

400 Latest World Famous

400个最新世界著名

数学 *Mathematical*
Maximum and Minimum Problem

最值问题

◎ 刘培杰 主编



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，
只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，
但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，
适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，
同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

 哈尔滨工业大学出版社

400 Latest World Famous

400个最新世界著名

数学 *Mathematical*
Maximum and Minimum Problem

最值问题

© 刘培杰 主编



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，
只有具有青春与力量才能做得满意。—— 诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，
但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，
适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，
同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。—— 大卫·希尔伯特



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书收集了 400 余道国内外数学最值试题,它将抽象的定理、公式、方法隐含于通俗、生动、有趣的题目中,深入浅出。本书叙述严谨,可激发学习兴趣,是提高数学水平、锻炼逻辑思维的理想用书。本书适用于中学生、数学竞赛选手及数学爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

400 个最新世界著名数学最值问题/刘培杰主编. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.7

ISBN 978 - 7 - 5603 - 2729 - 7

I .4… II .刘… III .数值计算 IV .0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 078523 号

策划编辑 刘培杰

责任编辑 刘 瑶

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 36.75 字数 658 千字

版 次 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

书 号 978 - 7 - 5603 - 2729 - 7

印 数 1 ~ 4 000 册

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



序 言

最值问题起源于两个古希腊传说,一是迦太基的建国者狄多女王有一次得到一张水牛皮,父亲许诺给她能用此圈住的土地作为她的嫁妆.于是她命人把它切成一根皮条,沿海岸圈了一个半圆.这是所能圈出的最大面积,这也可能是变分法的起源了.这个传说的另一个版本是这样说的,地中海塞浦路斯岛主狄多女王的丈夫被她的兄弟格玛利翁杀死后,女王逃到了非洲海岸,并从当地的一位酋长手中购买了一块土地,在那里建立了迦太基城.这块土地是这样划定的.一个人在一天内犁出的沟能圈起多大的面积,这个城就可以建多大.这姐弟俩各自的爱情故事曲折动人,曾被罗马诗人维吉尔和奥维德先后写进了他们的诗歌中.

21 世纪被人们看成是生物学的世纪,人类对自然和生命的关注,通常体现在两个方面:构成世间万物的本质是什么以及如何去认识和探寻这种本质.如果采用这样的



假设,生命的本质最终是体现在数学规律的构成上,那么没有数学显然我们就不能真正和彻底地揭示出生命的本质.我们来看两个生物学的最值问题.

第一个问题在 18 世纪初被提出,法国学者马拉尔蒂(Maraldi)曾经测量过蜂房的尺寸,得到一个有趣的发现,那就是六角形窝洞的六个角都有一致的规律:钝角等于 $109^{\circ}28'$,锐角等于 $70^{\circ}32'$.

难道这是偶然现象吗?法国物理学家列奥缪拉(Réaumur)由此得到一个启示:蜂房的形状是不是为了使材料最节省而容积最大呢?(数学的提法应当是:同样大的容积,建筑用材最省;或同样多的建筑材料,造成最大容积的容器)列奥缪拉去请教当时巴黎科学院院士瑞士数学家克尼格.他计算的结果使人们非常震惊,因为根据他的理论计算,要消耗最少的材料,制成最大的菱形容器,其角度应该是 $109^{\circ}26'$ 和 $70^{\circ}34'$,这与蜂窝的角度仅差 $2'$.

后来,苏格兰数学家马克劳林(C. Maclaurin)又重新计算了一次,得出的结果竟和蜂房的角度完全一样.后来发现,原来是克尼格计算时所用的对数表印错了.

小小蜜蜂在人类有史以前已经解决的问题,竟要 18 世纪的数学家用高等数学才能解决.

诚如进化论创始人达尔文(Darwin)所说:“巢房的精巧构造十分符合需要,如果一个人看到巢房而不倍加赞扬,那他一定是个糊涂虫.”(华罗庚.谈谈与蜂房结构有关的数学问题[M].北京:北京出版社,1979.)

另一个近代的例子是关于分子生物学的.DNA 和蛋白质是两类最重要的生物大分子,它们通常都是由众多的基本元件(核苷酸及氨基酸)相互联结而成的长链分子.但是,它们的空间形状并非是一条平直的线条,而是一个规则的“螺旋管”.尽管在 20 世纪中叶人们就发现了 DNA 双螺旋和蛋白质 α 螺旋结构,但迄今为止,人们还是难以解释,为什么大自然要选择“螺旋形”作为这些生物大分子的结构基础.

不久前,美国和意大利的一组科学家,利用离散几何的方法研究了致密线条的“最大包装”(Optimal Pucking)问题.得到的答案是:在一个体积一定的容器里,能够容纳的最大线条的形状是螺旋形.研究者们意识到,“天然形成的蛋白质正是这样的几何形状”.显然,我们由此能够窥见生命选择了螺旋形作为其空间结构基础的数学原因:在最小空间内容纳最长的分子.凡是熟悉分子生物学和细胞生物学的人都知道,生物大分子的包装是生命的一个必然过程.作为遗传物质载体的 DNA,其线性长度远远大于容纳它的细胞核的直径.例如构成一条人染色体的 DNA 的长度是其细胞核的数千倍.因此通常都要对 DNA 链进行多次的折叠和包扎,使长约 5 厘米的 DNA 双螺旋链变成约 5 微米的致密的染



色体.由此我们可以认为,生命是遵循“最大包装”的数学原理来构造自己的生物大分子.(吴家睿.抽象的价值——数学与当代生命科学//丘成桐,刘克峰,季理真.数学与生活[M].杭州:浙江大学出版社,2007.)

上个世纪是物理学的世纪,许多最值问题的提出有明显的物理学背景.有一个经典的问题——极小曲面理论,它来源于肥皂液薄膜所呈现的曲面.人们对它的研究已有很长的历史了.把一个铁丝线圈先浸入肥皂液然后拿出来,它上面会张着肥皂液的一张薄膜,该薄膜的特性是在所有以该线圈作为边界的曲面中面积最小.找这种极小曲面容易表述为变分学中的一个问题,从而被转化为某种偏微分方程(极小曲面方程)的研究.虽然这种方程的解并不难于描述,至少在小范围内是如此,但这些解的整体行为却是非常微妙的,而且许多问题仍然尚未解决.

这些问题具有鲜明的物理意义.例如,任何物理的肥皂液薄膜不自交(即它是一个嵌入曲面),但这一性质却难以从极小曲面方程的标准表示作出论断.实际上在 20 多年前,仅有两个已知的嵌入极小曲面,这就是通常的平面和称为悬链面的旋转面,它们在无边的意义下是完备的.人们曾猜测这也是三维空间中仅有的完备嵌入极小曲面.

1983 年,人们发现了一个新的极小曲面,它的拓扑与刺了三个洞的环面的拓扑相同.根据椭圆函数理论,有迹象表明这个曲面似乎是可以作为上述猜测的反例的一个极好的候选者.然而,其定义方程的复杂性直接造成嵌入问题的困难.

极端是数学的常态,所以最值问题才是数学中最有魅力的一部分.有人说:数学能告诉我们,多样的背后存在统一,极端才是和谐的源泉和基础.从某种意义上说,数学的精神就是追求极端,它永远选择最简单的、最美的,当然也是最好的.(李泳语.数学圈 3[M].长沙:湖南科学技术出版社,2007, P2.)

有趣的是,数学家的日常语言也是最值化的,以至于受到误解.1917 年,哈代(G. H. Hardy)的合作者李特伍德(J. E. Littlewood)为英国弹道学办公室写了个备忘录,结束语为:“这个 σ 应该尽可能小.”但在草稿复印时,这句话却在纸面上找不到了.有人读备忘录时问:“那是什么?”仔细看才发现在备忘录最后的空白处有一个小斑点,大概就是那个“尽可能小的” σ 了.当时还是铅排时代,排字工想必是跑遍了伦敦才找到这个符号吧.有人甚至“不怀好意”地想,如果李特伍德当时写的是“这里的大 X 很小”,排字工人又当如何呢?

过去在批判某人或控诉旧社会时人们爱用的一个词就是“无所不用其极”,其实这就是数学和数学家的本质.1971 年,哥伦比亚大学杜卡(Jacques Dutka)用电子计算机经过 47.5 小时的计算,将 $\sqrt{2}$ 至少展开到了小数点后 1 000 082 位,



密密麻麻地打印了 200 页,每页有 5 000 个数字,成为迄今为止最长的一个无理数方根.这极端做法并不是单单为了显示计算机的威力,而是要验证 $\sqrt{2}$ 的一个特殊性质——正态性.如果在一个实数的十进制表示中,10 个数字以相同频率出现,就说它是简单正态的;如果所有相同长度的数字段以相同频率出现,就说它是正态的.人们猜测 $\pi, e, \sqrt{2}$ 都是正态数,但是还没有被证明.

在数学历史上许多最值问题的提出和解决极大地推动了数学的发展和新的数学分支的产生.

1696 年在莱布尼茨(G. W. Leibniz)创办的数学杂志《Acta Eruditorum》上,约翰·伯努利(Johann Bernoulli)向他的同行们提出了最速降线的问题.这个问题是说:“在一个竖直的平面上给定两点 A、B,试找出一条路径 AMB,使动点 M 在重力的作用下从点 A 滑到点 B 所需时间最短.”并且还卖了一个关子:“这条曲线是一条大家熟悉的几何曲线,如果到年底还没人能找出答案,那么到时候我再来公布答案.”

到了 1696 年底,可能是由于杂志寄送延误,除了这份杂志的编辑莱布尼茨提交的一份解答以外,没有收到任何其他入寄来的答案.而莱布尼茨则是在他看到这个问题的当天就完成了证明.所以莱布尼茨劝约翰·伯努利将挑战的期限再放宽半年,并且将征解对象扩大到“分布在世界各地的所有最杰出的数学家”.莱布尼茨似乎猜到了都有哪些人能解出这个问题,其中包括约翰的哥哥雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)、牛顿(Newton)、德·洛必达侯爵和惠更斯(C. Huygens),如果惠更斯还活着的话(但他已于 1695 年去世).莱布尼茨的预言完全实现了,而且牛顿也和他一样在收到问题的当天就做出了正确的解答.

在所有这些解答中以约翰·伯努利的最为巧妙,而以雅各布·伯努利的最为深刻,而且由此产生了数学的一个新的分支——变分学.正是在变分学的基础之上才有了今天在实际应用中极其重要的控制论,雅各布·伯努利曾说过:一些看上去没有什么意义的问题,往往会对数学的发展起到一种无法预期的推动作用.

对于这种求最值问题高手和普通爱好者的认识程度也有很大的不同,比如我们考虑一个简单的几何填充问题:在边长为 S 的大方块里能放入多少个单位方块而不重叠?当然,如果 S 等于某个整数 n ,那就不难看出正确的答数是 n^2 ,但若 S 不是整数,例如, $S = \frac{n+1}{10}$,怎么办?一般人的意见是把 n^2 个单位方块填入一个 $n \times n$ 的次正方形中,放弃未覆盖的面积(将近 $S/5$ 个平方单位)作为无法避免的损失.但这真是所能做到的最好方式吗?十分惊人,答案是不.20 世纪 80 年代由匈牙利籍天才数学家 P. 厄尔多斯、密执安大学的 H. 蒙哥马利和组合学家 R. I. 格雷汉姆同时证明了:当 S 很大时,填充任何 $S \times S$ 的正方形使



至多剩下 $S^{(3-\sqrt{3})/2} \approx S^{0.634\dots}$ 个平方单位的未覆盖面积. 这种方法实际上是存在的. 这比当 n 很大时用显而易见的填充法剩下 $S/5$ 个平方单位的未覆盖面积小多了. $S^{0.634}$ 这个数也许还不是对大值 S 可能达到的最优终极界限: 似乎很难决定不可避免的未覆盖面积增长的精确数量级是什么样子, 尽管 $\sqrt{S} = S^{0.5}$ 看起来像是可能的候选者. 透过这个结论, 大师与普通爱好者高下立分, 所以要向大师学习, 而不是他的学生.

本书所选题目均可完全用自然语言叙述, 而不借助于数学符号, 但考虑到篇幅问题, 所以还是采用了数学符号来叙述, 希望不会给读者造成阅读障碍. 歌德在《格言与感想》(Maximen und Relexionen) 中说: “数学家像法国人, 不论你对他们说什么, 他们都翻译成自己的语言, 立刻就成了完全不同的东西.”

本书的题目多从数学著作中选出, 解法多出自名家之手, 首先向这些问题的原作者致以谢意, 特别是附录的几位作者, 另外也向文字编辑表示感谢. 她在编辑加工过程中消灭了许多显见的和隐蔽的错误, 使之臻于完美. 数学史家斯特洛伊克讲过一个据说是道格拉斯 (Jesse Douglas) 津津乐道的一个故事. 有一次, 他在哥廷根听兰道 (Landau) 讲傅里叶级数. 兰道在解释所谓吉布斯 (Gibbs) 现象时说: “这个现象是来自英国的数学家 Gibbs (他读成 Dzijbs) 在 Yale (他读成 Jail) 发现的.” 道格拉斯说, 出于对兰道的尊重, 他才没有当面指出. “教授先生, 您说的绝对正确, 不过有一点小小问题, Erstens, 他不是英国人, 而是美国人. Zweitens, 他不是数学家, 而是物理学家. Drittens, 他的名字是 Gibbs, 而不是 Dzijbs. Viertens, 他不在监狱, 而在耶鲁, 而且, 发现那个现象的不是他.”

最后向读者表示一点歉意, 书有点太长了, 是否像毛主席曾批评的那样——“懒婆娘的裹脚, 又臭又长”. 自有读者评说. 不过有些事是难免的, 就像我们平时所用的英语词汇, 所含字母大多不超过 10 个. 但科学里的词汇有很多是很长并有很多音节的, 例如 Mrs Byrne's Dictionary 里有一个酶的名称, 竟出人意料地长达 1 913 个字母, 与之相比本书还差得远.



目 录

1

- ✧ 墙角的屏风 /1
- ✧ 安装电线 /2
- ✧ 好组三角形 /3
- ✧ 动物乐园 /6
- ✧ 巧分圆盘 /7
- ✧ 磁盘字节 /9
- ✧ 圆锥容器 /10
- ✧ 轨道内彗星 /11
- ✧ 弓形弦长 /13
- ✧ 对面不相识 /13
- ✧ 灯柱高度 /14
- ✧ 月牙形面积 /15
- ✧ 函数最值 /15
- ✧ 三圆相套 /16



- ★ 探测路线 /19
- ★ 长途汽车站 /20
- ★ 爆竹升空 /20
- ★ 最长边的最小 /21
- ★ 面积最大 /23
- ★ 距离之和 /24
- ★ 相互接触 /25
- ★ 平面定点 /29
- ★ 滑行距离 /30
- ★ 最小长度 /31
- ★ 图象最高点 /32
- ★ 正射影最小 /33
- ★ 梯形水槽 /33
- ★ 三角形位置 /34
- ★ 最大亮度 /36
- ★ 截取线段 /38
- ★ 重叠正方形 /38
- ★ 分布两侧 /39
- ★ 利润最大 /41
- ★ 怎样进点 /42
- ★ 乘积最大值 /43
- ★ 中心转动 /44
- ★ 内接四边形 /46
- ★ 最短路线 /48
- ★ 垂直悬杆 /49
- ★ 四边形周长 /51
- ★ 偏差平方 /52
- ★ 一点到四边 /52



- ※ 面积最大值 /54
- ※ 面积一定 /55
- ※ 菱形对角线 /55
- ※ 内切圆圆心 /55
- ※ 最大效益 /56
- ※ 定角定半径 /57
- ※ 最小好数 /58
- ※ 最大值点 /60
- ※ 一个不等式组 /61
- ※ 钝角三角形 /62
- ※ 蜂巢形状 /62
- ※ 内切圆半径 /65
- ※ 最近距离 /65
- ※ 等腰三角形 /66
- ※ 差的最值 /66
- ※ 一一搭配 /68
- ※ 面积平方和 /69
- ※ 直角内求点 /70
- ※ 广告支出 /71
- ※ 两条平行线 /72
- ※ 见风转舵 /73
- ※ 内接半圆 /75
- ※ 窖藏老酒 /77
- ※ 外切于圆 /78
- ※ 积之最值 /79
- ※ 凸五边形 /79
- ※ 乘积极小值 /80
- ※ 两个同心圆 /82



- ※ 边际成本 /82
- ※ 乘积之和 /83
- ※ 定圆直径 /84
- ※ 费马问题 /85
- ※ 梯形面积 /87
- ※ 停止生产 /88
- ※ 定点与动点 /89
- ※ 三次方程 /90
- ※ 甲乙博弈 /92
- ※ 最小腰长 /92
- ※ 正确策略 /93
- ※ 最佳时间 /94
- ※ 最大体积 /95
- ※ 好子集元素 /96
- ※ 全部变号 /98
- ※ 高的基点 /98
- ※ 相邻元素 /99
- ※ 要素投入 /100
- ※ 表中选数 /100
- ※ 闭区间最值 /101
- ※ 机器人爬楼梯 /102
- ※ 小鸟啄食 /103
- ※ 最优广告投入 /105
- ※ 互相可见 /106
- ※ 周长最值 /107
- ※ 最少操作 /108
- ※ 欧拉数问题 /109
- ※ 数学游戏 /109



- ✧ 最大产量 /110
- ✧ 通过走廊 /110
- ✧ 斯坦纳的球问题 /111
- ✧ 剪口长度 /115
- ✧ 几何体内接 /116
- ✧ 带子宽度 /117
- ✧ 两两乘积 /117
- ✧ 最小边长 /119
- ✧ 公共部分 /119
- ✧ 最大直径 /120
- ✧ 最佳射门点 /123
- ✧ 互不重叠 /124
- ✧ 椭圆问题 /126
- ✧ 号码之差 /128
- ✧ 内接圆锥体 /129
- ✧ 排列个数 /130
- ✧ 二次问题 /132
- ✧ 分装药片 /133
- ✧ 底与高之和 /136
- ✧ 太空城市 /136
- ✧ 投射角问题 /138
- ✧ 标定方格 /138
- ✧ 圆的问题 /140
- ✧ 最大元数 /142
- ✧ 最小项数 /143
- ✧ 整数数对 /143
- ✧ 变换次数 /144
- ✧ 正四面体 /145



- ※ 数列项数 /146
- ※ 最短折痕 /147
- ※ 负中有正 /148
- ※ 晨昏蒙影 /149
- ※ 托尔斯泰全集 /151
- ※ 百科全书 /152
- ※ 域内最值 /152
- ※ 区分覆盖 /153
- ※ 截面面积 /155
- ※ 城堡按钮 /156
- ※ 版面安排 /157
- ※ 保险柜锁 /157
- ※ 等腰三角形 /158
- ※ 海战游戏 /159
- ※ 锥内套柱 /160
- ※ 最少跳步 /162
- ※ 分段函数 /163
- ※ 垒成一摞 /164
- ※ 最大球半径 /164
- ※ 国际象棋 /165
- ※ 最小润周 /166
- ※ 转弯次数 /167
- ※ 内接正方形 /168
- ※ 最少操作 /169
- ※ 内接三角形 /169
- ※ 重建次数 /171
- ※ 分式函数 /172
- ※ 巧提问题 /172



- ※ 立方体表面积 /173
- ※ 切正方形 /174
- ※ 筷子问题 /174
- ※ 拼正方形 /175
- ※ 巧围三角形 /176
- ※ 甲虫听哨 /177
- ※ 焦点直线 /178
- ※ 平面分割 /179
- ※ 正四棱锥 /179
- ※ 直角顶点 /180
- ※ 大街小巷 /181
- ※ 球面置点 /182
- ※ 昔日高考题 /183
- ※ 封闭折线 /184
- ※ 动点移动 /185
- ※ 集中点数 /186
- ※ 空间五点 /186
- ※ 梯子长度 /187
- ※ 线段中点 /188
- ※ 选多少个点 /188
- ※ 椭圆动弦 /189
- ※ 至少一点 /190
- ※ 正三棱锥 /190
- ※ 盖住结点 /191
- ※ 内接矩形 /192
- ※ 最少点数 /193
- ※ 两个动点 /193
- ※ 彩色穗带 /194



- ★ 投影面积 /195
- ★ 平面点集 /196
- ★ 外圆内方 /196
- ★ 子集个数 /197
- ★ 抛物线问题 /198
- ★ 交集非空 /199
- ★ 六棱长度 /200
- ★ 不可分辨 /201
- ★ 折射定律 /202
- ★ 棋子放置 /203
- ★ 控制小格 /204
- ★ 最长对角线 /204
- ★ 转运站问题 /205
- ★ 多少条边 /206
- ★ 斜边最短 /207
- ★ 最远顶点 /208
- ★ 长短轴和 /208
- ★ 几条对称轴 /209
- ★ 无穷条最短 /210
- ★ 7点连线 /211
- ★ 学校选址 /212
- ★ 规则直线 /213
- ★ 最短距离 /213
- ★ n 条线段 /215
- ★ 条件最值 /216
- ★ 简单折线图 /217
- ★ 平面三点 /217
- ★ 要有红点 /218



- ※ 耕牛饮水 /219
- ※ 剩余棋子 /220
- ※ 怎样矩形 /221
- ※ 剖分图形 /222
- ※ 单位圆内 /224
- ※ 对称红点 /224
- ※ 炮弹装药 /226
- ※ 非中心点 /227
- ※ 最大扇形 /228
- ※ 线段条数 /229
- ※ 在何位置 /230
- ※ 凸四边形 /231
- ※ 两车间距 /232
- ※ 总数最大 /233
- ※ 上底与下底 /234
- ※ 三角形之交 /235
- ※ 最大可能 /236
- ※ 含给定点 /237
- ※ 航行速度 /237
- ※ 切厚纸板 /238
- ※ 六面体骨架 /238
- ※ 参观城堡 /239
- ※ 固定底边 /240
- ※ 蓝白正方形 /241
- ※ 直线相交 /241
- ※ 体积最大 /242
- ※ 多少锐角 /243
- ※ 划分正方体 /245