黎克麟 宋乾坤 郭发明 编著

GAODENG DAISHU

高等代数教学分析与研究

GAODENG DAISHU
JIAOXUE FENXI
YU YANJIU

四川大学出版社

015
41

四川省重点课程建设项目

015
41

高等代数

教学分析与研究

黎克麟　宋乾坤　郭发明　编著

四川大学出版社

责任编辑：王　锋
责任校对：李川娜
封面设计：罗　光
责任印制：曹　琳

图书在版编目(CIP)数据

高等代数教学分析与研究 / 黎克麟，宋乾坤，郭发明编著．—成都：四川大学出版社，2004.7
ISBN 7-5614-2848-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①黎…　②宋…　③郭…　Ⅲ．高等代数-高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 065247 号

书名　高等代数教学分析与研究

编　著　黎克麟　宋乾坤　郭发明
出　版　四川大学出版社
地　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行　四川大学出版社
印　刷　郫县犀浦印刷厂
开　本　787mm×1 092mm　1/16
印　张　16.5
字　数　381 千字
版　次　2004 年 9 月第 1 版
印　次　2004 年 9 月第 1 次印刷
印　数　0 001～2 000 册
定　价　28.00 元

版权所有◆侵权必究

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：www.scupress.com.cn

致　谢

本书在编著和出版过程中，曾得到四川省教育厅重点建设课程高等代数和湖州师范学院重点建设课程高等代数等项目以及浙江省重点建设专业数学与应用数学专业的支持，在此表示衷心的感谢！

前　言

高等代数是数学专业一门重要的基础课程。近几年来，我们课题组的教师积极开展教育教学研究，不断进行教学内容和教学方法的改革与试验，并逐渐形成了我系高等代数课程的教学风格。为了更好地从经验走向科学，把高等代数这一课程建设好，我们编著了这本《高等代数教学分析与研究》，作为教材《高等代数》的辅助教程。

在编写过程中，我们力图使本书充分反映我们课题组的教学成果，并力图使其充分体现我们在高等代数教学中所总结的八条原则，即教书育人原则，专业性与师范性相结合的原则，创造性原则，整体性原则，传授数学的精神、思想和方法的原则，启发性原则，理论联系实际原则。正是这八条原则，构成了我们教学风格的内核。

本书的编写依照三年制师专高等代数教学大纲的要求，考虑学生在学习高等代数过程中反映的实际困难，结合教材与学生的认识规律，我们除了对教材进行补充、改编外，还对教材的主要章节给出了学习目标与重、难点，对难于理解的概念、符号和结论等给予了详细注释，尤其针对教材例题少、学生做作业难这一特点，补充了大量典型例题并给出了详尽的分析与解答。另外，本书在主要章节后都列有小结，目的是帮助学生掌握高等代数知识，深刻理解贯穿在高等代数中的数学精神、思想和方法，全面提高他们的数学修养与素质，从而逐步实现教学过程和教学效果的最优化。

限于我们的水平和经验，书中缺点和错误在所难免，殷切希望使用本书的教师和学生不吝赐教，以便今后修正。

编著者

2004 年 3 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

0 预备知识

0.1 绪 论

0.1.1 代数学发展概要

纵观数学史，代数学一直是指对数、数制以及求解各种值方程、代数方程或由这些方程组成的方程组的一般规律的研究．所有这些方程都包含在如下一般形式中：

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0.$$

其中，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$是已知数，x 是所求未知数，n 是整数次幂．上述方程也可包含在含有多个未知数的更一般的形式之中．大约从 1800 年起，代数学的内容已经扩展到超出了数值和方程的范围，因而也包括了更多的一般理论．

古代埃及、巴比伦人(约公元前 1700 年)的一些计算方法可以看作是求解各种方程的尝试．埃及人使用他们有局限的数值主要解决了线性(次数 $n=1$)方程的求解；巴比伦人由于采用更为灵活的数制，已能求解二次($n=2$)以及一些更高次数的方程．后来，希腊人(公元前 500 年—前 300 年)发展了一种似乎应称之为“几何代数”的面积变换技巧．在“古典时代”的后期，亚历山大的丢番图(Diophantus，活跃时期约为公元 250 年)以其《算术》一书影响后世数学家，对代数学做出了极大贡献．

我国古代数学家也探究过许多代数课题，曾有过许多领先世界的成果，特别是我国最早使用的十进制位置制，在方程数值解等方面有杰出贡献，但对西方数学的影响很少．印度的数值著作和代数学却影响过西方，因为他们带给西方十进位制和位置计数系统．

阿拉伯人把印度的数制传播到西方，并广泛地发展了代数学．阿尔·花拉子模(AbūJáfar Muhammard ibn Músā Al-Khwārizmī，800 年—850 年)对这一传播是有功绩的。他的《代数学》(Al-jabr wal-mugabala)包括了基本的代数方法．“代数”一词就来源于他的“Al-jabr”，意思是“还原”，或者“完备”，指把方程一边去掉的项移到方程的另一边．

文艺复兴时期，代数学开始在西方兴盛起来．由于采用了印度－阿拉伯数制(约 1500 年)，数学家们建立了标准的代数、符号以及方法．在法国，舒开(Nicolas Chuguest)出版了他那部重要但无影响的《数学科学中的三部曲》，这部著作包含了大量的代数学内容．在意大利，帕乔利(Luca Pacioli，1445—1517)的卓有影响的《算术、几何、比与比例集成》(1494)，拓展了早期的代数学构成理论．在德国数学家发展数学技巧的时候，英国人雷科德(Robest Recozde，1510—1558)写出了他的代数学论文《砺智石》(1557)；意大利人费罗(Sciphione del Ferro，约 1465—1526)、塔塔利亚(Niccolo Tartaglia，1500—1557)和费拉里(Ferrari，1522—1565)在求解一般三次方程($n=3$)及四次($n=4$)方程方面有了重大突破．卡当(Cardan，

1510—1576)在其《重要的艺术》(1545)一书中公布了这些成果. 后来在16世纪,法国的韦达(Franeois Viète,1540—1603)在《分析方法入门》(1591)中对代数学理论和记法做出了贡献.

笛卡尔(Descartes,1596—1650)在《几何学》(1637)一书中表明,代数学有解决几何问题的能力,他还为代数学引进了新的符号体系.在笛卡尔时代的前后,用于初等代数的标准符号体系大部分都已建立起来.

承认方程可以有负根及复数根,用去了许多时间. 到18世纪下半叶,数学家们已经认识到,要断言任意 n 阶方程都有根存在,这是一个需要证明的代数学基本定理. 然而这种证明已超出了代数学自身的范围.

19世纪后期,由于数学家的推动,代数学的研究范围远远超出了数域与方程领域,包容了更多的一般理论. 求解五次($n=5$)和更高次方程以及其他一些问题的尝试,导致了群论、域论及伽罗瓦理论的诞生. 1843年,哈密尔顿(William Rowen Hamilton,1805—1865)提出了四元数理论. 接着,向量理论也发展起来. 行列式和矩阵成了该世纪中有重要意义的代数工具. 到19世纪末,出现了各种各样的具有极广用途的代数结构.

20世纪初期,数学家们都采用抽象和公理化的观点来研究代数结构. 1930年至1931年,范·德·瓦尔登(B.L. Van der Waerden)《现代代数》的出版,标志着以研究群、环、域、格和向量空间这样一些抽象结构为内容的代数学蓬勃发展的重要时刻终于来临了. 通过这种一般抽象的途径,数学家们继续向着现代代数学迈进.

0.1.2 学习高等代数的目的和意义

一般说来,大学里设置高等代数课程的目的,主要是为了培养学生的数学素养,提高学生的数学能力. 一句话,就是要通过对高等数学的学习,深刻领悟数学的精神、思想和方法. 具体地讲,学习高等代数是为使学生初步了解基本的、系统的代数知识和抽象的、严格的代数方法,以加深对中学代数的理解,并为进一步深入学习数学知识打下基础.

0.1.3 怎样学好高等代数

从初等数学转向高等数学的学习,首先遇到的问题将是学习方法的转变. 这主要是由于初等数学的内容大多比较经验、直观、通俗和形而上学,而高等数学理论性强,叙述严谨、论证严密,内容也较初等数学抽象、深刻和难于理解. 在此,我们就如何学好高等代数谈谈我们的看法.

第一,同学们要克服松劲、麻痹的思想. 有的同学觉得考大学辛苦了,现在可以松口气,好好玩一玩了. 这恰恰是学好数学最可怕的敌人,因为数学是一门演绎科学,学习数学的过程就像上台阶一样,需要我们一个台阶一个台阶地上,极少有人能一下跨过两个台阶. 也就是说,前面的内容是后面内容的基础,前面学不好,后面就很难学好了. 因此,同学们一定要认真听讲,不要随意缺席,而且应反复研读教材,课前认真做好预习,课后再认真复习.

第二,学会从定义出发,思考问题,证明问题. 高等代数教材中无论是定理的证明,还是

习题的证明，往往都是从定义出发去思考、分析，然后给予解答的．这一特点不同于中学数学，事实上，中学数学很少有严格的定义．从定义出发，首先要求我们要深入钻研书上的定义，弄清概念的内涵和外延，并深刻理解，最好能根据自己的理解，把文字变成数学语言．其次要求我们把握好各个概念之间的区别和联系，并能够正确使用．

第三，培养自己对数学的兴趣．爱因斯坦说过，兴趣是我们进步的前提．只有对数学产生兴趣，勤动脑，多动手，才能最终学好数学．

第四，多讨论甚至争论．科学的问题，通过讨论和争论不会有任何害处，当我们不理解某个概念、某段话、某段证明时，听听别人的意见更是有益无害．

第五，由于高等代数比较抽象，因此要善于总结积累，学完一段后，要能从具体到抽象，再从抽象到具体，用自己的语言进行小结，只有这样才能不断提高．

0.2 数学归纳法

数学归纳法是数学论证中最重要而又最基本的证明方法，要特别注意理解数学归纳法的本质，从而正确地使用数学归纳法去解决问题．

0.2.1 引 例

请思考用什么方法解答下面的 4 个问题．

(1) 证明：$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$．

(2) 证明：任意自然数 $n(n\geqslant 2)$都可以表示成若干个素数的乘积(注：所谓素数就是只能被 1 和它自身整除的自然数，如 2,3,5,7,11,13,…)．

(3) 若 $n\geqslant 2$，且 $0<a_i<1\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-\cdots-a_n.$$

(4) (一个更复杂的例子) 寻求一个法则，计算用互不相交的对角线将一凸 n 边形分成各个三角形的分法的数目 $p(n)$．

0.2.2 说 明

很容易发现，上面四题中的例(1)和例(3)用数学归纳法证明极其简单．但对例(2)和例(4)，就很难做出判断了，显然用中学学过的数学归纳法(即第一数学归纳法)不能证明，这是值得注意的．

0.2.3 数学归纳法的本质

0.2.3.1 数学归纳法的一般形式

设有一个与自然数 n 有关的命题 $p(n)$，如果满足

①当 $n=1$ 时,命题 $p(n)$成立;

②假设 $n=k$ 时,命题 $p(n)$成立,当 $n=k+1$ 时,命题 $p(n)$也成立;

那么,这个命题对一切自然数都成立.

0.2.3.2 无穷多个三段论

$\begin{cases}\text{若命题 } p(n) \text{ 在 } n=1 \text{ 时成立,则当 } n=2 \text{ 时命题 } p(n) \text{ 也成立;}\\ \text{已知命题对 } n=1 \text{ 成立;}\\ \text{所以命题在 } n=2 \text{ 时也成立.}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{若命题 } p(n) \text{ 在 } n=2 \text{ 时成立,则当 } n=3 \text{ 时命题 } p(n) \text{ 也成立;}\\ \text{因命题对 } n=2 \text{ 成立;}\\ \text{所以命题在 } n=3 \text{ 时也成立.}\end{cases}$

…… …… ……

$\begin{cases}\text{若命题 } p(n) \text{ 在 } n=k \text{ 时成立,则当 } n=k+1 \text{ 时命题 } p(n) \text{ 也成立;}\\ \text{因命题对 } n=k \text{ 成立;}\\ \text{所以命题在 } n=k+1 \text{ 时也成立.}\end{cases}$

…… …… ……

在这些无穷多个三段论中,每一个三段论的大前提都具有一般形式:

假设命题 $p(n)$在 $n=k$ 时成立,则命题在 $n=k+1$ 时也成立(条件②).

而每个三段论的小前提是上一个三段论的结论,因此,在大前提普遍正确的情况下,只要第一个三段论的小前提正确,命题就应是普遍正确的.

因此,数学归纳法的一般形式包含了无穷多个三段论,而把这些无穷多个三段论概括成数学归纳法正是体现了人类思想的伟大. 事实上,数学证明的本质便是数学归纳法所揭示的本质.

0.2.3.3 用集合语言来叙述数学归纳法

数学归纳法原理:设 $p(n)$是一个与自然数 n 有关的命题,令 $S=\{n\mid n\in\mathbf{N}, p(n)\text{成立}\}$,如果:

①$1\in S$;

②假设 $k\in S$,则 $k+1\in S$;

那么 $S=\mathbf{N}$.

请思考:S 是否真的等于 $\mathbf{N}$?

0.2.3.4 最小数原理与数学归纳法

最小数原理:自然数集合 $\mathbf{N}$ 的任意非空子集 T 必含有一个最小数, 即若 $T\subset\mathbf{N}$, 且 $T\neq\varnothing$,则 $\exists\, t_0\in T$,使得对 $\forall\, t\in T$,都有 $t_0\leqslant t$.

数学归纳法原理的一个证明:假设 $S\neq\mathbf{N}$,令 $T=\mathbf{N}-S$,即表示使命题 $p(n)$不成立的自然数的集合, 则 $T\neq\varnothing$,由最小数原理可知 T 中有最小数 $t_0\in T$. 因命题 $p(n)$对于 $n=1$ 成立(数学归纳法原理中条件①成立),所以 $t_0>1$,从而 $t_0-1\in\mathbf{N}$,又 t_0 是 T 中的最小数,故 $t_0-1\notin T$,因此 $p(n)$在 $n=t_0-1$ 时成立. 由条件②知,$p(n)$在 $n=t_0$ 时成立,这说明 $t_0\notin T$,与 T 的定义矛盾. 证毕.

注 我们用最小数原理证明了数学归纳法原理,这只说明,若承认最小数原理,则数学

归纳法原理可以看成是一个定理. 事实上,若承认数学归纳法原理也可以证明最小数原理. 这两个原理事实上是等价的,关于它们的等价性在此不再讨论了.

0.2.4 数学归纳法的加强形式——第二数学归纳法

设有一个与自然数 n 有关的命题 $p(n)$,如果

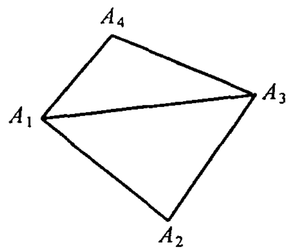
① 当 $n=1$ 时,命题 $p(n)$ 成立;

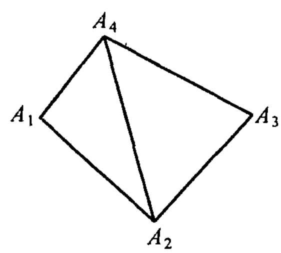
② 假设 $k<n$ 时命题 $p(k)$ 成立,则 $p(n)$ 也成立;

那么,命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

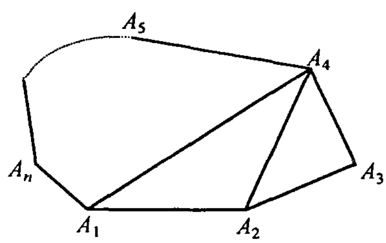
0.2.5 应用——关于引例(4)的解法

解 ① 如图所示,对于一个四边形来说,这个分法数显然等于2,即 $p(4)=2$,并规定 $p(3)=1$.





②假设对于 $k<n$,数 $p(k)$ 已经求出,现在求 $p(n)$. 为此,考察凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$,如下图:



在任何一种分法中,边 A_1A_2 总是某个三角形的一条边,这个三角形的顶点可以是点 A_3,A_4,…,A_n 中任何一点.以 A_3 为顶点的那些分法数目就等于将 $(n-1)$ 边形 $A_1A_3A_4\cdots A_n$ 分成各个三角形的分法数目,即 $p(n-1)$;以 A_4 为顶点的那些分法数目等于将 $(n-2)$ 边形 $A_1A_4A_5\cdots A_n$ 分成各个三角形的分法数目,即 $p(n-2)=p(n-2)p(3)$;以 A_5 为顶点的那些分法数目是 $p(n-3)p(4)$,以此类推,可以得到如下关系:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)p(3)+p(n-3)p(4)+\cdots+p(3)p(n-2)+p(n-1).$$

连续使用这个公式,我们得到:

$$p(5)=p(4)+p(3)p(3)+p(4)=2+1\times1+2=5,$$
$$p(6)=p(5)+p(4)p(3)+p(3)p(4)+p(5)=14,$$
$$p(7)=p(6)+p(5)p(3)+p(4)p(4)+p(3)p(5)+p(6)=42,$$
$$p(8)=p(7)+p(6)p(3)+p(5)p(4)+p(4)p(5)+p(3)p(6)+p(7)=132,$$
$$\cdots\cdots$$

通常,利用一般公式可以证明 $p(n)=\dfrac{2(2n-5)!}{(n-1)!\ (n-3)!}$.

0.2.6 归纳法怪论

下面用数学归纳法证明一个有趣的断言:"任何 n 个女孩都有相同颜色的眼睛."

对于 $n=1$,这句话显然是正确的,剩下的是从 n 推到 $n+1$. 为了具体起见,我们先从 3 推到 4,仿此可以说明一般情形.

设有 4 个女孩,她们分别是 A,B,C,D,假设 $n=3$ 时命题成立,则 A,B,C 的眼睛有相同的颜色;B,C,D 的眼睛也有相同的颜色. 因此,A,B,C,D 的眼睛必定具有相同的颜色.

$$\rlap{$\overbrace{}$}A\quad\underbrace{B\quad C\quad D}$$

这就证明了 $n+1=4$ 时的论点,从 4 推到 5 的情形显然也没有什么困难.请解释这个怪论.

习　　题

1. 证明:$1\cdot1!\ +2\cdot2!\ +3\cdot3!\ +\cdots+n\cdot n!\ =(n+1)!\ -1$.
2. 证明二项式定理:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+b^n,$$

其中,$C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

3. 用最小数原理证明第二数学归纳法.
4. 证明:含有 n 个元素的集合的一切子集的个数等于 2^n.

0.3 整数的可除性

整数的可除性与一元多项式的可除性是类似的,由于整数的可除性的内容比较初等、直观、易于理解,因此我们对其作一个简要的介绍,目的是使学生易于接受多项式的理论,为以后的学习打下基础.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com