高中新课标（北师大版）

新课程　新练习

数学　必修1

与北师大版普通高中课程标准实验教科书同步

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lia

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lia

二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

经江西省中小学教材审定委员会审查，
供2008年秋季中小学生自主自愿选用

与北师大版普通高中课程标准实验教科书同步

尖新课标教材
用新理念教辅

SHUXUE

策　　划：鼎尖教育研究中心
责任编辑：罗安和　严今石

高中新课标系列

语文	(必修1～必修5)
数学	(必修1～必修5)
英语	(必修1～必修5)
物理	(必修1～必修2)
化学	(必修1～必修2)
生物	(必修1～必修3)
地理	(必修1～必修3)
思想政治	(必修1～必修4)
历史	(必修1～必修3)

ISBN 978-7-5391-4345-3

9 787539 143453 >

定价：16.00元

魔方号新课标系列丛书

新课程　新练习

数学

必修1　北师大版

主编　吕丁学

学校____________

班级____________

姓名____________

二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

新课程 新练习: 北师大版. 高中数学. 1: 必修 /史清霞等编写.
—南昌:二十一世纪出版社，2008.8
(魔方号新课标系列丛书)
ISBN 978-7-5391-4345-3
Ⅰ.新… Ⅱ.史… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第124068号

策　　划:鼎尖教育研究中心
主　　编:吕丁学
副 主 编:陈　飞
编　　著:史清霞　李合生　徐卫东　郭　华
责任编辑:罗安和　严今石

与北师大版普通高中课程标准实验教科书同步
新课程 新练习 高中数学必修1

出版发行:二十一世纪出版社
地　　址:江西省南昌市子安路75号(330009)
邮　　箱:xkcxlx21th@126.com
电　　话:0791-6526259
发　　行:新华书店
承　　印:江西新华印刷厂
开　　本:850mm×1168mm　1/16
印　　张:9
版　　次:2008年7月第1版
印　　次:2008年7月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5391-4345-3
定　　价:16.00元

写给同学们

2008年秋季，江西省普通高中全面进入新课程实验改革。在新的课改形式下，面对新的课程要求、新的教材，学习怎么学？考试怎么考？万一上课没能抓住老师的讲解要点，课后怎么补？

《新课程　新练习》(高中新课标系列)的出现解决了这些难题，它真正做到了从同步教学的角度出发，对新课改、新教材的“教”与“学”做出了全面、全新的阐释。该套丛书经过高中新课改实验区的试用，在广泛征求意见和建议的基础上进行了全面修订。

丛书具有以下鲜明特色：

标准制造——丛书的编写以国家教育部颁布的各学科课程标准为纲，以国家教育部教材审定委员会审查通过的各种教材最新版本为依据，由新课标实验地区特高级教师编写，并得到国内著名的高中新课程研究专家的指导与审定。

引领潮流——丛书贴近高中新课标理念，突出新理念、新思想、新思路。丛书栏目新颖，版式活泼，讲解透彻，题量适中。栏目的设置拓展了学生知识和眼界，有利于学生构建开放的学习体系；语言风格清新流畅，亲和力强，充分尊重学生学习的主体地位。

与时俱进——丛书分讲解与练习两部分。充分考虑到课程“新”这一特点，针对学生上课听不懂，下课记不牢的情况，课时讲解细致入微，全面中突出重点，既注重知识的基础性，也体现了知识的综合拓展，还巧妙加入大量的规律点拨和学习技巧提示，“讲”“练”结合，可使学生达到“课课通，题题通”的效果。

科学实用——丛书体例设置科学实用，开创了高中教辅“与每课时教学内容严格同步”的教材讲析模式，课时划分一般以教参、标准课时的规定与建议为依据，并参照教学实践，具有普遍性、参照性。同时在课时讲解的基础上设置随堂练习，从而进一步夯实学生的基本功。并按新课标高考题型和规律，设置了单元测试和期末综合测试，既充分考虑全国高考的现状；又真实反映了高中新课标教材教学模式和评价模式。各学科的练习均有参考答案，并采取单本装订形式，使用起来方便灵活。

编写高中新课标学生助学用书是新的研究课题，丛书中难免会存在问题，在此期待你的指正。

同学们，你的成功就是我们的成功，我们愿伴随你一同成长。

智慧在此隐藏，成功从这起步。

丛书策划组

目　录

第四章　函数应用

参考答案与点拨(另附单本)

第一章　集　合

§1　集合的含义与表示

课标解读

新课程标准内容	教材内容
①通过实例,了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系. ②能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.	§1　集合的含义与表示
①理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集. ②在具体情境中,了解全集与空集的含义.	§2　集合的基本关系
①理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集. ②理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集. ③能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图示对理解抽象概念的作用.	§3　集合的基本运算

探究新知

学点❶　集合的含义

一般地,指定的某些对象的全体称为集合.集合常用大写字母 $A,B,C,D,\cdots$ 标记.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.元素常用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 标记.

特别提示 (1)集合是现代数学中一个原始的、不定义的概念.集合语言是数学中最基础、最通用的数学语言,它精确地表达了各类对象之间的关系,能更简洁、更准确地表达有关数学内容,能使我们初步体会到数学独到的美感.

(2)集合中的元素可以是人、物品、数学对象等,其种类没有限制,但这些对象必须是确定的.高中数学中,研究的集合主要是数集和点集.

(3)集合中的元素可以具有相同的特征,也可以是不同类的,只要它们能够确定,并且集在一起,就能构成一个集合.一般而言,我们是将具有共同特征的元素集在一起构成集合来研究的.

学点❷　集合中元素的基本特征

根据集合的含义,对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的、互异的、无序的,又称作集合元素的三大特征.

(1)确定性:集合中的元素是确定的,即任何一个对象都能说明它是或不是某个集合的元素,两种情况必具其一且仅具其一,不会模棱两可.例如“著名科学家”“与$\sqrt{2}$接近的数”等都不能组成一个集合.

(2)互异性:集合中的元素是互不相同的,即同一元素在同一集合中,不能重复出现,例如集合$\{a,a,b\}$就是一个错误表示.

只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

(3)无序性:在一个集合中,元素之间都是平等的,它们都充当集合中的一员,无先后次序之说,无高低贵贱之分.例如集合$\{1,2,3\}$与集合$\{3,2,1\}$是同一个集合.

方法规律 集合中的元素的三个基本特征是集合本质属性的反映,利用集合中元素的三个基本特征,一方面可以判断一些对象是否能构成集合,另一方面可以解决与集合有关的问题.

【例 1】 判断下列说法是否正确,并说明理由.

(1)高一(1)班刻苦学习的学生组成一个集合;

(2)集合$\left\{1,\frac{3}{2},3,2.5,1.5\right\}$中含有5个元素;

(3)《新课程·新练习》高中数学必修1(北师大版)中所有的例题;

(4)集合{1,2,3}与集合{2,3,1}是两个不同的集合.

分析 从集合的概念出发,紧扣各题的实际背景及集合中元素的基本特征进行判断.

解答 (1)不正确.因为集合中的每个对象都是确定的,而"刻苦学习"是个模糊的不确定标准,不符合集合中元素的确定性;

(2)不正确.由于一个集合中的元素必须是互异的,而此集合中$\frac{3}{2}=1.5$,故此集合的表示不正确;

(3)正确.因为《新课程·新练习》高中数学必修1(北师大版)中的例题个数是确定的;

(4)不正确.根据集合中元素的无序性,表示一个集合时,不必考虑元素的顺序,因而{1,2,3}与{2,3,1}是同一个集合.

警示误区 判断一些对象能否构成集合或集合的表示是否正确,主要依据是集合中元素的三大基本特征:确定性、互异性和无序性.解题时要逐一对比,验证,以防出错.

同类变式 若以集合$\{x,y,z,w\}$中的四个元素为边长构成一个四边形,那么这个四边形可能是 ( )

A. 梯形 B. 平行四边形 C. 菱形 D. 矩形

分析 解这道题应从集合元素的三大特征入手,本题应侧重考虑集合中元素的互异性.

解答 由于x,y,z,w四个元素不相同,故它们组成的四边形的四条边互不相等,因此应选A.

易忽视点 本题易忽视从集合中元素的互异性特征去考察,而错选其他答案.

学点❸ 集合与元素的关系

给定一个集合,任何一个对象是不是这个集合的元素就确定了,若a在集合A中,就说a属于集合A,记作$a\in A$;若a不在集合A中,就说a不属于集合A,记作$a\notin A$.

例如,我们用A表示"1~20以内的所有质数"组成的集合,则有$3\in A,4\notin A$等.

(1)集合与元素之间有且仅有两种关系(属于$\in$,不属于$\notin$)两者必具其一.

(2)集合与元素的关系(属于,不属于)要注意与后面将要学到的集合与集合间的关系(包含,包含于)区分开来.

特别提示 (1)符号"$\in$""$\notin$"是表示元素与集合之间的关系,不能用来表示集合与集合之间的关系.

(2)元素a与集合A的关系,在$a\in A$与$a\notin A$这两种情况中有且只有一种成立.

【例 2】 形如$a+b\sqrt{6},a,b\in\mathbf{R}$的数可以组成一个集合,试问$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$是否为这个集合中的元素?

分析 这是集合与元素的关系,首先将数$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$恒等变形,然后再看变形后的数是否具有$a+b\sqrt{6}$的特征.

解答 $\because(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})^2=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})+2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=6$,

$\therefore\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{6}=0+1\cdot\sqrt{6}$,即$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$是形如$a+b\sqrt{6},a,b\in\mathbf{R}$的数.

故$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$是这个集合中的元素.

方法技巧 判断一个元素是否为集合中的元素,关键是要看这个元素是否具有集合中元素的特征.

同类变式 已知集合A中的元素具有$a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}$的特征,试判断下列元素$x$与集合$A$间的关系.

(1)$x=0$;(2)$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$;(3)$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;(4)$x_1\in A,x_2\in A,x=x_1+x_2$.

分析 判断元素x与集合A的关系,可以将x变形,看其是否具有$a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}$的特征.

解答 (1)$\because x=0+0\times\sqrt{2},\therefore x\in A$;

(2)$\because x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=1+1\times\sqrt{2},\therefore x\in A$;

(3)$\because x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,而$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z},\therefore x\notin A$;

(4)$\because x_1\in A,x_2\in A$,可设$x_1=a_1+b_1\sqrt{2},x_2=a_2+b_2\sqrt{2}(a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{Z})$.

则$x=x_1+x_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$,而$a_1+a_2\in\mathbf{Z},b_1+b_2\in\mathbf{Z}.\therefore x\in A$.

学点❹ 常用数集的表示

数的集合简称数集,下面是一些常用的数集及记法.

常用数集	简　称	记　法
自然数组成的集合	自然数集	$\mathbf{N}$
正整数组成的集合	正整数集	$\mathbf{N}_+$(或$\mathbf{N}^*$)
整数组成的集合	整数集	$\mathbf{Z}$
有理数组成的集合	有理数集	$\mathbf{Q}$
实数组成的集合	实数集	$\mathbf{R}$

特别提示 (1)自然数集合包括0.

(2)非负整数集是不排除0的集合.

(3)记忆常用数集的口诀是"自N,整Z,有Q,实R".

【例3】 用符号"∈"或"∉"填空.

2 ________ $\mathbf{N}$;0 ________ $\mathbf{N}_+$;$\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{Q}$;π ________ $\mathbf{R}$;$\sin 45^\circ$ ________ $\mathbf{Q}$;

$2\cos 60^\circ$ ________ $\mathbf{N}$;$\tan 30^\circ$ ________ $\mathbf{R}$.

分析 弄清并区分常用数集$\mathbf{N}_+$、$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$是解答本题的关键.

解答 ∈;∉;∉;∈;∉;∈;∈.

方法规律 对于证明题中的一类诸如"不可能""至多""至少""唯一""不少于"等的问题,宜采用反证法,其证题步骤为:反证结论不成立;推导出矛盾;肯定结论成立.

学点❺ 列举法

列举法是把集合的元素一一列举出来写在大括号内的方法.例如,把"方程$(x-1)(x-2)=0$的所有实根"组成的集合表示为$\{1,2\}$.

特别提示 (1)一般情况下,对有限集,在元素不太多的情况下,宜采用列举法,它具有直观明了的特点.无限集一般不宜采用列举法,因为不能将无限集中的元素一一列举出来,而没有列举出来的元素往往难以确定.

(2)用列举法表示集合时,集合中元素的列举与元素顺序无关,即集合的无序性.如用列举法表示甲、乙两个足球队比赛时所有甲方队员组成的集合等.

(3)在集合的书写上,要注意规范性,如关于x的方程$x-a=0$的解集应写成$\{a\}$,而不是a.

【例4】 用列举法表示下列集合.

(1)方程$(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$的有理根的集合$A$;

(2)方程$\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$的解集B.

分析 先将方程的解求出,再用大括号括起来即可.

解答 (1)由$(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$,得

$x_1=-1,x_2=\frac{2}{3},x_3=\sqrt{2},x_4=-\sqrt{2}$,

其中$-1,\frac{2}{3}\in\mathbf{Q},\sqrt{2},-\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$,$\therefore A=\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$;

(2)由$\begin{cases}\sqrt{2x-1}=0,\\|3y+3|=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-1,\end{cases}$ $\therefore B=\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$.

易错点提示 B集合易错写成$\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$.因为第(2)小题化成关于$x$、$y$的二元方程组,方程组里只有一组解,即一组有序实数对$\left(\frac{1}{2},-1\right)$,所以$B=\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$.$B$集合还易错写成$\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.事实上,有序实数对$\left(\frac{1}{2},-1\right)$按习惯$\frac{1}{2}$,

-1分别是 x,y 的值，所以不能把 B 写成 $\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

同类变式 设 a,b 都是非零实数，$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$ 可能取的值组成的集合是（　）

A. $\{3\}$　　B. $\{3,2,1\}$　　C. $\{3,1,-1\}$　　D. $\{3,-1\}$

解答 (1)若 a,b 同正，则 $y=1+1+1=3$；

(2)若 a,b 同负，则 $y=-1-1+1=-1$；

(3)若 a,b 一正一负，则 $y=1-1-1=-1$.

所以选 D.

方法技巧 根据两个字母的符号分类讨论，充分体现分类思想在解题中的作用.

学点❻ 描述法

(1)用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法叫描述法.

例如，不等式 $x-7<3$ 的解集用描述法可表示为 $A=\{x|x<10\}$；

方程 $x^2+2x=0$ 的解集用描述法可表示为 $B=\{x|x^2+2x=0\}$.

又如，在平面直角坐标系中第二象限的点构成的集合，用描述法可表示为 $C=\{(x,y)|x<0,且\ y>0\}$.

(2)列举法与描述法所使用的集合的记法，依据的是国家标准如下的规定：

符　号	应　用	意义或读法	备注及示例
$\{,\cdots,\}$	$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$	诸元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集	也可用$\{x_i,i\in I\}$，这里的 I 表示指标集
$\{\mid\}$	$\{x\in A\mid p(x)\}$	使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元素之集	例如，$\{x\in A\mid x\leqslant 5\}$，若从前后关系来看，集合 A 已很明确，则可使用$\{x\mid p(x)\}$来表示，例如$\{x\mid x\leqslant 5\}$

此外，$\{x\in A|p(x)\}$有时也可写成$\{x\in A:p(x)\}$或$\{x\in A;p(x)\}$.

特别提示 (1)用描述法表示集合的具体方法是：在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

(2)对无限集，一般采用描述法表示. 它的优点是形式简洁，能充分体现集合中元素的特征.

(3)一般来说，列举法与描述法能够准确、严密地表示出集合，列举法是体现集合外延的一种表示方法，而描述法是体现集合内涵的一种表示方法.

【例 5】 用描述法表示下列集合.

(1)所有被 3 整除的数；

(2)图 1-1-1 中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合(不含虚线).

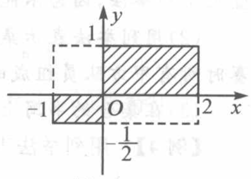

图 1-1-1

分析 (1)中被 3 整除的数可表示为 $3n,n\in\mathbf{Z}$；(2)中元素是坐标(x,y)，也就是说先考虑元素是什么，再考虑元素必须满足的条件.

解答 (1)$\{x|x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$；(2)$\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant 2,-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\text{ 且 }xy\geqslant 0\right\}$.

警示误区 使用描述法时，应注意六点：①写清楚集合中元素的代号；②说明该集合中元素的性质；③不能出现未被说明的字母；④多层描述时，应当准确使用“且”“或”；⑤所有描述的内容都要写在括号内；⑥用于描述的语句力求简明、确切.

【例 6】 用适当的方法表示下列集合.

(1)非负奇数组成的集合；

(2)小于 18 的既是奇数又是质数的数组成的集合；

(3)方程$(x^2-1)(x^2+2x+1)=0$ 的解组成的集合；

(4)平面直角坐标系内所有第三象限的点组成的集合；

(5)方程组$\begin{cases}x^2+x-1=0,\\x+y=1\end{cases}$的解集.

分析 表示集合应根据问题的不同情况，本着简洁直观的原则，严格按照列举法或描述法的模式来表达.

解答 (1)描述法：$\{x|x\in\mathbf{N}|x=2n+1\}$或列举法：$\{1,3,5,7,\cdots\}$；

(2)列举法：$\{3,5,7,11,13,17\}$；

(3)列举法：$\{-1,1\}$；

(4)描述法：$\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$；

(5)描述法：$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x^2+x-1=0\\x+y=1\end{cases}\right\}$或列举法$\left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

易错点提示 (3)小题易错写成$\{-1,-1,1\}$的形式，这不符合集合中元素的互异性特征，所以是错误的.(4)是点集，(5)是方程组的解集，因此它们的代表元素是(x,y)，(5)写成$\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$是错误的.

学点7 集合分类

按元素个数来分：
- 有限集(含有限个元素的集合)，例如$A=\{-2,3\}$；
- 无限集(含无限个元素的集合)，例如整数的集合$\mathbf{Z}$；
- 空集(不含任何元素的集合)，记作$\varnothing$，例如集合$B=\{x^2+x+1=0\}$就是空集.

按元素属性来分：
- 数集，例如$P=\{1,2,3\}$，$Q=\{x\mid 2x-1>3\}$；
- 点集，例如$M=\{(1,-1),(0,2)\}$，$N=\{(x,y)\mid x+y-1=0\}$.

特别提示 (1)分类标准不同，集合的名称也不同.其中点集和数集是高中研究的两类重要的集合.

(2)数集的代表元素是“x”，点集的代表元素是(x,y).一般而言，一元方程(不等式)解集的代表元素是“x”，二元方程(不等式)的解集或平面直角坐标系内点的集合的代表元素是“(x,y)”.

【例7】 用适当的方法表示下列集合，然后说出它们是有限集还是无限集.

(1)$M=\{(x,y)\mid x+y=4,x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+\}$；

(2)$N=\left\{\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\middle| x\in\mathbf{N}\right\}$.

分析 集合M中的代表元素是(x,y).集合N中的代表元素是$\dfrac{6}{1+x}$，而不是x，同时要注意(1)中$x\in\mathbf{N}_+$，$y\in\mathbf{N}_+$，(2)中$x\in\mathbf{N}$等约束条件.集合N易错写成$\{0,1,2,5\}$，产生错误的原因是将N中代表元素$\dfrac{6}{1+x}$当成x.

解答 (1)$\because$ $x+y=4,x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+$，

$\therefore\begin{cases}x=1,\\y=3;\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=2;\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

$\therefore$ $M=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$，有限集；

(2)$\because$ $\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}$，且$x\in\mathbf{N}$，

$\therefore$ $1+x=1,2,3,6$，

$\therefore$ $x=0,1,2,5$，即$\dfrac{6}{1+x}=6,3,2,1$.

$\therefore$ $N=\{6,3,2,1\}$，有限集.

课时作业

1.集合A只含有元素a，则下列各式正确的是 ( )

A.$0\in A$　B.$a\notin A$　C.$a\in A$　D.$a=A$

2.下列条件所指对象能构成集合的是 ( )

A.与0非常接近的数　B.我班喜欢唱歌的同学

C.我校学生中的团员　D.我班的高个子学生

3.由实数$a,-a,|a|,\sqrt{a^2},\sqrt[3]{a^3}$所组成的集合，所含元素的个数最多有____个.

4.用符号$\in$或$\notin$填空.

(1)$3\dfrac{2}{7}$ ________ $\mathbf{Q}$；(2)3^2 ________ $\mathbf{N}$；(3)π ________ $\mathbf{Q}$；

(4)$\sqrt{2}$________ **R**;(5)$\sqrt{9}$________ **Z**;(6)$(\sqrt{5})^2$ ________ **N**.

5. 设数集 A 中含有两个元素 $2a$ 和 a^2+a,求 a 满足的条件.

6. 数集 A 满足条件:若 $a\in A$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$,其中 $a\in \mathbf{R}$.

试证明:集合 A 不可能是单元素集.

7. 设 a,b 为整数,把形如 $a+b\sqrt{5}$ 的一切数构成的集合记为 M,设 $x\in M,y\in M$,试判断 $x+y,x-y,\frac{x}{y}$ 是否属于 M.

8. 下面对集合$\{1,5,9,13,17\}$用描述法来表示,其中正确的一个是 ( )

A. $\{x|x$ 是小于 18 的正奇数$\}$
B. $\{x|x=4k+1,k\in \mathbf{Z}$,且 $k<5\}$
C. $\{x|x=4t-3,t\in \mathbf{N}$,且 $t\leqslant 5\}$
D. $\{x|x=4s-3,s\in \mathbf{N}_+$,且 $s<6\}$

9. 集合 $A=\{x|y=\sqrt{x^2-1}\}$ 与集合 $B=\{y|y=\sqrt{x^2-1}\}$ 是表示两个相同的集合吗?为什么?

10. 把下列集合用另一种方法表示出来.

(1)$\{2,4,6,8,10\}$;(2)$\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5},\cdots\}$;(3)$\{x||x|\leqslant 2,x\in \mathbf{Z}\}$;(4)$\{(x,y)|x+y=4,x\in \mathbf{N}_+,y\in \mathbf{N}_+\}$.

11. 已知集合 $P=\{0,1,2,3,4\}$,$Q=\{x|x=ab,a,b\in P$,且 $a\neq b\}$,试用列举法给出集合 Q.

12. 若集合 $A=\{x|x^2+(a-1)x+b=0\}$ 中仅有一元素 a,求 $a+b$ 的值.

13. 下面三个集合：①$\{x|y=x^2+1\}$；②$\{y|y=x^2+1\}$；③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

(1)它们是不是相同的集合？

(2)它们各自的含义是什么？

14. 已知集合 $A=\{x|ax+b=1\}$，$B=\{x|ax-b>4\}$，其中 $a\neq0$，若 A 中的元素必为 B 中的元素，求实数 b 的取值范围.

15. 集合 M 的元素为自然数，且满足：如果 $x\in M$，则 $8-x\in M$，试回答下列问题：

(1)写出只有一个元素的集合 M；

(2)写出元素个数为 2 的所有集合 M；

(3)满足题设条件的集合 M 共有多少个？

§2 集合的基本关系

探究新知

学点❶ 子集

(1)子集：一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

这时我们说集合 A 是集合 B 的子集.

图 1-2-1 表示 $A\subseteq B$.

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A\not\subseteq B$(或 $B\not\supseteq A$).

图 1-2-1

(2)子集的性质

①规定：空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

②任何一个集合都是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

③对于集合 A,B,C，如果 $A\subseteq B,B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

警示误区 (1)开始接触包含符号时，注意不要把符号的方向搞错.

(2)要注意元素与集合间的属于关系及符号的负迁移作用，注意区分“属于”与“包含”，“$\in$”与“$\subseteq$”的差异.

(3)若 $A\subseteq B$，不能理解为子集 A 是 B 中的“部分元素”所组成的集合. 因为若 $A=\varnothing$，则 A 中不含任何元素；若 A 就是 B，则 A 中含有 B 中的所有元素，但此时都说集合 A 是集合 B 的子集.

(3)符号 $A\not\subseteq B$ 表示的意义有两种可能，一是 A 中元素都不是 B 中的元素，二是 A 中只有部分元素是 B 中的元素.

【例 1】 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，$A\supseteq B$，求 a 的值.

分析 $A\supseteq B$，即 B 是 A 的子集，所以 B 中元素 $1,a^2-a+1$ 都是 A 中的元素.

解答 因为 $A\supseteq B$，故可分两种情况：

(1)$a^2-a+1=3$，解得 $a=-1,2$，经检验满足题设条件；

(2)$a^2-a+1=a$，解得 $a=1$. 此时 A 中元素重复，故 $a=1$ 不合题意.

综上所述，$a=-1$ 或 $a=2$.

警示误区 (1)解决集合中元素问题，最后应注意检验，结果不应与题设矛盾，也不应与集合中元素的三个基本特征矛盾.

(2)$A\supseteq B$ 表示的是集合 B 为 A 的子集，而不要错误地认为 A 为 B 的子集.

同类变式 已知集合 $A=\{x|1<ax<2\}$，$B=\{x||x|<1\}$，满足 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

分析 将集合 A 和 B 具体化，在具体化的过程中，要对参数进行分类讨论.

解答 $\because B=\{x|-1<x<1\}$，

(1)当 $a=0$ 时，$A=\varnothing$，满足 $A\subseteq B$.

(2)当 $a>0$ 时，$A=\left\{x\left|\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}\right.\right\}$，

$\because A\subseteq B$，$\therefore \begin{cases}\frac{1}{a}\geqslant-1,\\ \frac{2}{a}\leqslant 1,\end{cases}$ $\therefore a\geqslant 2$.

(3)当 $a<0$ 时，$A=\left\{x\left|\frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}\right.\right\}$. $\therefore a\leqslant-2$.

方法规律 深刻理解子集的概念，把形如 $A\subseteq B$ 的问题，转化为不等式组，使问题得以解决. 在建立不等式的过程中，可以借助于数轴，清楚明了.

学点❷ Venn 图

在数学中，为了直观地表示集合间的关系，我们常用封闭曲线的内部表示集合，称为 Venn 图.

如图 1-2-2 为集合$\{1,3,5,7,9\}$的图示法表示.

Venn 图是集合的一种直观表示，可以帮助我们理解分析问题，但它不能作为严密的数学工具使用.

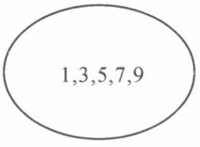

图 1-2-2

【例 2】 设集合 $A=\{x|x$ 是菱形$\}$，$B=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，$C=\{x|x$ 是正方形$\}$，试用 Venn 图反映出集合 A,B,C 之间的关系.

分析 抓住菱形、平行四边形、正方形的定义，找出它们的区别与联系.

解答 集合 A,B,C 之间的关系用 Venn 图表示如图1-2-3.

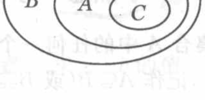

图 1-2-3

学点❸ 集合相等

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 中的元素，这时，我们就说集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

集合 A 与集合 B 相等的 Venn 图表示如图 1-2-4.

方法规律 (1)集合相等的定义有两层意义:

①若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,那么 $A=B$;②若 $A=B$,那么 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(2)证明两个集合相等的方法:若 A,B 两个集合是元素较少的有限集,可用列举法将元素列举出来,说明两个集合的元素完全相同,从而 $A=B$;若 A,B 是无限集时,欲证 $A=B$,只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可.

(3)同一个集合,可以有不同的表示方式,这是定义两个集合相等的意义所在.

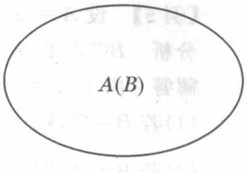

图 1-2-4

【例 3】 已知集合 $M=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $N=\{x|x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$,判断集合 A 与 B 的关系.

分析 如果从两个集合的代表元素之间的逻辑关系入手分析,则其关系不易理清,而把它们具体化,即用列举法分别表示这两个集合,则答案一目了然.

解答 $\because M=\{\cdots,-3,-1,1,3,5,7,\cdots\}$,$N=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,\cdots\}$,$\therefore M=N$.

方法规律 列举法使集合的元素一目了然,集合之间的关系也就明朗了,同样图示法以及数形结合也有利于判断集合之间的关系.

【例 4】 已知集合 $A=\{1,a,b\}$,$B=\{a,a^2,ab\}$,集合 A 和集合 B 相等,试求 a,b 的值.

分析 由于集合 A 和集合 B 相等,则构成集合 A 和 B 的元素是一样的,由此我们有以下两种解法.

解答 解法一:因为 $A=B$,则

$\begin{cases}a^2=1,\\ab=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=b,\\ab=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b\in\mathbf{R},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$

因为集合中的元素是互异的,$\therefore a\neq1$,$\therefore a=-1$,$b=0$.

解法二:由于集合 A 和 B 相等,则它们的元素完全相同,即 $\begin{cases}1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab,\\1+a+b=a+a^2+ab,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}ab(a^3-1)=0, & ①\\(a-1)(a+b+1)=0, & ②\end{cases}$

因为集合中的元素互异,所以 $a\neq0$,$a\neq1$,于是由①得 $b=0$,再从②得 $a=-1$. $\therefore a=-1$,$b=0$.

方法规律 (1)解法一是利用分类讨论的方法,求 a,b 的值,解法二利用了元素相同,则元素的和与乘积相等,列方程组,求 a,b 的值,体现了很强的技巧性.

(2)分类讨论的思想、方程思想在解决数学问题中占有很重要的地位,要注意体会和掌握它.

同类变式 已知集合 $A=\{a,a+b,a+2b\}$,$B=\{a,ac,ac^2\}$,若 $A=B$,求 c 的值.

分析 根据两集合相等,则所含元素完全相等,列出关于 c 的方程或方程组,求出 c.

解答 $\because A=B$,$\therefore$(1)当 $\begin{cases}a+b=ac,\\a+2b=ac^2\end{cases}$ 时,消去 b 得 $ac^2+a-2ac=0$.

若 $a=0$,B 中三元素均为 0,$\therefore a\neq0$. $\therefore c^2-2c+1=0$,$c=1$,此时 $B=\{a,a,a\}$ 不成立,$\therefore c=1$ 舍去.

(2)当 $\begin{cases}a+b=ac^2,\\a+2b=ac\end{cases}$ 时,消去 b 得 $2ac^2-ac-a=0$.

$\because a\neq0$,$\therefore 2c^2-c-1=0$. 又 $\because c\neq1$,$\therefore c=-\dfrac{1}{2}$,经验证,$c=-\dfrac{1}{2}$ 适合题意. 综上,$c=-\dfrac{1}{2}$.

方法技巧 利用有限集合的相等,即集合中的元素一一对应相等,建立起方程组,求得 c. 因为集合中元素的无序性,所以在建立方程组的时候,要注意分类讨论,同时最后的结果还要验证,以免与集合中元素的互异性特征相矛盾.

学点④ 真子集

对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$,并且 $A\neq B$,我们就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

集合 A 是集合 B 的真子集的 Venn 图表示如图1-2-5.

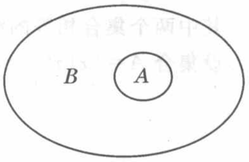

图 1-2-5

特别提示 (1)当 $A\subseteq B$ 时,有两种可能,$A=B$ 或 $A\subsetneqq B$,即真子集是在子集条件下,排除了集合相等而得到的"真正的子集".

(2)规定:$A\neq\varnothing$ 时,$\varnothing\subsetneqq A$,即空集是任何非空集合的真子集.

(3)对于集合 A,B,C,如果 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,那么 $A\subsetneqq C$.

【例 5】 设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 组成的集合，并写出它的所有非空真子集.

分析 $B\subseteq A$，即 B 是 A 的子集，因此只要求出集合 A，然后对集合 B 进行分类讨论，就可以使问题得以解决.

解答 由于 $A=\{3,5\}$，$B\subseteq A$.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $a=0$；

(2)若 $B\neq\varnothing$，则 $a\neq0$，这时有 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$.

即 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{5}$.

综上所述，由实数 a 组成的集合为 $\left\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}$.

其所有的非空真子集为：$\{0\}$，$\left\{\frac{1}{5}\right\}$，$\left\{\frac{1}{3}\right\}$，$\left\{0,\frac{1}{5}\right\}$，$\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$，$\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}$，共 6 个.

易忽视点 本题易忽视集合 $B=\varnothing$ 的情况，所以解题一定要注意.

【例 6】 已知集合 $A=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}_+\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}_+\}$，证明 $A\subsetneqq B$.

分析 欲证集合 A 真包含于集合 B，只需证集合 A 中的元素都是 B 中的元素，而 B 中的元素至少有一个不是 A 中的元素. 解决本题的突破口是弄清楚集合 A，B 中的元素具有怎样的共同特征，它们的取值范围有何不同.

证明 设 $x_0\in A$，则 $x_0=a^2+1$，其中，$a\in\mathbf{N}_+$，下面证 x_0 必为 B 中的元素：

$\because$ $a^2+1=[(a+2)-2]^2+1$，当 $a\in\mathbf{N}_+$ 时，令 $b=a+2$，则 $x_0=(b-2)^2+1=b^2-4b+5\in B$，又当 $b=2$ 时，$b^2-4b+5=1$，而当 a 为正整数时，$a^2+1>1$，$\therefore$ $1\notin A$.

综上即证得 $A\subsetneqq B$.

课时作业

1. 有下列各式：$1\in\{0,1,2\}$；$\{1\}\in\{0,1,2\}$；$\varnothing\subsetneqq\{0,1,2\}$；$\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$；$\{0,1,2\}=\{2,0,1\}$. 其中错误的个数是 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 符合条件 $\{a\}\subsetneqq P\subseteq\{a,b,c\}$ 的集合 P 的个数是 ( )

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

3. 已知集合 $P=\{x|x^2=1\}$，集合 $Q=\{x|ax=1\}$，若 $Q\subseteq P$，那么 a 的值是 ( )

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 0，1 或 -1

4. 集合 $M=\{x|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{y|y=3t+1,t\in\mathbf{Z}\}$，$S=\{y|y=6m+1,m\in\mathbf{Z}\}$ 之间的关系是 ( )

A. $S\subsetneqq P\subsetneqq M$　　B. $S=P\subsetneqq M$　　C. $S\subsetneqq P=M$　　D. $S\supsetneqq P=M$

5. 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 ( )

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. A 与 B 无公共元素

6. 已知集合 $A=\{y|y=x^2-1\}$，$B=\{x|y=\sqrt{1-x^2}\}$，$C=\{y|y=\sqrt{1-x^2}\}$，则集合 A，B，C 的关系为________.

7. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)|y=x\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{x}=1\right\}$，则 A，B 的关系为________.

8. 给出下列 4 组集合：

①$P=\{x\in\mathbf{R}|x^2+1=0\}$，$Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2=0\}$；

②$P=\{y\in\mathbf{R}|y=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{t\in\mathbf{R}|t=y^2-2y+2,y\in\mathbf{R}\}$；

③$P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$；

④$P=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)|y=x^2-1,x,y\in\mathbf{R}\}$.

其中两个集合相等的组的序号是________，具有真包含关系的组的序号是________.

9. 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.