高等医药院校教材

医药高等数学

张春华　周永治　主编

延边大学出版社

高等医药院校教材

医 药 高 等 数 学

主　编：张春华　周永治

副主编：刘延福　李国桢　刘明芝

　　　　李大庆　周金汤　阎雪隐

主　审：洪建清

编　委：王淑媛　王秀英　严云良　关明云

　　　　李　军　李秀昌　陈世红　陈俊英

　　　　汪旭升　周　喆　林　莉　周介南

　　　　赵　赐　封　峰　石金娥　赵文峰

延边大学出版社

(吉)新登字 13 号

医药高等数学

张春华　周永治　主编

延边大学出版社出版发行
延边大学印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　15.75 印张　364 千字
1995 年 2 月第 1 版　1995 年 2 月第 1 次印刷
印数　1—5000 册
ISBN　7－5634－0767－7/R・15(课)
定价:10.90 元

编 写 说 明

本书是根据卫生部1982年颁布的有关教学计划的要求，和目前教学改革的新情况，由全国十二所中医院校参加编写的。

全书共九章，它包括微积分、微分方程和矩阵的基本知识，空间解析几何的有关部分以预备知识的形式编入第六章。本书可作为高等医药院校的高等数学教材，也可作为医务人员自学高等数学用书。

本书在编写中注意了与中学数学的衔接，突出高等数学在中西医药中的应用。为便于读者学习和掌握所学内容，每章都写有“本章小结”。书中各章都配有习题，书后附有答案，供师生选用参考。

参加本教材编写的有河南中医学院、辽宁中医学院、浙江中医学院、湖南中医学院、江西中医学院、长春中医学院、福建中医学院、天津中医学院、贵阳中医学院、广西中医学院、南京中医学院、山东中医学院等。

由于我们水平所限，书中定有不少缺点与错误，恳请读者批评指正。

编 者

1994年5月

目　　录

第一章　函数与极限

高等数学是研究变量的一门科学，它的主要研究对象是函数。极限方法是高等数学的基础，它从方法论上突出地表现了高等 数学不同于初等数学的特点，本章将介绍函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，给出函数连续性的定义及性质。

§1　函数

1.1　函数的概念

（一）　常量与变量

在某一过程中，保持同一数值的量，称为该过程中的**常量**；取不同数值的量，称为该过程中的**变量**。

例如，生物学中，在一定容积的培养基中成批培养细胞，在培养细胞的过程中，固定的容积是常量，细胞的数量及培养基中的营养物质是变量。

常量与变量的划分是相对的，它依赖于研究问题的场合，同一个量在某种场合下是常量，在另一种场合下则可能为变量，例如重力加速度，在地球表面一个不大的范围内是常量，在一个广大的范围内就是变量。

也有这种情况，某些量在整个过程中是变化的，但在过程的某一阶段变化很小，可以忽略不计把它看作常量，例如，一个人从小孩长到成人的整个过程中，身高是变量，但在某一天身高的变化很微小，这一天中身高就可以看作常量。

（二）　函数的概念

在自然现象和现实生活中，往往在某一变化过程中同时牵涉到几个变量，它们通常不是孤立的，而是遵循一定的规律相互依赖又相互制约地变化的，为了叙述简明，我们先就两个变量的情况加以探讨。

例 1　温度一定时，一定质量的气体的容积 V 与压力 P 成反比（波义耳定律）：

$$V=\frac{C}{P}\qquad（其中\ C\ 是比例常数）$$

例 2　在板兰根注射液含量稳定性的研究中测得 $PH=6.28$，温度 78℃下，保温时间与含量百分比的数据见表 1—1。

表 1—1　　　板兰根注射液含量破坏百分比与保温时间的关系

保温时间　$x(hr)$	32	64	96	128
含量破坏百分比 y	4.55	12.27	15.45	18.18

例 3　静脉注射与肌肉注射青霉素 G 钠盐 10 万单位后血清中药浓度与时间的关系如图 1—1 中的两条曲线（其中横坐标是注射后的时间 t（小时），纵坐标是血清平均浓度（单位/毫

升)),分析图 1—1 可得出如下结论:

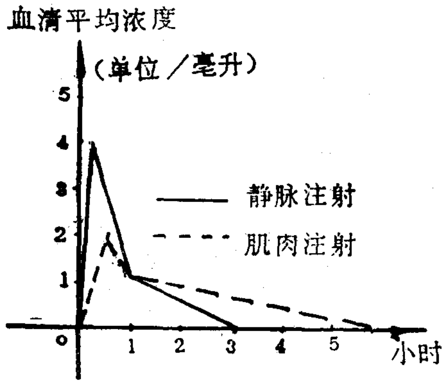


图 1—1

(1) 静脉注射后,血液中青霉素 G 钠盐含量迅速提高,在 1/4 小时血清中的药浓度可达到高峰,但很快下降,3 小时后就很难测到。

(2) 肌肉注射后,血清中的药浓度半小时左右可达到高峰,(比静脉注射慢,且高峰低)存留时间比静脉注射长,但数小时后也测不到了。

上面的几个例子,虽然实际意义各有不同,变量间的对应关系也用不同方式表达的,但他们都表达了两个变量之间的相依关系。当其中一个变量在某范围内每取一个数值时,按照一定的规律(对应的法则),另一变量就有确定的值与之对应,两个变量之间的这种对应关系,我们称它为函数关系,它也是函数概念的实质。为了对函数作一般的讨论,我们抛开不同例题的具体内容,抽象出函数概念的数学定义。

定义 1 设在某一过程中有两个变量 x 和 y,变量 x 的取值范围是数集 D,如果对于 D 中 x 的每一个值,按照一定的对应法则 f,变量 $y\in M$ 都有一个确定的值与之对应,则称 f 是确定在数集 D 上的函数。记作

$$f: D\to M \qquad x\longmapsto y \tag{1—1}$$

数集 D 称为函数 f 的定义域,D 中每一个 x 根据法则所对应的数 y,称为 f 在 x 的函数值,记作 $f(x)$,全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}\subset M$$

称为函数 f 的**值域**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**。

关于函数概念我们着重说明以下两点:

(1) (1—1)式中“$D\to M$”表示按法则 f 建立起数集 D 到 M 的函数关系,“$x\to y$”表示两个数集中元素之间的对应关系。函数概念中的数集 M 通常用实数集 R 来代替,因此定义域和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素,并常用 $y=f(x)\quad x\in D$ 来表示一个函数。

由此对两个函数,只有当它们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才是相同的。例如函数 $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与函数 $y=g(x)=x+1$,当 $x\neq1$ 时,两者对应法则相同,但函数 f 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,而函数 g 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,两者定义域不同,故函数 f 与函数 g 是两个不同的函数。又如函数 $y=f(x)=\sin^2x+\cos^2x+x^2$ 与函数 $y=g(x)=1+x^2$ 虽然它们的表达式不同,但它们的定义域和对应法则都相同,因此是两个相同的函数。

(2) 在中学里我们已经知道,表示函数的主要方法是公式法,这时定义域通常是使该算式有意义的自变量的值的全体,并因此函数的定义域 D 省略不写,只用对应法则 f 来表示一个函数,所以可简单地说“函数 f”,或“函数 $y=f(x)$”,习惯上也说“函数 $f(x)$”。

例 4 有人根据在一项生理学研究中测得的血液中胰岛素浓度 $C(t)$(单位/毫升)随时间 t(分钟)变化的数据,建立了如下经验公式:

$$C(t)=\begin{cases} t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)} & t>5 \end{cases}$$

其中 k 为常数。

这里浓度 $C(t)$ 是时间 t 的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的。象这种在定义域的不同部分内用不同的解析式表示的函数，称为分段函数。计算分段函数的函数值时，特别要注意自变量所取的值在那个范围。如例 4 中，当 $t=2$ 时对应的浓度 $C(2)=2(10-2)=16$，当 $t=10$ 时对应的浓度 $C(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$。

（三） 函数的表示法

由前面的几个例子可以看到，变量间的函数关系——从已给自变量值求出其对应函数值的对应法则，可以用各种方式表达出来，最常用的表示法有下列三种：

（1）**解析法** 用包含着变量的方程，也就是用数学公式表示变量间的函数关系。如例 1、例 4 都是用解析法表示的函数。用解析法表示函数便于计算和理论分析，在高等数学中讨论的函数，大都用这种方法表示。

（2）**列表法** 即把一系列自变量的值及其对应的函数值列成一个表格来表示函数关系。如例 2，用实验得到的观察数据表 1－1；又如对数表、三角函数表、平方表、立方根表等等，也都是用列表法表示的函数。列表法应用便利——可以不用计算直接从表上读出函数值，而且可以表示不知道解析表达式的函数，这在工程技术上是常用的。

（3）**图象法** 即借助坐标系用图形（一般是曲线）表示变量间的函数关系。如心电图、自动记录的气温曲线。图示法的优点是直观、明显，函数特征一目了然，对研究有一定的启发性。

在实际问题中，上述三种方法常结合应用。

（四） 函数的几种特性

（1）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，若存在某一常数 k，对一切 $x\in I$，恒有

$$f(x)\leqslant k \qquad (f(x)\geqslant k)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上有上（下）界，数 k 为它的一个上（下）界。

若函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，又有下界，则称 $f(x)$ 为 I 上的有界函数。

例如，对任意 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的。$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界而无上界。

（2）函数的奇偶性

设 x 和 $-x$ 是函数 $y=f(x)$ 的定义域内的任意两点，若总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点。例如，函数 $y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 都是偶函数；$y=x^3$ 及 $y=\sin x$ 都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数。

（3）函数的单调增减性

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上随着 x 的增加而增加，即对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增（单调递减）。单调递增或单调递减函数统称为单调函数。

例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是递增的；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是递减的，在 $(0,+\infty)$

上是递增的，但在整个定义域上不是单调的。

(4) **函数的周期性**

设 x 是函数 $y=f(x)$ 定义域内任一点，若存在一个不等于零的数 k，使得当 $x+k$ 也属于定义域时，有 $f(x+k)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是以 k 为周期的周期函数，k 为它的一个周期。显然，若 k 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $-k$、$\pm 2k$、$\pm 3k\cdots$ 也都是它的周期，故周期函数一定有无限多个周期。如果周期函数 $f(x)$ 的所有周期中有一个正的最小周期，如 k，则称 k 为 $f(x)$ 的基本周期，简称周期，例如，函数 $y=\sin\omega x(\omega\neq 0)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是以 $k=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的函数。

(五) 反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要选定其中一个为自变量，则另一个就是因变量。例如，函数 $y=ax+b$ 中，x 是自变量，y 是因变量。如果从这个函数中把 x 解出，得 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$，则称 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ 是 $y=ax+b$ 的反函数。一般地说，设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X，值域是 Y，如果对于 y 在 Y 中的每一个值，都可通过关系式 $y=f(x)$ 确定 x 在 X 中的一个值，就得了定义在 Y 上以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称它是函数 $y=f(x)$ 的反函数，也可记作 $x=f^{-1}(y)$，$y=f(x)$ 叫作直接函数。事实上 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 互为反函数。

习惯上，用 x 表示自变量，因变量用 y 表示，所以，函数 $y=f(x)$ 的反函数可改写为 $y=f^{-1}(x)$

例如，$y=\sin x$，$y=a^x$ 的反函数分别为 $y=\arcsin x$，$y=\log x$。当函数与其反函数均以 x 为自变量时，反函数的图象与原来函数的图象关于直线 $y=x$ 对称。

1.2 **初等函数**

(一) 基本初等函数

在中学已学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统 称为基本初等函数。为复习和应用的方便，将其归纳成表 1—2。

(二) 复合函数

在实际问题中，经常遇到两个变量之间的联系不是直接的，即因变量不直接依赖于自变量，而是通过另一个变量联系起来。

例如，有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 坚直上抛，由物理学知其动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 在不计空气阻力时又已知其为 $v=v_0-gt$，g 是重力加速度，因此 E 通过 v 成为 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

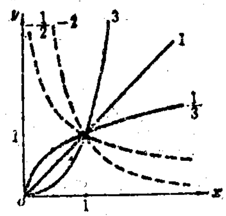
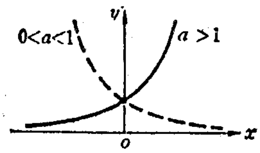
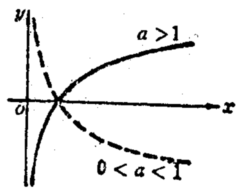
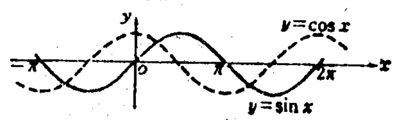
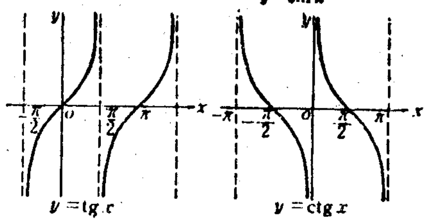
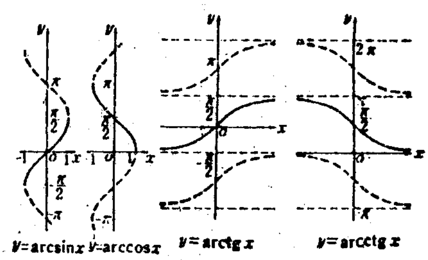
它是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数，一般地我们有

定义 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时，对应的 u 值使 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 和 x 建立了函数关系

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]$$

称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，并把 u 叫作中间变量，$f(u)$ 叫外层函数，$\varphi(x)$ 叫内层函数。

表 1—2　基本初等函数表

类别及解析式		定义域	值　域	图　　形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	 （在第一象限内）
	$\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^{m}}$， m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$ 余弦函数 $y=\cos x$ 正切函数 $y=\mathrm{tg}\,x$ 余切函数 $y=\mathrm{ctg}\,x$		$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	
反三角函数 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 反余弦函数 $y=\arccos x$ 反正切函数 $y=\mathrm{arctg}\,x$ 反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}\,x$		$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ $[0,\pi]$ $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(0,\pi)$	

例如　$y=\lg u$，$u=x^3$ 则 $y=\lg x^3$ 就是复合函数，　lgu 是外层函数，x^3 是内层函数。

形成复合函数的中间变量可以是两个或更多个。例如，由 $y=\lg u$，　$u=\mathrm{tg}v$，　$v=x^2+5$，经二次复合构成 x 的复合函数 $y=\lg\mathrm{tg}(x^2+5)$。

但需注意，并不是任何两个函数都可复合成一个复合函数。例如 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$，因为 u 总是大于 1，使 $y=\arccos u$ 没有意义。

我们不仅要学会把若干简单的函数"复合"成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数"分解"为若干个简单的函数。这种分解技术在后面的微积分运算中经常要用到，应该重视。

例如　$y=e^{\sqrt{1+x^2}}$ 可以看成是由 $y=e^u$，　$u=v^{\frac{1}{2}}$，$v=1+x^2$ 复合而成的。

复合函数的复合过程是由里到外，而"分解"复合层次的过程是由外到里，如

$$\xrightarrow{\quad y=e^{\sqrt{1+x^2}}\text{的复合过程}\quad}$$

$$\xleftarrow[\text{分　　解　　过　　程}]{\quad v=1+x^2\quad u=v^{12}\quad y=e^u\quad}$$

（三）　初等函数

定义　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数，称为初等函数。

例如，$y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}+5$，　$y=\mathrm{tg}t-\sqrt{t}\sin t^2$ 都是初等函数。

今后讨论的函数绝大多数是初等函数，但须注意，分段函数一般不是初等函数。

§2　函数的极限

高等数学研究的对象是函数，研究的方法之一是极限，在高等数学中几乎所有的概念都离不开极限，因此极限概念是高等数学中最基本的一个概念，极限方法是研究函数和解决许多问题的基本思想方法和主要工具。

2.1　函数的极限

（一）　数列的极限

数列就是按一定顺序排列起来的一列数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

第 n 项 x_n 称为数列的通项。这个数列可简记为 $\{x_n\}$。例如

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots \tag{1-2}$$

$$0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^n}{n}\cdots \tag{1-3}$$

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \cdots,\ 0.\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}},\ \cdots \tag{1-4}$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,(-1)^{n+1},\ \cdots \tag{1-5}$$

$$2,\ 4,\ 8,\ \cdots,2^n,\cdots \tag{1-6}$$

都是数列的例子，它们的通项分别为

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\quad \frac{n+(-1)^n}{n},\quad 0.\overbrace{33\cdots3}^{n个},\quad (-1)^{n+1},\quad 2^n$$

考察数列当 n 变化时 x_n 的变化情况，容易看出，当 n 无限增大(记作 $n\to\infty$)时，不同数列的变化情况是有所不同的，值得注意的是：其中有的数列当 $n\to\infty$ 时，x_n 能与某一个常数 a 无限接近，如(1－2)，当 $n\to\infty$ 时，x_n 和 0 无限接近，换句话说，当 n 充分大时，$|x_n-0|$ 可以变得并永远保持任意小。同样，对于数列(1－3)，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n+(-1)^n}{n}$ 无限接近于 1，而数列(1－4)，当 $n\to\infty$ 时，$0.\overbrace{33\cdots3}^{n个}$ 无限接近于 $\frac{1}{3}$。

定义 1　设 $\{x_n\}$ 是一个数列，如果当 n 无限增大时，x_n 无限接近于一个常数 a，(换句话说，当 n 充分大时，$|x_n-a|$ 可以任意小，就说数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时，以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a \quad (n\to\infty)$$

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1$，

$$\lim_{n\to\infty}0.\overbrace{33\cdots3}^{n个}=\frac{1}{3}$$

如果当 n 无限增大时，x_n 不趋向于一个确定的常数，就说这个数列没有极限或极限不存在。

例如数列(1－6)，随 n 增大，x_n 不断增大，但不和任何一个常数接近。数列(1－5)当 n 增大时，x_n 在 1 和 －1 间无限次跳动，既不趋向于 1，也不趋向于 －1，所以这两个数列都没有极限。

(二)　函数的极限

研究函数的极限就是研究函数值的变化趋势，但函数值的变化是由自变量变化来决定的，因此必须先指出自变量的变化趋势，通常研究下述两种情况：一种是自变量 $x\to\infty$，另一种是 $x\to x_0$(x_0 为某一定值)。

(1) $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 2　当自变量 $|x|$ 无限增大时，如果函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就说当 x 趋向于无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限是 A。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

$x\to\infty$ 包含 x 沿着正方向趋向于无穷大，记作 $x\to+\infty$；以及沿着负方向趋向于无穷大，记作 $x\to-\infty$。

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 以常数 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$

当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 以常数 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

例 1　函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$，当 $|x|$ 无限增大时，$\frac{1}{x}$ 无限接近于常数 0，函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$ 就无限接近于常数 1，所以

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})=1$$

例 2　$\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg}x$，当 $x\to+\infty$ 时，它所对应的函数值 $\varphi(x)$ 无限接近于常数 $\frac{\pi}{2}$，　故

$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$时，$\varphi(x)$无限接近常数$-\frac{\pi}{2}$。

有的函数 $f(x)$，当自变量$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$的绝对值也无限增大，在这种情况下，虽然 $f(x)$极限不存在，但也记为

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 或 $f(x)\to\infty$ $(x\to\infty)$

例 3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$， $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

故 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$

(2) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限

现在讨论当 x无限接近于(趋向于)某一确定的数 x_0，且 $x\neq x_0$ 时，函数的变化趋势。

定义 3 设函数在点 x_0 的附近有定义(在点 x_0 可以没有定义)，当 x无限趋 近于 x_0 时($x\neq x_0$)，如果函数值 $f(x)$无限趋近于一个常数 A，就说当 x趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或者} \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

例 4 考虑当 $x\to2$ 时函数 $f(x)=3x-1$ 的极限。

由图 1－2 看到，当 x无限接近于 2 时，$f(x)$无限接近于 5，因此 $\lim\limits_{x\to2}(3x-1)=5$

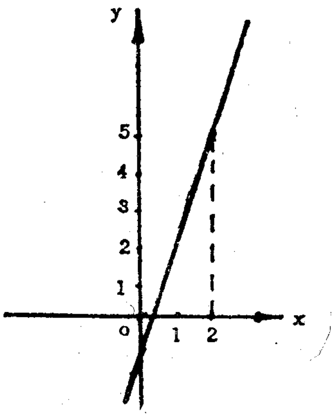


图 1－2

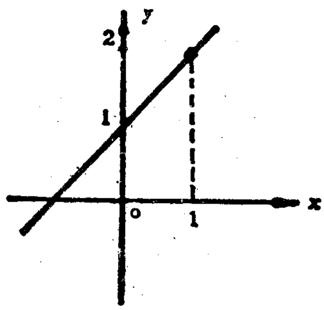


图 1－3

例 5 考虑当 $x\to1$ 时函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$的极限

函数$\frac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处没有定义，但是它的极限存在与否与此无关。事实上，当 $x\neq1$ 时，$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$

从图 1－3 可看到 $x\to1$ 时，$f(x)\to2$，故

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

例 6 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases} \quad \text{当 } x\to 0 \text{ 时的极限}$$

从图 1－4 看到，x从 0 的左边趋向于 0 时，$f(x)$趋向于 1； x从 0 的右边趋向于 0 时，$f(x)$趋向于－1； x从点 0 的左边趋向于 0 和从右边趋向于 0，得的极限值不同，因此，当 x趋向于 0 时函数值没有确定的变化趋势，故在点 x_0 处函数 $f(x)$的极限不存在。

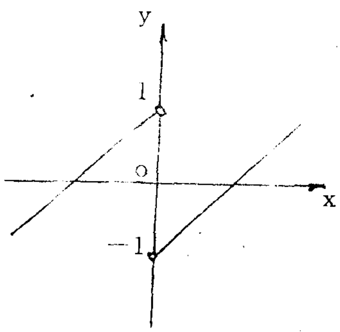


图 1—4

从这个例子我们看到，虽然函数 $f(x)$在 $x=0$ 处没有极限，但当 x从点 $x=0$ 的一侧趋近于 0 时函数 y还是分别趋近于确定的常数的，由此引出单侧极限的定义。

定义 4　如果当 x从 $x=x_0$ 左侧(即 $x<x_0$)无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$无限趋近于常数 A，则称 A是函数 $f(x)$在点 x_0 处的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

类似地定义右极限　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$

根据极限、左极限和右极限的定义，可以得出下面的定理：

定理 1　函数 $f(x)$在点 x_0 极限存在的充分必要条件是在该点的左右极限都存在并且相等。即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

这个定理可以用来判别函数的极限是否存在。

例 7　判别函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$在 $x\to 0$ 时的极限。

解　因为　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x}{x}=1$$

左、右极限虽然都存在但不相等，所以 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$在 $x\to 0$ 时极限不存在。

2.2　无穷小量与无穷大量

(一)　无穷小量

定义 5　若函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，就说函数 $f(x)$是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量，简称无穷小。记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \qquad (\text{或 } \lim_{x\to\infty} f(x)=0)$$

例如，　$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$

从函数的极限及无穷小的定义，可以看出它们之间的关系：

若函数 $f(x)$以常数 A为极限，即 $f(x)$无限接近于 A，所以 $f(x)-A$为无穷小，记作 $\alpha=f(x)-A$ 于是 $f(x)=A+\alpha$(α 为无穷小量)。