数学竞赛题）

[分析] 本例可用旋转重合来证明三角形全等. 通过添加辅助线，构成分别以 O_1O_3 与 AO_2 为边的三角形，旋转 90°后重合，证明它们相等且互相垂直.

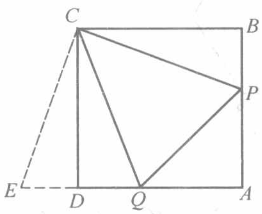


图 3-6

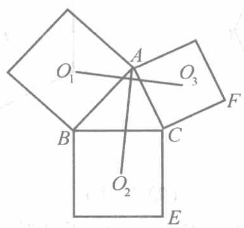


图 3-7

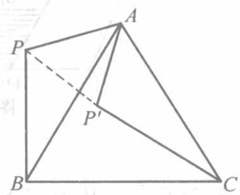


图 3-8

例 8 如图 3-8，P 为等边 $\triangle ABC$ 外一点，且不与 A、B 同在一直线上，$AP=2$，$BP=3$. 当此三角形的边长、位置都可改变时，PC 的长能否取到最大值？若能取到，求出这个最大值；若不能取到，请说明理由. （竞赛题）

[分析] 如何将已知的线段 PA、PB 与所求线段 PC，通过旋转变换集中在一个三角形中，即将 $\triangle PAB$ 绕 A 逆时针转 60°使 AB 与 AC 重合得 $\triangle P'AC$.

例 9 如图 3-9，六边形 $ABCDEF$ 中，$AB\parallel ED$，$BC\parallel FE$，$CD\parallel AF$，对边之差 $BC-FE=ED-AB=AF-CD>0$，求证：该六边形的各角都相等. （第四届全俄数学奥林匹克竞赛题）

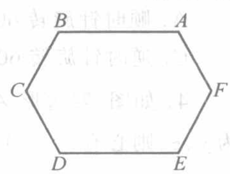


图 3-9