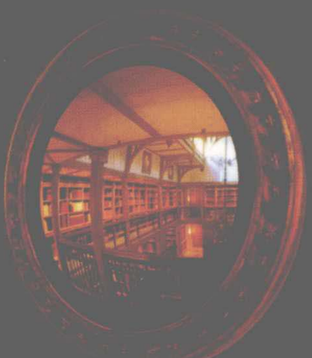
400 Latest World Famous

# 400个最新世界著名数学最值问题

Mathematical Maximum and Minimum Problem

◎ 刘培杰 主编



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

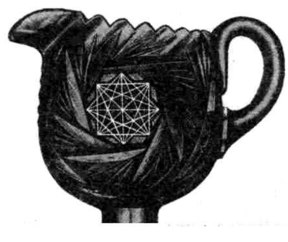
哈爾濱工業大學出版社

400 Latest World Famous

# 400个最新世界著名数学最值问题

# Mathematical Maximum and Minimum Problem

◎ 刘培杰 主编



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，只有具有青春与力量才能做得满意。—— 诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。—— 大卫·希尔伯特

哈爾濱工業大學出版社

## 内 容 简 介

本书收集了400余道国内外数学最值试题,它将抽象的定理、公式、方法隐含于通俗、生动、有趣的题目中,深入浅出。本书叙述严谨,可激发学习兴趣,是提高数学水平、锻炼逻辑思维的理想用书。本书适用于中学生、数学竞赛选手及数学爱好者。

**图书在版编目(CIP)数据**

400个最新世界著名数学最值问题/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-5603-2729-7

Ⅰ.4… Ⅱ.刘… Ⅲ.数值计算 Ⅳ.O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第078523号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 刘 瑶
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张36.75 字数658千字
版 次 2008年9月第1版 2008年9月第1次印刷
书 号 978-7-5603-2729-7
印 数 1~4 000册
定 价 48.00元

---

# 序 言

最值问题起源于两个古希腊传说,一是迦太基的建国者狄多女王有一次得到一张水牛皮,父亲许诺给她能用此圈住的土地作为她的嫁妆.于是她命人把它切成一根皮条,沿海岸圈了一个半圆.这是所能圈出的最大面积,这也可能是变分法的起源了.这个传说的另一个版本是这样说的,地中海塞浦路斯岛主狄多女王的丈夫被她的兄弟格玛利翁杀死后,女王逃到了非洲海岸,并从当地的一位酋长手中购买了一块土地,在那里建立了迦太基城.这块土地是这样划定的.一个人在一天内犁出的沟能圈起多大的面积,这个城就可以建多大.这姐弟俩各自的爱情故事曲折动人,曾被罗马诗人维吉尔和奥维德先后写进了他们的诗歌中.

21 世纪被人们看成是生物学的世纪,人类对自然和生命的关注,通常体现在两个方面:构成世间万物的本质是什么以及如何去认识和探寻这种本质.如果采用这样的

假设,生命的本质最终是体现在数学规律的构成上,那么没有数学显然我们就不能真正和彻底地揭示出生命的本质.我们来看两个生物学的最值问题.

第一个问题在18世纪初被提出,法国学者马拉尔蒂(Maraldi)曾经测量过蜂房的尺寸,得到一个有趣的发现,那就是六角形窝洞的六个角都有一致的规律:钝角等于109°28′,锐角等于70°32′.

难道这是偶然现象吗?法国物理学家列奥缪拉(Réaumur)由此得到一个启示:蜂房的形状是不是为了使材料最节省而容积最大呢?(数学的提法应当是:同样大的容积,建筑用材最省;或同样多的建筑材料,造成最大容积的容器)列奥缪拉去请教当时巴黎科学院院士瑞士数学家克尼格.他计算的结果使人们非常震惊,因为根据他的理论计算,要消耗最少的材料,制成最大的菱形容器,其角度应该是109°26′和70°34′,这与蜂窝的角度仅差2′.

后来,苏格兰数学家马克劳林(C. Maclaurin)又重新计算了一次,得出的结果竟和蜂房的角度完全一样.后来发现,原来是克尼格计算时所用的对数表印错了.

小小蜜蜂在人类有史以前已经解决的问题,竟要18世纪的数学家用高等数学才能解决.

诚如进化论创始人达尔文(Darwin)所说:"巢房的精巧构造十分符合需要,如果一个人看到巢房而不倍加赞扬,那他一定是个糊涂虫."(华罗庚.谈谈与蜂房结构有关的数学问题[M].北京:北京出版社,1979.)

另一个近代的例子是关于分子生物学的.DNA和蛋白质是两类最重要的生物大分子,它们通常都是由众多的基本元件(核苷酸及氨基酸)相互联结而成的长链分子.但是,它们的空间形状并非是一条平直的线条,而是一个规则的"螺旋管".尽管在20世纪中叶人们就发现了DNA双螺旋和蛋白质α螺旋结构,但迄今为止,人们还是难以解释,为什么大自然要选择"螺旋形"作为这些生物大分子的结构基础.

不久前,美国和意大利的一组科学家,利用离散几何的方法研究了致密线条的"最大包装"(Optimal Pucking)问题.得到的答案是:在一个体积一定的容器里,能够容纳的最大线条的形状是螺旋形.研究者们意识到,"天然形成的蛋白质正是这样的几何形状".显然,我们由此能够窥见生命选择了螺旋形作为其空间结构基础的数学原因:在最小空间内容纳最长的分子.凡是熟悉分子生物学和细胞生物学的人都知道,生物大分子的包装是生命的一个必然过程.作为遗传物质载体的DNA,其线性长度远远大于容纳它的细胞核的直径.例如构成一条人染色体的DNA的长度是其细胞核的数千倍.因此通常都要对DNA链进行多次的折叠和包扎,使长约5厘米的DNA双螺旋链变成约5微米的致密的染

色体.由此我们可以认为,生命是遵循"最大包装"的数学原理来构造自己的生物大分子.(吴家睿.抽象的价值——数学与当代生命科学//丘成桐,刘克峰,季理真.数学与生活[M].杭州:浙江大学出版社,2007.)

上个世纪是物理学的世纪,许多最值问题的提出有明显的物理学背景.有一个经典的问题——极小曲面理论,它来源于肥皂液薄膜所呈现的曲面.人们对它的研究已有很长的历史了.把一个铁丝线圈先浸入肥皂液然后拿出来,它上面会张着肥皂液的一张薄膜,该薄膜的特性是在所有以该线圈作为边界的曲面中面积最小.找这种极小曲面容易表述为变分学中的一个问题,从而被转化为某种偏微分方程(极小曲面方程)的研究.虽然这种方程的解并不难以描述,至少在小范围内是如此,但这些解的整体行为却是非常微妙的,而且许多问题仍然尚未解决.

这些问题具有鲜明的物理意义.例如,任何物理的肥皂液薄膜不自交(即它是一个嵌入曲面),但这一性质却难以从极小曲面方程的标准表示作出论断.实际上在20多年前,仅有两个已知的嵌入极小曲面,这就是通常的平面和称为悬链面的旋转面,它们在无边的意义下是完备的.人们曾猜测这也是三维空间中仅有的完备嵌入极小曲面.

1983年,人们发现了一个新的极小曲面,它的拓扑与刺了三个洞的环面的拓扑相同.根据椭圆函数理论,有迹象表明这个曲面似乎是可以作为上述猜测的反例的一个极好的候选者.然而,其定义方程的复杂性直接造成嵌入问题的困难.

极端是数学的常态,所以最值问题才是数学中最有魅力的一部分.有人说:数学能告诉我们,多样的背后存在统一,极端才是和谐的源泉和基础.从某种意义上说,数学的精神就是追求极端,它永远选择最简单的、最美的,当然也是最好的.(李泳语.数学圈3[M].长沙:湖南科学技术出版社,2007,P2.)

有趣的是,数学家的日常语言也是最值化的,以至于受到误解.1917年,哈代(G.H.Hardy)的合作者李特伍德(J.E.Littlewood)为英国弹道学办公室写了个备忘录,结束语为:"这个$\sigma$应该尽可能小."但在草稿复印时,这句话却在纸面上找不到了.有人读备忘录时问:"那是什么?"仔细看才发现在备忘录最后的空白处有一个小斑点,大概就是那个"尽可能小的"$\sigma$了.当时还是铅排时代,排字工想必是跑遍了伦敦才找到这个符号吧.有人甚至"不怀好意"地想,如果李特伍德当时写的是"这里的大$X$很小",排字工人又当如何呢?

过去在批判某人或控诉旧社会时人们爱用的一个词就是"无所不用其极",其实这就是数学和数学家的本质.1971年,哥伦比亚大学杜卡(Jacques Dutka)用电子计算机经过47.5小时的计算,将$\sqrt{2}$至少展开到了小数点后1 000 082位,

密密麻麻地打印了200页,每页有5 000个数字,成为迄今为止最长的一个无理数方根.这极端做法并不是单单为了显示计算机的威力,而是要验证$\sqrt{2}$的一个特殊性质——正态性.如果在一个实数的十进制表示中,10个数字以相同频率出现,就说它是简单正态的;如果所有相同长度的数字段以相同频率出现,就说它是正态的.人们猜测$\pi$,e,$\sqrt{2}$都是正态数,但是还没有被证明.

在数学历史上许多最值问题的提出和解决极大地推动了数学的发展和新的数学分支的产生.

1696年在莱布尼茨(G. W. Leibniz)创办的数学杂志《Acta Eruditorum》上,约翰·伯努利(Johann Bernoulli)向他的同行们提出了最速降线的问题.这个问题是说:“在一个竖直的平面上给定两点$A$、$B$,试找出一条路径$AMB$,使动点$M$在重力的作用下从点$A$滑到点$B$所需时间最短.”并且还卖了一个关子:“这条曲线是一条大家熟悉的几何曲线,如果到年底还没人能找出答案,那么到时候我再来公布答案.”

到了1696年底,可能是由于杂志寄送延误,除了这份杂志的编辑莱布尼茨提交的一份解答以外,没有收到任何其他人寄来的答案.而莱布尼茨则是在他看到这个问题的当天就完成了证明.所以莱布尼茨劝约翰·伯努利将挑战的期限再放宽半年,并且将征解对象扩大到“分布在世界各地的所有最杰出的数学家”.莱布尼茨似乎猜到了都有哪些人能解出这个问题,其中包括约翰的哥哥雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)、牛顿(Newton)、德·洛必达侯爵和惠更斯(C. Huygens),如果惠更斯还活着的话(但他已于1695年去世).莱布尼茨的预言完全实现了,而且牛顿也和他一样在收到问题的当天就做出了正确的解答.

在所有这些解答中以约翰·伯努利的最为巧妙,而以雅各布·伯努利的最为深刻,而且由此产生了数学的一个新的分支——变分学.正是在变分学的基础之上才有了今天在实际应用中极其重要的控制论,雅各布·伯努利曾说过:一些看上去没有什么意义的问题,往往会对数学的发展起到一种无法预期的推动作用.

对于这种求最值问题高手和普通爱好者的认识程度也有很大的不同,比如我们考虑一个简单的几何填充问题:在边长为$S$的大方块里能放入多少个单位方块而不重叠?当然,如果$S$等于某个整数$n$,那就不难看出正确的答数是$n^2$,但若$S$不是整数,例如,$S=\frac{n+1}{10}$,怎么办?一般人的意见是把$n^2$个单位方块填入一个$n\times n$的次正方形中,放弃未覆盖的面积(将近$S/5$个平方单位)作为无法避免的损失.但这真是所能做到的最好方式吗?十分惊人,答案是不.20世纪80年代由匈牙利籍天才数学家P.厄尔多斯、密执安大学的H.蒙哥马利和组合学家R.I.格雷汉姆同时证明了:当$S$很大时,填充任何$S\times S$的正方形使

至多剩下 $S^{(3-\sqrt{3})/2} \approx S^{0.634\cdots}$ 个平方单位的未覆盖面积.这种方法实际上是存在的.这比当 $n$ 很大时用显而易见的填充法剩下 $S/5$ 个平方单位的未覆盖面积小多了.$S^{0.634}$ 这个数也许还不是对大值 $S$ 可能达到的最优终极界限:似乎很难决定不可避免的未覆盖面积增长的精确数量级是什么样子,尽管 $\sqrt{S}=S^{0.5}$ 看起来像是可能的候选者.透过这个结论,大师与普通爱好者高下立分,所以要向大师学习,而不是他的学生.

本书所选题目均可完全用自然语言叙述,而不借助于数学符号,但考虑到篇幅问题,所以还是采用了数学符号来叙述,希望不会给读者造成阅读障碍.歌德在《格言与感想》(Maximen and Relexionen)中说:"数学家像法国人,不论你对他们说什么,他们都翻译成自己的语言,立刻就成了完全不同的东西."

本书的题目多从数学著作中选出,解法多出自名家之手,首先向这些问题的原作者致以谢意,特别是附录的几位作者,另外也向文字编辑表示感谢.她在编辑加工过程中消灭了许多显见的和隐蔽的错误,使之臻于完美.数学史家斯特洛伊克讲过一个据说是道格拉斯(Jesse Douglas)津津乐道的一个故事.有一次,他在哥廷根听兰道(Landau)讲傅里叶级数.兰道在解释所谓吉布斯(Gibbs)现象时说:"这个现象是来自英国的数学家 Gibbs(他读成 Dzjibs)在 Yale(他读成 Jail)发现的."道格拉斯说,出于对兰道的尊重,他才没有当面指出."教授先生,您说的绝对正确,不过有一点小小问题,Erstens,他不是英国人,而是美国人.Zweitens,他不是数学家,而是物理学家.Drittens,他的名字是 Gibbs,而不是 Dzjibs.Viertcns,他不在监狱,而在耶鲁,而且,发现那个现象的不是他."

最后向读者表示一点歉意,书有点太长了,是否像毛主席曾批评的那样——"懒婆娘的裹脚,又臭又长".自有读者评说.不过有些事是难免的,就像我们平时所用的英语词汇,所含字母大多不超过 10 个.但科学里的词汇有很多是很长并有很多音节的,例如 Mrs Byrne's Dictionary 里有一个酶的名称,竟出人意料地长达 1 913 个字母,与之相比本书还差得远.

刘培杰

2008 年 9 月

# 目　录