工科数学综合训练与应试指南

（上册）

张孟秋　主　编
刘碧玉　副主编

中南工业大学出版社

工科数学综合训练与应试指南

（上　册）

张孟秋　主　编

刘碧玉　副主编

中南工业大学出版社

前　言

改革工科院校数学教材内容和教学体系，以适应提高工程技术人员的数学素质、培养跨世纪高科技人才的需要，是一个迫在眉捷、值得研究的重要问题．近年来我们在这方面作了一些探索和尝试，编写了《工科数学》(由湖南科学技术出版社出版)教材，将传统的《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》、《数学建模》等内容有机地结合在一起．本书《工科数学综合训练与应试指南》与《工科数学》教材内容同步，亦可与《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》等教材配套使用，也可作工科高等院校师生的教学和学习的参考书．

本书分上、下两册，共二十二章，各章基本上按"内容提要"、"客观题"、"综合例题分析与题解"三部分编写．力求做到：全书以例题分析与解题方法为纲，由各类有代表性、启发性、综合性的典型例题组成一个有机的整体，有效地、系统地、全面地帮助读者复习、巩固和提高工科数学的知识，培养分析问题和解决问题的能力．为了使报考硕士研究生的读者了解我国招收研究生对数学的基本要求和发展趋势，在附录中，我们汇编了 1996、1997 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题，并附有参考答案．

本书编写分工是：第一、二章和附录为张孟秋，第三、四、五章为王志忠，第六、十五章为刘碧玉，第七、八、九章为袁源，第十、十一、十六章为沈美兰，第十二、十三、十四章为谭丽芳，第十七、十八、十九章为雷宝瑶，第二十、二十一、二十二章为王国富．张孟秋任主编，刘碧玉任副主编，韩旭里教授主审．

本书是在中南工业大学应用数学与应用软件系的领导及全体教师的关心和支持下出版的，在此，一并致谢．

由于编者水平有限，书中谬误疏漏在所难免，敬请广大读者批评指正．

编　者

1997 年 3 月

目　录（上　册）

第一篇

线性代数与空间解析几何

第 1 章
行列式与矩阵

1.1 内容提要

1.1.1 行列式与矩阵

1. 行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式等值.

(2) 交换行列式的两行或两列,行列式仅变号.

(3) 一个常数乘以一个行列式等于这个数乘以行列式的某一行(或列)的各元素.

(4) 如果行列式的某一行(或列)是两个元素之和,则行列式可写成两个行列式之和的形式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 行列式的某行(或列)乘以一个常数后加到另一行(或列)中,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

(6) 行列式的值等于它的某一行(或列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. 而 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式,也就是将 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和 j 列的元素划掉,剩余的元素按原位置次序所构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 重要公式:

(1) 设 A 为 n 阶方阵,则 $|A| = |A^T|$ (其中 T 表示转置).

(2) 设方阵 A 为可逆矩阵,则 $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

(3) 设 A^* 为 A 的伴随矩阵,即 $A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$,

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,则 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

(4) $|kA| = k^n|A|$ (A 为 n 阶方阵).

(5) 设 A、B 为 n 阶方阵,则 $|AB| = |A||B|$.

(6) 设 A 为 n 阶方阵,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(7) $\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$, $\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$, $\begin{vmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$,

其中 A 为 m 阶方阵,B 为 n 阶方阵.

(8) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1=i<j\leqslant n} (a_j - a_i).$$

3. 重要矩阵及运算性质

(1) 逆矩阵.

设 A 为 n 阶方阵，若存在一个 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E,$$

则称 B 为矩阵 A 的逆矩阵，记为 $B = A^{-1}$.

方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$，且 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

逆矩阵的性质：

① $(A^{-1})^{-1} = A$；

② $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1} \quad (\lambda \neq 0)$；

③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

④ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；

A^* 的性质：

① $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$；

② $(A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A \quad (A$ 可逆)；

③ $(AB)^* = B^*A^*$；

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A \quad (A$ 为 n 阶方阵).

(2) 分块矩阵.

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的性质

设 $A = \begin{vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{vmatrix}$，且 $A_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 是方阵，则 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_k|$.

(3) 设 $A = \begin{vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{vmatrix}$，$A$ 可逆，且 $A_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 可逆，则

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_1^{-1} & & & 0 \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k^{-1} \end{vmatrix}.$$

(4) 设 A、B 均可逆，则

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

4. 矩阵初等变换的性质

定理 1　(1) 若矩阵 A 经过有限次初等行(或列)变换变成矩阵 B，则 A 的行(或列)向量组与 B 的行(或列)向量组等价；而 A 的 k 个列(或行)向量与 B 中对应的 k 个列(或行)向量有相同的线性相关性；

(2) 矩阵的初等变换不改变矩阵 A 的秩;(矩阵的秩参见 3.1.3)

(3) 若 $A \cong B$,则秩(A) = 秩(B).

定理 2　设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵,对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等方阵;对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等方阵.

定理 3　设 A 为可逆方阵,则存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$,使 $A = P_1P_2\cdots P_l$.

定理 4　(1) 矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在满秩矩阵 P, Q 使 $A = PBQ$;(参见 4.1)

(2) 若秩$(A) = r$,则存在满秩矩阵 P, Q 使 $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,其中 E_r 为 r 阶单位矩阵.

1.2　客观题

1.2.1　判断题

(1) 主对角线为零的行列式一定等于零.

非　例如:$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+a_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & c_2+a_2 & b_2+c_2 \\ a_3+b_3 & c_3+a_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$ 一定等于行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的整数倍.

是　用行列式性质计算可得

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+a_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & c_2+a_2 & b_2+c_2 \\ a_3+b_3 & c_3+a_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2+c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & b_1+c_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & b_2+c_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & c_2 & b_2+c_2 \\ a_3 & c_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & c_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & c_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(3) 若 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$,则

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix}.$$

非　因 $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_2 \\ c_1 & d_1+d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1+b_2 \\ c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

所以，一般说来，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix}$.

说明：矩阵与行列式是完全不同的概念.矩阵仅仅是一个矩形的“数表”；而行列式是在一个方形数表中根据定义规定运算而得到的一个数或一个代数式，因此可以认为行列式是一种运算的符号.由本题可知，矩阵相加与行列式相加是有区别的.同样，对于数乘矩阵与数乘行列式以及矩阵相乘与行列式相乘均有区别.

(4) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 k 为常数，则行列式 $|kA|=k|A|$.

非　因 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，所以行列式 $|kA|=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$.因行列式的每一行（或列）都有一个公因数 k 可以提出，所以共可提取 n 个公因数 k，于是可得 $|kA|=k^n|A|$，所以一般 $|kA|\neq k|A|$.

(5) 设 A^* 为 A 的伴随矩阵，且 k 为常数，则 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

是　因 $A^*=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$，其中 A_{ij} 是 A 的 $n-1$ 阶子行列式，因而 $(kA)^*$ 的每一个元素是 kA 的 $n-1$ 阶子行列式，所以可提出 $n-1$ 个公因数 k，于是 kA 中的元素 ka_{ij} 的代数余子式为 $k^{n-1}A_{ij}$，即

$$(kA)^*=\begin{bmatrix} k^{n-1}A_{11} & k^{n-1}A_{21} & \cdots & k^{n-1}A_{n1} \\ k^{n-1}A_{12} & k^{n-1}A_{22} & \cdots & k^{n-1}A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^{n-1}A_{1n} & k^{n-1}A_{2n} & \cdots & k^{n-1}A_{nn} \end{bmatrix}=k^{n-1}A^*.$$

所以 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

(6) 若矩阵 A,B 均不为零，则 A 与 B 之积一定不为零.

非　设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\neq 0$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\neq 0$，

则　$AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\neq 0$，

但　$BA=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

因而，虽然矩阵 A,B 均不为零，但 A 与 B 之积不一定不为零.

(7) 设 A,B 均为 n 阶方阵，则 $|A+B|=|A|+|B|$ 总成立.

非　设　$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，

则　$|A+B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0$，

但 $|A|+|B|=12$.所以，$|A+B|=|A|+|B|$ 不一定总成立.

(8) 设 n 阶方阵 A 适合 $A^2 = A$，且 $A \neq E_n$，则 A 一定可逆.

非　因为 $A^2 = A$，所以 $A^2 - A = 0$，即 $A(A - E_n) = 0$. 若 A 可逆，则用 A^{-1} 左乘两端，得 $A - E_n = 0$，即 $A = E_n$ 矛盾. 故 A 一定不可逆.

(9) 设 A 为 n 阶方阵. 如果对任一 $n \times 1$ 矩阵 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 都有 $AX = 0$. 那么 $A = 0$.

是　设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，由于

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

可知 $a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 故 $A = 0$.

1.2.2　填空题

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n =$ ______.

解　因为 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots)$，

所以

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-3} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 的充要条件是______.

解　若 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$，

则　$(A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$，

即　$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$，

比较等式两边，则得 $AB = BA$.

反之，若 $AB = BA$. 则　$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$，

所以　$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

综上所述便知 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 的充要条件是 $AB = BA$.

(3) 设 A 是反对称矩阵，B 是对称矩阵，则 AB 是反对称矩阵的充要条件是______.

解　若 AB 是反对称矩阵，则 $(AB)^T = -AB$.

又　$(AB)^T = B^T A^T = B(-A) = -BA$，

故　$AB = BA$.

反之，若 $AB = BA$，则 $-AB = -BA = B(-A) = B^T A^T = (AB)^T$.

所以 AB 是反对称矩阵.

综上所述便知，若 A 是反对称矩阵，B 是对称矩阵，则 AB 是反对称矩阵的充要条件是 AB

$= BA.$

(4) 设 A 为三阶方阵，A^* 为伴随矩阵，$|A| = \frac{1}{8}$，则 $|(\frac{1}{3}A)^{-1} - 8A^*| =$ ______.

解　因为 $A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{8}A^{-1}$，于是 $|(\frac{1}{3}A)^{-1} - 8A^*| = |3A^{-1} - A^{-1}| = |2A^{-1}| = 64.$

(5) 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $A_{ij} = a_{ij}$，$a_{11} \neq 0$，则 $|A| =$ ______.

解　因为 $A^* = (A_{ji})_{3\times 3} = (a_{ji})_{3\times 3} = A^T$，所以 $|A^*| = |A^T| = |A|$. 又因为 $|A^*| = |A|^{3-1} = |A|^2$，所以 $|A|^2 = |A|$，即 $|A|(|A| - 1) = 0$，从而 $|A| = 0$ 或 $|A| = 1$. 再由 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33} = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \neq 0$，所以 $|A| = 1$.

(6) 设 $A = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$，则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} =$ ______.

解　$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

(7) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，则 $|(4E - A)^T(4E - A)| =$ ______.

解　$|(4E - A)^T(4E - A)| = |(4E - A)^T||4E - A| = |4E - A|^2$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}^2 = 36.$$

(8) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$，其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$ 均为三维行向量，且已知 $|A| = 18$，$|B| = 2$，则行列式 $|A - B| =$ ______.

解　因为 $A - B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{bmatrix}$，于是

$$|A - B| = \begin{vmatrix} \alpha - \beta \\ \gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha \\ \frac{1}{2} \times 2\gamma_2 \\ 2 \times \frac{1}{3} \times 3\gamma_3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_3 \\ 3\gamma_3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}|A| - 2|B| = \frac{1}{3} \times 18 - 2 \times 2 = 2.$$

(9) 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&2\end{bmatrix}$，且矩阵 B 满足关系式：$AB=A+B$，则 $B=$ ______.

解　由 $AB=A+B$ 知 $AB-A-B+E=E$，则 $A(B-E)-(B-E)=E$，即 $(A-E)(B-E)=E$，所以 $B-E=(A-E)^{-1}$，从而

$$B=E+(A-E)^{-1}=E+\begin{bmatrix}0&2&1\\3&3&2\\1&2&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=E+\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&-1&3\\3&2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&0&3\\3&2&-5\end{bmatrix}.$$

(10) 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=$ ______.

解　$(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=(A+3E)^{-1}(A+3E)(A-3E)$

$$=A-3E=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

(11) 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^3=0$，则 $(E-A)^{-1}=$ ______.

解　因为 $(E-A)(E+A+A^2)=E+A+A^2-A-A^2-A^3=E$，

$(E+A+A^2)(E-A)=E-A+A-A^2+A^2-A^3=E.$

故　$(E-A)^{-1}=E+A+A^2.$

(12) 设 A,B 均为四阶方阵，$|A|=2$，$|B|=1$，$A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$，均为四维列向量，则 $|A+B|=$ ______.

解　因为 $A+B=(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)$，所以

$$|A+B|=|\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|=|\alpha,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|+|\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|$$
$$=2^3|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|+2^3|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|=2^3|A|+2^3|B|=24.$$

(13) 若 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$A^6=E$，则 $A^{11}=$ ______.

解　因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，且 $A^6=E$，所以 $A^{12}=A^{11}A=E$，

故　$$A^{11}=EA^{-1}=A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(14) 设 A 为 n 阶方阵，E 为单位矩阵，$AA^T=E$，$|A|<0$，则 $|A+E|=$ ______.

解　因为 $|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||E+A^T|=|A||(E+A)^T|$

$= |A||E+A|$，从而 $|E+A|(|A|-1)=0$. 又 $|A|<0$，所以 $|A|-1<0$，故 $|A+E| = 0$.

(15) 设 A、B 均为 n 阶可逆矩阵，则 $D=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ 必为可逆矩阵，且 $D^{-1}=$ ______.

解　因为 A、B 均为 n 阶可逆矩阵，所以 $|D|=\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|\neq 0$，故 D 为可逆矩阵. 设

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

由于 $$DD^{-1}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+BX_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix},$$

所以有 $$\begin{cases} AX_1=E_n \\ AX_{12}=0 \\ CX_{11}+BX_{21}=0 \\ CX_{12}+BX_{22}=E_n \end{cases}$$

解之得：$X_{11}=A^{-1}$，$X_{12}=0$，$X_{21}=-B^{-1}CA^{-1}$，$X_{22}=B^{-1}$. 故

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

(16) 设 A、B 均为可逆矩阵，则 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 必为可逆矩阵，且 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$ ______. 又若

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}，则 D^{-1}= \underline{\qquad}.$$

解　因 A、B 均为可逆矩阵，所以有 A^{-1} 与 B^{-1}，且

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}=E.$$

故 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 为可逆矩阵，且 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

令　$C_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，$C_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 C_1 与 C_2 都可逆，且

$$C_1^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\quad C_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以 $$D^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C_2^{-1} \\ C_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(17) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$,则与矩阵 A 可交换的矩阵 $B=$______.

解　设矩阵 $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}$,则由 $AB=BA$ 得 $\begin{cases}x+z=x\\ y+u=x+2y\\ 2z=z\\ 2u=z+2u\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}z=0\\ u=x+y\end{cases}$,故 $B=\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x+y\end{bmatrix}$ 其中 x,y 为任意数.

(18) 关于 x 的方程 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_2\\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x\end{vmatrix}=0$ 的解为______.

解　因

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到其它各行}]{\text{将第一行乘}(-1)}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x\end{vmatrix}$$

$$=a_1(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_{n-1}-x).$$

所以其解为 $x_1=a_1,x_2=a_2,x_3=a_3;\cdots,x_{n-1}=a_{n-1}$.

1.2.3　选择题

(1) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$;$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$;$C=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 5 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix}$,则下列符号有意义的是(　　).

(A) $A+B$;　　(B) AB;　　(C) BA;　　(D) AC.

解　因为 A、B 两矩阵的列数不相等,所以 A、B 不能相加.故 $A+B$ 无意义.因为 A 为 2 列矩阵,而 B 为两行矩阵,即 A 的列数等于 B 的行数,故 AB 有意义.因为 B 为 3 列矩阵,而 A 只有 2 行,故 BA 无意义.同理可知,AC 亦无意义.

综上所述可知,应选(B).

(2) 下列等式成立的是(　　).

(A) $2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 2 & 5\end{vmatrix}$;　　(B) $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}$;

(C) 设 A,B 均为 n 阶矩阵,且 $A\neq 0,B\neq 0$,则 $AB\neq 0$;

(D) 设 A,B 均为 n 阶矩阵,则 $(AB)^2=A^2B^2$.