21世纪高职高专规划系列教材

Advanced Mathematics

高等数学

主　编　常瑞玲　郑兆顺

上册

中原出版传媒集团

Advanced Mathematics

21世纪高职高专规划系列教材

Advanced Mathematics

高等数学

上册

主　编　常瑞玲　郑兆顺

中原出版传媒集团

内容提要

本书是河南省高职高专《高等数学》精品课程课题组，根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织编写的教材。本教材既突出了高职高专的特点，又体现了高等数学中“应充分发挥数学的技术教育功能和文化教育功能”的思想。全书分上、下两册，上册共七章，内容分别是预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程。

本书可供高职高专院校师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/常瑞玲，郑兆顺，李培禄主编. —郑州：中原出版传媒集团，中原农民出版社，2008.9
(21 世纪高职高专规划系列教材)
ISBN 978-7-80739-275-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①常…②郑…③李… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 119219 号

出版：中原出版传媒集团　中原农民出版社
(地址：郑州市经五路 66 号　电话：0371—65751257
邮政编码：450002)
发行：全国新华书店
承印：河南地质彩色印刷厂
开本：787mm×1 092mm　1/16
印张：16.5　**字数**：375 千字
版次：2008 年 9 月第 1 版　**印次**：2008 年 9 月第 1 次印刷

书号：ISBN 978-7-80739-275-0　**定价**：30.00 元

《高等数学》(上册)编委会

主　编:常瑞玲　郑兆顺

副主编:徐献卿　纪保存　何　青　郭　新

编　委:常瑞玲　郑兆顺　徐献卿　纪保存　何　青
郭　新　李培禄　宋林锋　任艳梅　杨信超
李金嵘　周学勤

前 言

由河南省高职高专《高等数学》精品课程课题组，根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合多年高职高专高等数学教育研究成果，在认真研究、分析、总结国内一些高等数学教材的基础上，集思广益，通力合作，精心编写了这本规划教材。

其特色主要体现在以下几个方面：

1. 立足高职，充分发挥高等数学技术教育功能和文化教育功能，突出高等数学教学的本质。

2. 注重教学方法论的指导地位，把提高学生的一般科学素养、文化修养以及形成和发展学生数学品质作为高等数学的教育目标。

3. 体现高等数学要为学习相关专业课程和后继课程服务、为培养学生思维能力服务、为学生处理和解决相关实际问题服务和为学生可持续发展服务的宗旨。

4. 注重概念方法的教学，强化基本概念脱胎于实际的过程和主要方法，在适度注意数学的理论性、严密性、系统性的基础上，返璞归真，尽量使数学知识生活化、通俗化、简单化。

5. 注重培养学生用数学思想和方法分析解决实际问题的能力，特别是培养学生用数学的思想、概念、方法，消化吸收"工程"概念和"工程"原理的能力、把实际问题转化为数学模型的能力以及求解数学模型的能力。

6. 淡化运算技巧，注重数学结论的直观解释和应用。

7. 每章后面，结合相关内容附有相关数学史话或数学实验，并适当介绍相关数学软件的使用，有利于发挥数学的两个教育功能以及培养学生用计算机及相应数学软件求解数学问题的能力。

本教材所需教学课时约为140学时，标有*号的内容可根据不同专业选学。参加本书编写的有常瑞玲、郑兆顺、徐献卿、纪保存、何青、郭新、李培禄、宋林锋、任艳梅、杨信超、李金嵘、周学勤。

本书编写过程中得到了学院领导和同事们的大力支持，在此表示衷心的感谢，对编写过程中所参考文献的作者表示感谢。

尽管我们在《高等数学》编写过程中下了很大工夫，做了很多努力，但由于水平有限，书中难免有不妥之处，恳请使用本书的教师、学生和专家学者提出宝贵意见，以便在修订时加以改正。

高职高专《高等数学》精品课程课题组

2008年4月

目 录

第一章　预备知识

§1.1　函数的概念

函数是人类从事自然和社会科学研究过程中普遍使用的数学概念之一，它是数学的基础概念. 在中小学阶段，读者对函数概念已经有所认识，因为贯穿于中学《代数》的一条主线就是函数. 近年来，在社会科学方面，由于有一些学科向着定量化的方向发展，函数概念也已广泛地应用到这些学科之中，因此函数在应用上已超过了数学的范围.

高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程，为此要求读者对函数要有正确清晰的认识. 中学讲的函数知识还不能满足学习高等数学的需要，本章一方面要复习中学已学过的函数概念和某些函数的性质，另一方面对函数的有关知识也将作些必要的补充.

一、常量、变量与常用数集

现实世界中的事物往往表现为各种形式的量. 其中有的量，取定适当的单位后，在考察的过程中可用固定的数值来表示，这种量称为常量. 还有一些量，在考察的过程中可取不同的数值，这种量称为变量. 通常用 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z,t 等表示变量.

如一架飞机在飞行过程中，乘客人数是一个常量，而飞机飞行的高度是一个变量.

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，数集是表示变量取值范围的常用方法.

在本书中，变量总是在实数范围内讨论. 常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}_+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还有各种类型的区间. 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$.

开区间：$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\,|\,a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

左半开区间：$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\,|\,a<x\leqslant b\}$；

右半开区间：$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间：$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\}$；$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\}$；

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$；$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$；

此外，为了讨论函数在一点邻近的某些性态，引入点的邻域概念.

定义 1.1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid |x-a|<\delta\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $\bigcup(a,\delta)$，如图 1-1(a)，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 有时用 $\bigcup(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\overset{0}{\bigcup}(a,\delta)$，如图 1-1(b).

图 1-1

显然，$\bigcup(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\overset{0}{\bigcup}(a,\delta)=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念

定义 1.2 设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系(如 f)有唯一确定的实数与之对应[记作 $f(x)$]，则称 **$y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数**. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 **$y=f(x)$ 的值域**.

由定义 1.2 可见，两个函数只有当它们的对应关系相同、定义域也相同时才是同一个函数. 由于函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同，因此它们是两个不同的函数；由于函数 $y=2\lg x$ 与 $y=\lg(x^2)$ 的定义域不同，因此它们也是两个不同的函数；而函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 则是同一个函数. 再如 $x>y$，按照这个对应关系，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应. 而函数定义中的对应关系要求每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应. 因此不符合函数的定义，所以它不是函数关系.

函数的定义域，对于具有实际意义的函数来说，则要按题意来确定；对于抽象地用公式表达的函数，函数的定义域是使公式有意义的自变量的一切取值.

例 1 某城市一年里各月毛线的零售量($\times 100$kg)如表 1-1 所示.

表 1-1

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量(s)	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

表 1-1 表示了某城市毛线零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系. 它的定义域

$$D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

例 2 某河道的深度 y 与岸边一点 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系如图1-2中曲线所示. 它的定义域

$$D=[0,b].$$

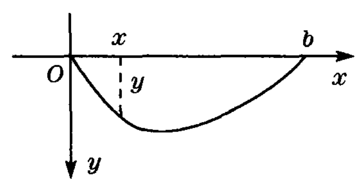

图 1-2

例 3 数学式

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

表明 y 是 x 的函数,如图 1-3 所示. 定义域是

$$D=(-\infty,+\infty).$$

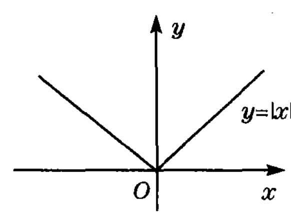

图 1-3

例 4 数学式

$$y=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

也表明 y 是 x 的函数,它的图象如图 1-4 所示. 其定义域是

$$D=(-\infty,+\infty).$$

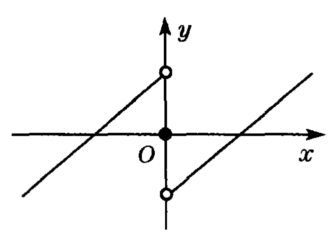

图 1-4

例 5 函数 $y=\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域 D 为满足不等式组 $\begin{cases}1+x>0,\\ x\neq 0\end{cases}$ 的 x 的解集,即

$$D=(-1,0)\cup(0,+\infty).$$

§1.2 函数的表示法

表示函数,要把它的定义域和对应关系表述清楚.一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法.常用的方法有:表格法、图示法和公式法(解析法).

(1)以表格形式表示函数的方法称为**函数的表格表示法**,如例 1 和数学用表中的函数都是用表格表示的.

(2)用图形表示函数的方法称为**函数的图示法**,如例 2 的函数就是用图示法表示的.

(3)用数学式表示函数的方法称为**函数的公式表示法**,也称为**解析法**.如例 3、例 4、例 5 的函数都是用公式法表示的.在高等数学中讨论的函数一般都用公式法表示.

例 3、例 4、例 5 的函数虽然都是用公式表示的,但它们又代表了不同的情形.例 5 中的函数,定义域中任何一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示;而例 3、例 4 中的函数,定义域中某些不同部分的 x 相对应的 y 的表示式不同.如果一个函数在定义域的不同区间上(个别的区间也可退缩为一点),对应关系分别用不同的解析式表示,则称这个函数为分段函数.例 3、例 4 的函数都是分段函数,不过例 3 中的分段函数(又叫绝对值函数)可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$,即对应关系可化为一个式子.

必须注意:

①分段函数是用几个式子合起来表示一个函数,而不是表示几个函数,在科技、工程等实际应用中经常用到分段函数;

②在求分段函数的函数值时,应先确定自变量的取值范围,再按相应的式子计算.如例 4 中的函数,求 $f(2),f(0),f(-2)$.因为 $2\in(0,+\infty),0\in\{0\},-2\in(-\infty,0)$,所以 $f(2)=1,f(0)=0,f(-2)=-1$.

下面再给出几个常见的分段函数.

1. 取整函数:$y=[x]$.

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,即若 $n\leqslant x<n+1$,则$[x]=n$(n 为整数).因此其数学表达式为

$$[x]=\begin{cases}\cdots & \cdots\cdots \\ -2, & -2\leqslant x<-1, \\ -1, & -1\leqslant x<0, \\ 0, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \\ 2, & 2\leqslant x<3, \\ \cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

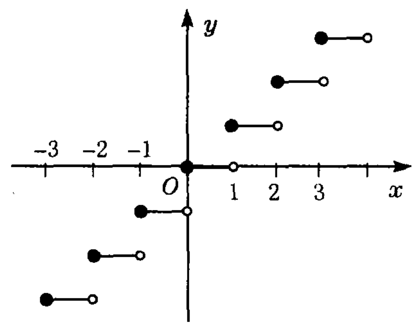

图 1 - 5

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数(图 1 - 5).

2. 符号函数：$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0.\end{cases}$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$\{-1,0,1\}$(图 1 - 6). 我们有时可以运用它将某些分段函数写得简洁一些.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0, \\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$ 可以记为

$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{sgn} x$.

又如，$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

这里 sgn x 起了符号的作用，因此称为符号函数.

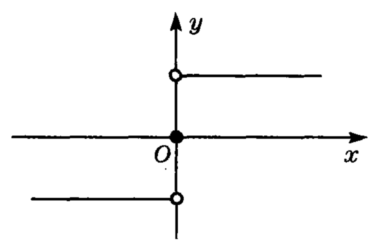

图 1 - 6

3. 狄利克莱函数：$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

§1.3 函数的几种特性

为叙述上的方便，我们先介绍几个常用的逻辑符号：

符号	$\forall$	$\exists$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
意义	任意	存在	推出	等价或充要条件

设函数 $f(x)$的定义域为 D，函数有以下性质.

一、有界性

设区间 $I\subset D$，如果函数 $f(x)$在 I 上的值域 A 有上界(或有下界、有界)，则称函数

$f(x)$在区间 I 上有上界(或有下界、有界),否则称函数 **$f(x)$在区间 I 上无上界(或无下界、无界)**.

函数 $f(x)$在区间 I 上有上界和无上界,有下界和无下界,有界和无界,我们用逻辑符号列表对比如下:

函数 $f(x)$在 I 上有上界	$\exists A\in\mathbf{R},\forall x\in I\Rightarrow f(x)\leqslant A$(或$<A$)
函数 $f(x)$在 I 上无上界	$\forall A\in\mathbf{R},\exists x_0\in I\Rightarrow f(x_0)>A$
函数 $f(x)$在 I 上有下界	$\exists B\in\mathbf{R},\forall x\in I\Rightarrow f(x)\geqslant B$(或$>B$)
函数 $f(x)$在 I 上无下界	$\forall B\in\mathbf{R},\exists x_0\in I\Rightarrow f(x_0)<B$
函数 $f(x)$在 I 上有界	$\exists M>0,\forall x\in I\Rightarrow \lvert f(x)\rvert\leqslant M$
函数 $f(x)$在 I 上无界	$\forall M>0,\exists x_0\in I\Rightarrow \lvert f(x_0)\rvert>M$

显然,函数 $f(x)$在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow$函数 $f(x)$在区间 I 上既有上界又有下界 $\Leftrightarrow$存在闭区间$[-M,M]$($M>0$),使

$$\{f(x)\mid x\in I\}\subset[-M,M]$$

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界的几何意义是:存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$,函数 $y=f(x)$的图象位于以这两条直线为边界的带形区域之内. 如图 1-7.

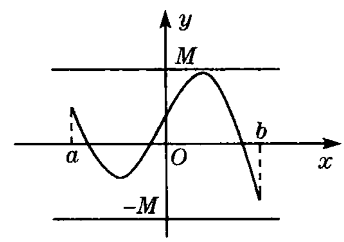

图 1-7

如果 $f(x)$在定义域 D 上有界,则称 $f(x)$为**有界函数**. 例如函数 $\sin x$ 是有界函数. 函数 $\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的,但它在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是有界的.

二、单调性

设区间 $I\subset D$,如果对$\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad[\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)],$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少),此时 I 称为函数 $f(x)$的单调增(或减)区间[有时简称为增(或减)区间].

如果将上述不等式改为 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$],则称函数 $f(x)$在区间 I 上严格增加(或严格减少).

严格增加和严格减少统称为**严格单调**. 严格增加、严格减少、单调增加、单调减少统称为**单调**. 增区间和减区间统称为**单调区间**. 在区间 I 上单调(严格)增加或单调(严格)减少的函数统称为**区间 I 上的单调函数**. 从几何直观上看,区间 I 上单调增加(减少)的函数,其图象自左向右是上升(下降)的. 在定义区间上单调(严格)增加或单调(严格)减少

的函数统称为**单调函数**.

三、奇偶性

如果对 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**;如果对 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

显然,奇函数和偶函数的定义域是关于原点对称的.

奇函数的图象关于原点对称;偶函数的图象关于 y 轴对称.

四、周期性

对 $\forall x\in D$,如果存在一个不为零的常数 T,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的周期. 当周期函数存在最小正周期时,其周期通常指它的最小正周期.

周期函数若以 $T(>0)$ 为周期,则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T]$ $(n\in\mathbf{Z})$ 上函数的图象是相同的.

例 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的特性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$, $|f(x)|=\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|<\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$;

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$;

(3) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0.$$

因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的、单调增加的奇函数,并由单调性得到 $f(x)$ 不具有周期性.

§1.4 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 A,则对 $\forall x\in D$,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in A$. 反之,对 $\forall y\in A$,能否对应唯一一个 $x\in D$,使 $y=f(x)$ 成立呢? 这就是我们要讨论的问题.

若对 $\forall x_1,x_2\in D$,且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$ [$\Leftrightarrow$ 当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时,有 $x_1=x_2$],

则称函数 $y=f(x)$ 是 D 与 A 间的一一对应.

一一对应与非一一对应列表对比如下：

$y=f(x)$ 是 D 与 A 间的一一对应	$\forall x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
$y=f(x)$ 是 D 与 A 间的非一一对应	$\exists x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

一般来说，函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 与其值域 A 间是非一一对应的. 但也存在这样的函数 $y=f(x)$，它在定义域的某个子集 I 与其对应的值域 $f(I)$ 间是一一对应的.

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D, I\subset D$. 当 $x\in I$ 时，$y\in f(I)$. 如果 $y=f(x)$ 是 I 与 $f(I)$ 间的一一对应，则对 $\forall y\in f(I)$，有唯一一个 $x\in I$ 与之对应，使 $f(x)=y$，即在 $f(I)$ 上定义了一个函数，则称此函数是函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y), y\in f(I).$$

如函数 $y=x^2$ 的定义域是 $D=\mathbf{R}$，值域是 $A=[0,+\infty)$，它在整个定义域上没有反函数. 但当 $x\in I=[0,+\infty)\subset D$ 或 $x\in I=(-\infty,0]\subset D$ 时，$y=x^2[y\in f(I)=[0,+\infty)]$ 分别有反函数 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$，它们的定义域都是 $f(I)=[0,+\infty)$，而值域分别是 $I=[0,+\infty)$ 和 $I=(-\infty,0]$.

显然，如果 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，即它们互为反函数. 并且，如果函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域 A 和定义域 D. 于是有

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x, x\in D;$$
$$f[f^{-1}(y)]\equiv y,\ y\in A.$$

如函数 $y=x^3$ 在它的定义域 $\mathbf{R}$ 上存在反函数 $x=\sqrt[3]{y}$，$x=\sqrt[3]{y}$ 的定义域是 $y=x^3$ 的值域 $\mathbf{R}$，而其值域是 $y=x^3$ 的定义域 $\mathbf{R}$.

我们不加证明地给出反函数存在的充分条件：严格单调函数必存在反函数.

函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，y 是自变量. 但习惯上我们是用 x 表示自变量，因此将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调，改写为 $y=f^{-1}(x)$. 例如函数 $y=3x-2$ 的反函数是 $x=\dfrac{y+2}{3}$，我们要改写为 $y=\dfrac{x+2}{3}$. 一般我们所说的反函数都是指改写后的函数.

但要注意：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象，在坐标平面上是同一点集. 当把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调后，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象就不同了，而是关于直线 $y=x$ 对称.

§1.5 初等函数

一、基本初等函数及其图象

1. 幂函数.

函数 $y=x^{\alpha}$（常数 $\alpha\in\mathbf{R}$）称为幂函数，其定义域及其性质与 α 的取值有关，但任意 $\alpha\in\mathbf{R}$，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内都有意义. 为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant0$ 的情形，而 $x<0$ 时的情形可根据函数的奇偶性确定.

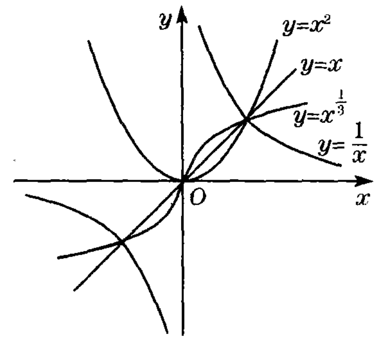

图 1-8

当 $\alpha>0$ 时，函数的图象通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界；当 $\alpha<0$ 时，图象不过原点，但仍过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少、无界，曲线以坐标轴为渐近线. 图 1-8 中画出了 $\alpha=\pm1,\alpha=2,\alpha=\frac{1}{3}$ 的情形.

2. 指数函数.

函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）称为指数函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，由于无论 x 取何值，总有 $a^{x}>0$ 且 $a^{0}=1$，所以它的图象全部在 x 轴上方，且通过点 $(0,1)$. 也就是说它的值域是 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴的负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴的正半轴为渐近线. 如图 1-9 所示.

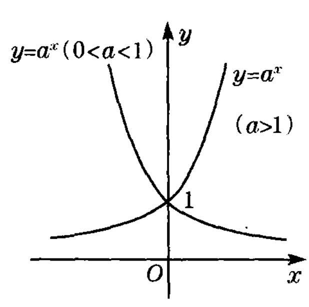

图 1-9

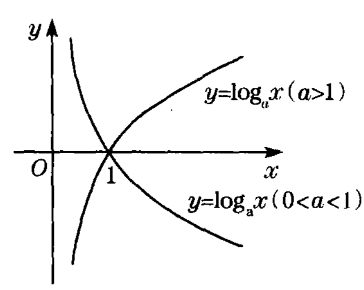

图 1-10

3. 对数函数.

函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1$）称为对数函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，图象全部在 y 轴右方，值域是 $\mathbf{R}$. 无论 a 取何值，曲线都通过点 $(1,0)$.