21世纪高等医学院校
学习指南系列

医学物理学学习指南

主编 耿魁 王晓东 万永刚

医学物理学
学习指南

Yixuewulixue Xuexi Zhinan

21世纪高等医学院校学习指南系列

SMMUP
第二军医大学出版社

21 世纪高等医学院校学习指南系列

医学物理学学习指南

主编　耿　魁　王晓东　万永刚

编委(以姓氏笔画为序)

万永刚　王晓东　田春华

张立平　耿　魁

第二军医大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

医学物理学学习指南 / 耿魁,王晓东,万永刚编著. —上海:第二军医大学出版社,2008.6

(21 世纪高等医学院校学习指南系列)

ISBN 978-7-81060-738-4

Ⅰ.医... Ⅱ.①耿...②王...③万... Ⅲ.医用物理学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ.R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086209 号

出 版 人 石进英
责任编辑 江 健

医学物理学学习指南

主编 耿 魁 王晓东 万永刚

第二军医大学出版社出版发行

上海市翔殷路 800 号 邮政编码:200433

发行科电话/传真:021-65493093

全国各地新华书店经销

上海崇明裕安印刷厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:19.5 字数:484 千字

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

印数 1～3 000

ISBN 978-7-81060-738-4/R·570

定价:35.00 元

前　言

医学物理学是医学院校本科各专业的必修课，由于课时少、课程难度大等原因，学生学习这门课程时普遍感到比较吃力，教师也感到可参考的指导书太少。现应教学的实际需要，我们编写了这本学习指南。本书以人民卫生出版社出版的《医学物理学》（第六版）为母本，各章内容包括本章知识要点、解题指导——典型例题、教材习题解答和课后训练4个部分。其中本章知识要点是对教材相应章节的重点知识进行总结；解题指导——典型例题是选取和相应章节知识相关的典型例题进行详细解答，便于学生熟悉习题的解法；教材习题解答是对教材课后思考题和习题的详细解答，使学生在作课后习题时有一个参考；课后训练是为强化学生对知识的理解而为学生提供的部分习题。本书定稿工作虽然慎之又慎，但由于编者水平有限，缺点和错误之处在所难免，恳请读者和同仁不吝指正，以便今后进一步改正和完善。

编　者

2008年3月

目　　录

第一章　力学基本定律

一、本章知识要点

(一)质点的运动

1. 力学的研究对象：力学是研究物体的机械运动规律及其应用的科学；是研究物理学其它内容的基础。

2. 机械运动(mechanical motion)：物体在空间的相对位置随时间改变，或一个物体内部一部分相对其它部分的位置随时间变化的过程称为机械运动。

3. 质点(particle)：研究物体运动时如果物体的大小和形状在所研究的问题中可以忽略，就可以把它抽象为一个质量与它相同的点，称为质点。

4. 位置矢量(position vector)：从坐标原点指向质点所在位置的有向线段，称为位置矢量，简称位矢，用r表示。质点运动时，位置随时间变化，位置矢量是时间的函数，可写成：

$$r=r(t)$$

在右旋直角坐标系下可表示为：

$$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$$

式中i、j、k分别为坐标x、y、z正方向的单位矢量。作为时间函数的三个坐标值可以表示为：

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

这样的一组函数称为质点的运动函数或运动方程的标量表示式，也可看做是质点沿各坐标轴的分运动的表示式。

5. 位移(displacement)：由质点运动的初位置指向末位置的有向线段称为在这段时间内的位移，用Δr表示。位移与路程不同，位移是矢量，反映质点位置变化的大小和方向，是有方向的线段；路程(path)为标量，是质点实际走过的路径长度。

6. 平均速度(mean velocity)：质点的位移Δr和发生这段位移所经历的时间Δt的比称为质点在这段时间内的平均速度，平均速度是矢量。用$\overline{V}$表示，即：

$$\overline{V}=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$$

7. 瞬时速度(instantanceous velocity)：质点运动时某一时刻或某一位置的速度称为质点运动的瞬时速度。如果$\Delta t\to 0$，平均速度的极限就表示质点某一时刻的瞬时速度，用V表示瞬时速度。则：

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

V 的方向即 $\Delta t \to 0$ 时 $\overline{V}$ 的方向。通常所说的物体运动速度，通常指它的瞬时速度。在右旋直角坐标系下可表示为：

$$V = \frac{d}{dt}x(t)i + \frac{d}{dt}y(y)j + \frac{d}{dt}z(t)k = V_x i + V_y j + V_z k$$

速度的大小称为速率(speed)，以 V 表示：

$$V = |V| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

8. 平均加速度(mean acceleration)：质点的速度增量 $\Delta V = V(t+\Delta t) - V(t)$ 和发生速度增量所经历的时间 Δt 的比称为质点在这段时间内的平均加速度，平均加速度是矢量。用$\bar{a}$ 表示，即：

$$\bar{a} = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

9. 瞬时加速度(transient acceleration)：质点运动时某一时刻或某一位置的加速度称为质点运动的瞬时加速度，或简称加速度，它是描述速度变化快慢的物理量。根据定义可知：

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

在右旋直角坐标系下可表示为：

$$a = \frac{dV_x}{dt}i + \frac{dV_y}{dt}j + \frac{dV_Z}{dt}k = a_x i + a_y j + a_z k$$

10. 切向加速度(tangential acceleration)和法向加速度(normal acceleration)：把曲线运动在任一时刻的加速度a 分解为沿速度V 方向的分量 a_t 和垂直速度V 方向的分量 a_n，其中 a_t 称为切向加速度；a_n 称为法向加速度。

$$a_t = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{r}$$

(二)牛顿运动规律

1. 牛顿第一定律(Newton's first law)：任何物体在不受外力作用时，都将保持原有的静止状态或匀速直线运动状态。

2. 惯性(inertia)：物体在不受外力作用时，保持原有运动状态的性质称为惯性。质量是惯性大小的量度，质量越大，惯性越大。

3. 牛顿第二定律(Newton's second law)：作用在物体上的合外力F 等于物体动量的时间变化率，即：

$$F = \frac{d(mV)}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

上式中，$P = mV$ 称为动量(momentum)。

若物体的质量不变，上式变为：

$$F = m\frac{dV}{dt} = ma$$

4. 牛顿第三定律(Newtons third law)：力总是成对出现的。如果物体 A 以力F_A作用在

物体 B 上，则物体 B 也必然同时以一个等大反向的力F_B作用在物体 A 上，即：

$$F_A = -F_B$$

5. **量纲**(dimension)：表示物理量如何由基本量组合的式子，称为物理量的量纲。量纲可以用来校核等式，也可以定出同一物理量不同单位之间的换算关系。

6. **惯性参考系**(inertia system)：适用牛顿运动定律的参考系或牛顿第一定律的参照系称为惯性参考系，在惯性参考系中，一个不受力作用的物体将保持静止或作匀速直线运动。

凡是与惯性系相对作匀速直线运动的参照系都是惯性系，与惯性系相对作变速运动的参照系都是非惯性系。

7. **惯性力**(inertial force)：非惯性系相对于一惯性系(如地面)作加速度为a 的运动，可以设想处在该非惯性系中的物体受到$F = -ma$ 的力作用，这个力称为惯性力。惯性力不是物体之间真实存在的相互作用力，它没有施力物体，也没有反作用力。

8. **非惯性系**(non-inertia system)：相对于一个已知惯性系作变速运动的参考系称为非惯性系。

(三)功和能(能量守恒定律)

1. **功**(work)：力对物体所作的功等于该力沿运动方向的分量与物体位移的乘积(标积，scalar product)。写成矢量式为：

$$dA = F \cdot dr = Fdrcos\varphi$$

功是描述力在物体移动过程中的空间累积效应的物理量，如果物体沿曲线从 A 运动到 B，力所作的功为：

$$A_{AB} = \int_A^B dA = \int_A^B F\,drcos\varphi$$

2. **动能**(kinetic energy)：物体由于运动所具有的能量称为动能，可表示为：$E_k = \frac{1}{2}mV^2$。

3. **动能定理**(kinetic energy theorem)：外力对物体所作的功等于物体动能的增量，即：

$$A_{AB} = E_{kB} - E_{kA} = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2$$

4. **保守力**(conservative force)：若某力作功只与运动物体的始末位置有关，而与运动物体所经过的路径无关，这样的力称为保守力，如万有引力、弹性力、静电力等都是保守力。

5. **势能**(potential energy)：与相互作用物体的相对位置有关的能量称为势能(potential energy)。重力势能(gravitational potential energy)可表示为：$E_p = mgh$，弹性势能(elastic potential energy)可表示为：$E_p = \frac{1}{2}kx^2$，引力势能可表示为：$E_p = \frac{Mm}{r}$(当 $r = \infty$时，$E_p = 0$)。

6. **功能原理**(function principle)：系统机械能的增量等于外力对系统所作的功与系统的非保守内力所作的功的总和，即：

$$A_{外力} + A_{非保守内力} = E_B - E_A$$

7. **机械能守恒定律**(law of conservation of mechanical energy)：如果外力和非保守力作功之和为零，物体系的机械能保持不变。

8. **对称操作**(symmetry operation)：如果进行一次变动或操作后事物完全复原，则称该事物对所经历的变动或操作具有对称性，而该操作就称为对称操作。

(四)动量(动量守恒定律)

1. 冲量(impulse):当物体受到外力作用的时,它的速度要发生变化,因而它的动量也要发生变化。动量的变化量与力的大小及作用时间的长短有关,为此可以把牛顿第二定律写成微分形式:

$$F\,dt = d\,P$$

Fdt 表示力在时间 dt 内的累积量,称为在 dt 时间内物体所受合外力的冲量,用 I 表示。

2. 动量定理(theorem of momentum):物体 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内动量的改变等于物体在同一时间内所受合外力的冲量,即:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \int_{p_1}^{p_2} d\,P = P_2 - P_1 = mV_2 - mV_1$$

3. 动量守恒定律(law of conservation momentum):当系统所受的合外力为零时,系统的总动量保持不变。

4. 碰撞(collision):指两个物体在运动过程中相互靠近,或发生接触时,在相对较短时间内发生强烈相互作用的过程。

5. 弹性碰撞(elastic collision):在碰撞前后两物体总动能没有损失的碰撞。

6. 完全非弹性碰撞(perfect inelastic collision):两物体在碰撞后不分开的碰撞。

(五)刚体的转动

1. 刚体(rigid body):在任何力的作用下形状和大小都不发生改变的物体。如物体在力的作用下形状和大小的改变可以忽略,就可以将其视为刚体。

2. 定轴转动(fixed—axis rotation):转动物体各质元的圆心都在一条固定不动的直线上,这条直线叫转轴,这样的运动叫定轴转动。转动是刚体的基本运动形式之一,刚体的一般运动都可分解为平动和转动。

3. 角位移(angular displacement):刚体绕定轴转动时,刚体上某一垂直于转轴并与转轴相交的直线,在 Δt 时间内转过的角度 $\Delta\theta$ 称为角位移。

4. 角速度(angular velocity):是描述刚体转动快慢的物理量。刚体在单位时间内的角位移称为角速度,用ω 表示。

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt},\ \omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

5. 角加速度(angular acceleration):单位时间内的角速度的改变量。

$$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角位移、角速度、角加速度都是矢量,其方向用右手螺旋法则判定。

6. 角量:以角度为基础来衡量转动情况的物理量(如角位移、角速度、角加速度统称为角量)。

7. 线量:以线度为基础来衡量运动情况的物理量(如位移、速度、加速度统称为线量)。

8. 离转轴的距离为 r 的质点的角量与线量的关系为:

位移：　　$\Delta S=r\Delta\theta$

速度：　　$V=r\omega$

加速度：　　$a_t=r\alpha$、　$a_n=r\omega^2$

9. 刚体做匀变速转动时各个角量之间的关系($t=0,\omega=\omega_0,\theta=\theta_0$)：

①角加速度：　$\alpha=constant$

②角速度：　$\omega=\omega_0+\alpha t$

③角位移：　$\Delta\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

④角位置：　$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

10. 转动惯量(moment of inertia)：转动物体的动能，其值等于组成物体的各个质点的动能的总和，即：

$$E_k=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

其中 J 称为转动惯量。

11. 转动惯量的计算：转动惯量是刚体转动惯性的量度，如果刚体是质量连续分布的，刚体的转动惯量为：

$$J=\int r^2 dm=\int r^2\rho dV$$

决定转动惯量大小的因素：①质量的大小；②质量分布情况(即刚体的形状大小和各部分的密度)；③转轴的位置。

12. 转动定律(law of rotation)：转动物体的角加速度 α 与作用的力矩 M 成正比，与物体的转动惯量 J 成反比，即：

$$M=J\frac{d\omega}{dt}=J\alpha$$

13. 质点的角动量(angular moment)：设质点绕定点 O 旋动，某瞬时的动量 mV 对于点 O 的矩，定义为质点对于点 O 的角动量，用L 表示，即：

$$L=r\times mV$$

14. 质点系的角动量：质点系对某点 O 的角动量，等于各质点对同一点 O 的角动量的矢量和，即：

$$L=\sum_{i=1}^{n}r_i\times mV_i$$

15. 绕定轴转动刚体对定轴的角动量：$L=\sum_{i=1}^{n}r_i\times mV_i=\left(\sum_{i=1}^{n}mr_i^2\right)\omega=J\omega$

16. 角动量守恒定律(law of conservation angular momentum)：封闭系统中的内力矩不改变系统的总角动量(或刚体所受的合外力矩等于零时，其角动量保持不变)，即：$\sum L_i=$ 恒矢量。

17. 旋进 Precession：高速旋转的物体的自转轴以角速度 Ω 绕竖直轴转动的现象叫进动(precession)，也称为旋进。在重力场中陀螺旋进的角速度为：

$$\Omega=\frac{d\phi}{dt}=\frac{mgl}{L}=\frac{mgl}{J\omega}$$

式中 J 是陀螺的转动惯量。进动角速度 Ω 与 θ 无关，而与自旋角动量 L 成反比。

二、解题指导——典型例题

例 1-1　一汽车沿 x 轴运动，其速度为 $v=10+4t^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，当 $t=0$ 时，汽车在原点右 20m 处，求：(1) $t=4s$ 时物体的加速度；(2)在上述时刻物体的位置。

已知：$v=10+4t^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，当 $t=0$ 时，$x=20\mathrm{m}$；求：(1) $t=4\mathrm{s}$ 时，$a=?$ (2) $t=4\mathrm{s}$ 时，$x=?$

解：(1)加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d(10+4t^2)}{dt}=8t(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时，$a=8\times4=32(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

(2)因为 $v=\dfrac{dx}{dt}$，所以 $dx=vdt=(10+4t^2)dt$，

积分可得：$x=\int(10+4t^2)dt=10t+\dfrac{4}{3}t^3+C$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时，$x=20\mathrm{m}$，代入上式得：$C=20(\mathrm{m})$

所以，$x=10t+\dfrac{4}{3}t^3+20(\mathrm{m})$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时，$x=145.3\mathrm{m}$

答：$t=4\mathrm{s}$ 时物体的加速度为 $32\mathrm{m\cdot s^{-2}}$；此时刻物体的距原点 145.3m。

例 1-2　如图 1-1 所示，在离水面高度为 h 的岸边上，有人用绳子拉船靠岸，收绳的速度恒为 v_0，求船在离岸边的距离为 s 时的速度和加速度。

已知：h, v_0, s；求：$v=?, a=?$

解：以 l 表示从船到定滑轮的绳长，则：$v_0=-\dfrac{dl}{dt}$

由图可知：$s=\sqrt{l^2-h^2}$

船的速度为：$v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{l^2-h^2}}\dfrac{dl}{dt}=-\dfrac{\sqrt{s^2+h^2}}{s}v_0$

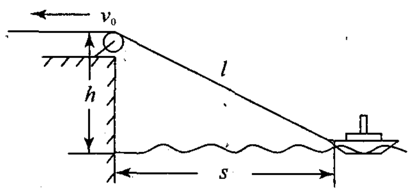

图 1-1

负号表示船在水面上向岸靠近。

船的加速度为：$a=\dfrac{dv}{dt}=-\left[\dfrac{d}{dl}\left(\dfrac{1}{\sqrt{l^2-h^2}}\right)v_0\right]\dfrac{dl}{dt}=-\dfrac{h^2v_0^2}{s^3}$

负号表示的方向指向岸边，因而船向岸边加速运动。

答：船在离岸边的距离为 s 时的速度为 $\dfrac{\sqrt{s^2+h^2}}{s}v_0$，加速度为 $\dfrac{h^2v_0^2}{s^3}$。

例 1-3　质点沿 x 轴运动，加速度和速度的关系是：$a=-kv$，式中 k 为常量；$t=0$ 时，$x=x_0$，$v=v_0$；求质点的运动方程。

已知：$a=-kv$，当；$t=0$ 时，$x=x_0$，$v=v_0$；求：运动方程 $x=?$

解：由 $a=\dfrac{dv}{dt}=-kv$，分离变量积分有：$\int_{v_0}^{v}dx=\int_0^t -kdt$；积分得：$v=v_0e^{-kt}$

又由 $v=\dfrac{dx}{dt}$ 有：$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t v_0e^{-kt}dt$

完成积分就得运动方程：$x=x_0+\dfrac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$

答:质点的运动方程为。$x=x_0+\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$

例 1-4　质量为 M 的人,手执一质量为 m 的物体,以与地平线成 α 角的速度 v_2 向前跳出。当他达到最高点时,将物体以相对速度 u 向后抛出。试问:由于抛出该物体,此人跳出的距离增加了多少(略去空气阻力)?

已知:M,m,α,v_2,u;求:$\Delta x=?$

解:当人达到最高点时,其速度只有水平分量,$v_{水平}=v_0\cos\alpha$。在最高点处人向后抛出一物体 m,m 的速度为 $v'-u$,其中 v' 为人抛出物体后相对于地面的速度。

对于 M、m 体系,在水平方向上合外力为零,因此动量守恒,即:

$$(M+m)v=Mv'+m(v'-u)\text{解得}:v'=v+\frac{m}{M+m}u$$

由于抛出物体而引起人在水平方向速度的增量为:$\Delta v=v'-v=\frac{m}{M+m}u$

人从最高点落到地面的时间为:$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$

答:此人跳出的距离增加了$\frac{mu}{M+m}\times\frac{v_0\sin\alpha}{g}$

例 1-5　如图 1-2 所示,物体 1 和 2 的质量分别为 m_1 与 m_2,滑轮的转动惯量为 J,半径为 r。

(1)如物体 2 与桌面间的摩擦系数为 μ,求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 和 T_2(设绳子与滑轮间无相对滑动,滑轮与转轴无摩擦);

(2)如物体 2 与桌面间为光滑接触,求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 和 T_2。

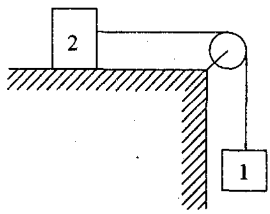

图 1-2

已知:m_1,m_2,J,r;求:(1)物体 2 与桌面间的摩擦系数为 μ 时,$a=?,T_1=?,T_2=?$ (2)当 $\mu=0$ 时,$a=?,T_1=?,T_2=?$

解:(1)用隔离体法,分别画出三个物体的受力图,如图 1-3a、1-3b、1-3c 所示。对物体 1,在竖直方向应用牛顿运动定律:$T_1-mg=m_1(-a)$

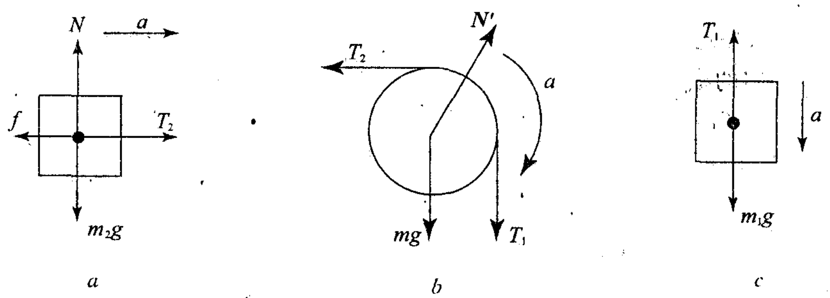

图 1-3

对物体 2,在水平方向和竖直方向分别应用牛顿运动定律:

$$T_2-\mu N=m_2a$$

$$N-m_2g=0$$

对滑轮,应用转动定律:$T_2r-T_1r=J(-\alpha)$

并利用关系：$a=r\alpha$，由以上各式，解得：

$$a=\frac{m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot g$$

$$T_1=\frac{m_2+\mu m_2+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_1 g$$

$$T_2=\frac{m_1+\mu m_1+\mu\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_2 g$$

(2)$\mu=0$ 时：$a=\dfrac{m_1}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot g=\dfrac{m_1r^2g}{m_1r^2+m_2r^2+J}$

$$T_1=\frac{m_2+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_1 g=\frac{(m_2r^2+J)m_1g}{m_1r^2+m_2r^2+J};$$

$$T_2=\frac{m_1+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_2 g=\frac{m_1m_2r^2g}{m_1r^2+m_2r^2+J}$$

答：(1)物体 2 与桌面形的摩擦系数为 μ 时，$a=\dfrac{m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot g$

$T_1=\dfrac{m_2+\mu m_2+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_1 g$　$T_2=\dfrac{m_1+\mu m_1+\mu\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_2 g$；(2)当 $\mu=0$ 时，

$a=\dfrac{m_1r^2g}{m_1r^2+m_2r^2+J}$，$T_1=\dfrac{(m_2r^2+J)m\cdot g}{m_1r^2+m_2r^2+J}$；$T_2=\dfrac{m_1m_2r^2g}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J}$。

例 1-6　光滑水平地面上放有一质量为 M 的三棱柱体（倾角为 θ），其上又放一质量为 m 的小三棱柱体。它们的横截面都是直角三角形，M 的水平直角边的边长为 a，m 的水平直角边的边长为 b（如图 1-4 所示）。两者的接触面亦为光滑，设它们由静止开始滑动，求当 m 的下边缘滑到水平面时，M 在水平面上移动的距离。

已知：θ, m, M, a, b；求：$S=?$

解：对 M 与 m 组成的系统，由于水平方向受外力为零，故水平方向动量守恒。

设 M 与 m 相对地面的速度分别是 V 和 v，m 相对于 M 的速度为 v'，则有：

$mv_x-MV=0$　　(1)

由相对运动公式：$v_x=v'_x-V$　　(2)

将(2)式代入(1)式得：$(M+m)V=mv'_x$

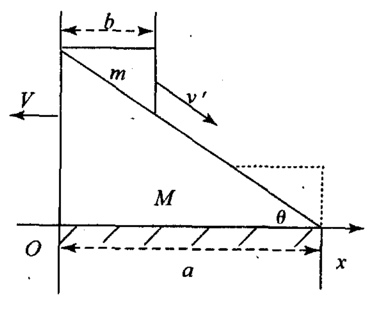

图 1-4

设 m 的下边缘滑到水平面需用的时间为 t，将上式两侧对时间积分，有：

$$(M+m)\int_0^t V dt = \int_0^t v'_x dt$$

显然，$\int_0^t V_x dt = S$ 就是 M 相对水平地面移动的距离；

而 $\int_0^t v'_x dt = (a-b)$ 是 m 相对于 M 在水平方向移动的距离。

最后求得 M 在水平面上移动的距离：$S=\dfrac{m(a-b)}{M+m}$

答：当 m 的下边缘滑到水平面时，M 在水平面上移动的距离为 $\dfrac{m(a-b)}{M+m}$。

例 1-7　电风扇开启电源时，经 t_1 时间达到额定转速 ω_0，关闭电源时经时间 t_2 停止。设电风扇的转动惯量为 J，且电机的电磁力矩与摩擦力矩为恒量。求：电机的电磁力矩。

已知：t_1, ω_0, t_2, J；求：$M=?$

解：设电风扇的电磁力矩、摩擦力矩分别为 M、M_f 且恒定，电风扇开启时受电磁力矩与摩擦力矩的作用，即：　$M-M_f=J\alpha_1$　①

当电风扇达到额定转速时：　$\omega_0=\alpha_1 t_1$　②

电风扇关闭过程中，只受到摩擦力矩的作用，即：　$-M_f=J\alpha_2$　③

达到停止时：　$\omega_0+\alpha_2 t_2=0$　④

解此联立方程组得：$M=J\omega_0\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)$

答：电机的电磁力矩为 $J\omega_0\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)$。

例 1-8　一质量为 m、半径为 R 的均匀质量圆盘绕通过盘心且垂直于盘面的光滑轴以 ω_0 的角速度转动。现将盘置于粗糙的水平桌面上，圆盘与桌面间的摩擦系数为 μ。求圆盘经过多少时间、转几圈将停下来？

已知：m, R, ω_0, μ；求：$t=?, N=?$

解：摩擦力是分布在整个盘面上的，如图 1-5 所示，计算摩擦力的力矩时，应将圆盘分为无限多个半径为 r、宽为 dr 的圆环积分。故摩擦力矩为：

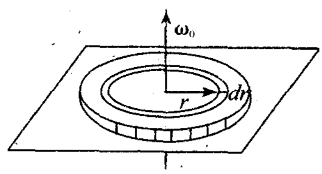

图 1-5

$$M=\int_0^R -\mu g r \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = -\frac{2}{3}\mu m g R$$

设 ω_0 的方向为正方向：$J=\dfrac{1}{2}mR^2$

于是得：$\alpha=\dfrac{M}{J}=-\dfrac{4\mu g}{3R}$，由：$\omega=\omega_0+\alpha t=0$ 得：$t=-\dfrac{\omega_0}{\alpha}=\dfrac{3R\omega_0}{4\mu g}$

又由 $\omega^2-\omega_0^2=\alpha\Delta\theta$，停下来时 $\omega=0$，所以停下来前转过的圈数为：

$$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=-\frac{\omega_0^2}{4\pi\alpha}=\frac{3\omega_0^2 R}{16\pi\mu g}$$

答：圆盘经 $\dfrac{3R\omega_0}{4\mu g}$ 秒时间、转 $\dfrac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$ 圈将停下来。

例 1-9　如图 1-6 所示，线密度为 ρ，质量为 m 的均匀细杆与转轴（y 轴）的夹角为 α，求其

转动惯量。

已知：ρ,m,α；求：$J=?$

解：在杆上 l 处任取微元 dm，显然，$dm=\rho dl$。

而细杆的总长度：$l_0=\frac{m}{\rho}$，于是由：$J=\int_v r^2$ 得：

$$J=\int_v r^2 dm=\int_0^{l_0}(l\sin\alpha)^2\rho dl=\frac{1}{3}\rho l_0^3\sin^2\alpha=\frac{1}{3}ml_0^2\sin^2\alpha$$

答：其转动惯量为$\frac{1}{3}ml_0^2\sin^2\alpha$。

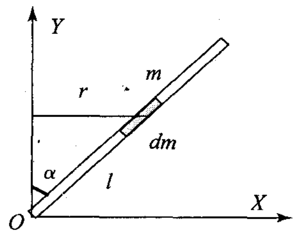

图 1-6

例 1-10　一链条总长为 l，质量为 m，放在桌面上并使其下垂，下垂的长度为 a（如图 1-7 所示）。设链条与桌面的滑动摩擦系数为 μ，令链条从静止开始运动，则：(1)链条离开桌面的过程中，摩擦力对链条做了多少功？(2)链条离开桌面时的速率是多少？

已知：l,m,a,μ；求：$A_f=?,v_{末}=?$

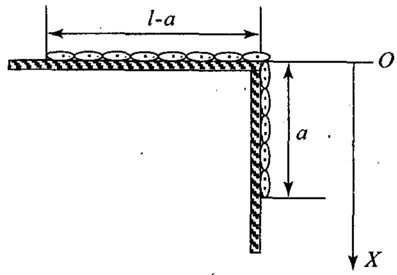

图 1-7

解：(1)建立坐标系如图，当链条离桌面 $x\sim x+dx$ 时，摩擦力 $f=\frac{\mu mg(l-x)}{l}$

$$A_f=\int_0^l f\cdot dS=-l\int_0^l\frac{\mu mg}{l}(l-x)dx=\frac{\mu mg}{l}\frac{1}{2}[(l-x)^2]_a^l$$

$$=-\frac{\mu mg}{2l}(l-\alpha)^2$$

(2)对链条应用动能定理：$\sum A=A_p+A_f=\frac{1}{2}mv_{末}^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

$$A_p=\int_a^l p\cdot dr=\int_a^l\frac{mg}{l}xdx=\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}$$

前已得出：$A_f=-\frac{\mu mg(1-a)^2}{2l}$

$\because v_0=0,\therefore A_p+A_f=\frac{1}{2}mv_{末}^2$

$\therefore\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}-\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}=\frac{1}{2}mv_{末}^2$

得链条离开桌面时的速率是：

$$v_{末}=\sqrt{\frac{g}{l}}[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

答：摩擦力对链条做功为$\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$；链条离开桌面时的速率是$\sqrt{\frac{g}{l}}[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2]^{\frac{1}{2}}$。

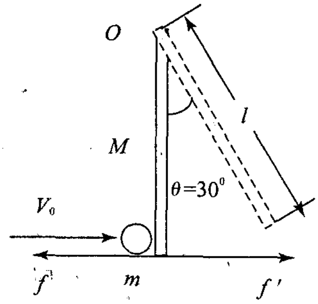

图 1-8

例 1-11　质量为 M、长为 l 的均匀直棒，可绕垂直于棒的一端的水平轴 O 无摩擦地转动。它原来静止在平衡位置上，现有一

质量为 m 的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直地相撞。相撞后，使棒从平衡位置处摆动到最大角度 $\theta=30°$处。(1)这碰撞设为弹性碰撞，试计算小球初速 v_0 的值。(2)相撞时，小球受到多大的冲量？

已知：$M,l,m,\theta=30°$；求：$v_0=?\ I=?$

解：设碰后小球速度为 v，棒转速为 ω，

因为弹性碰撞，所以：
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (1)$$

又因为系统合外力矩为 0

所以角动量守恒：
$$mv_0l=mvl+J\omega \qquad (2)$$

碰后机械能守恒，所以：
$$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}Mgl(1-\cos30°) \qquad (3)$$

$$J=\frac{1}{3}Ml^2 \qquad (4)$$

由(3)(4)得：$\omega=\sqrt{\dfrac{3g(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}{l}}$ 代入(1)(2)得：$v_0=\dfrac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\dfrac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$

方法一：所以 $v=-v_0-\dfrac{J\omega}{ml}=\dfrac{6m-2M}{12m}\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}$

故：$I=\int_{t_1}^{t_2}fdt=mv-mv_0=-M\dfrac{\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}}{3}$

方法二：利用牛顿第三定律来做：

$$\int_{t_1}^{t_2}Mdt=J\omega\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot ldt=l\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot dt=J\omega\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot dt=\frac{J\omega}{l}$$

因为：　$f=-f'$

所以：$I=\int_{t_1}^{t_2}fdt=-\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot dt=-\dfrac{J\omega}{l}=-M\dfrac{\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}}{3}$

答：小球初速 v_0 的值为 $\dfrac{6m-2M}{12m}\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}$；相撞时，小球受到的冲量为 $M\dfrac{\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}}{3}$。

三、教材习题解答

1-1　回答下列问题。

(1)位移和路程有何区别？

答：位移是矢量，反映质点位置变化的大小和方向；路程是标量，是质点实际走过的路径长度。