主编　沙秋夫　姜本源　宋介珠

高等数学（同济五版）学习指南

（下册）

東北大學出版社
Northeastern University Press

高等数学学习指南

（下册）

主　编　沙秋夫　姜本源　宋介珠
副主编　李海燕　王艳玲　潘　宇

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指南（下册）/ 沙秋夫，姜本源，宋介珠主编．—沈阳：东北大学出版社，2008.6
ISBN 978-7-81102-553-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①沙…　②姜…　③宋…　Ⅲ．高等数学—高等学校—数学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 082462 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：11
字　　数：372 千字
出版时间：2008 年 6 月第 1 版
印刷时间：2008 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：孟　颖　刘宗玉　　　　责任校对：冬　雨
封面设计：唐敏智　　　　　　　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-553-8　　　　总定价：26.00 元

前　言

《高等数学学习指南》是专门为使用同济大学编写的第五版“高等数学”的一般本科院校的学生编写的，作者都是长期从事高等数学教学工作的一线教师.

全书有上、下二册，分别与同济五版《高等数学》相配套，包括十二章和两个附录. 十二章内容与教材同步，每章含五项内容.

一、内容提要. 此项概括了每章的主要定义和常用结论. 有些结论是在数学工作中总结出来的被证明行之有效的.

二、例题分析. 此项利用分类的方法，通过各种典型例题，讲述解答问题的方法. 特别是教给学生如何分析问题和解题的思路.

三、难题解析. 对教材中的难题给出详细解答，针对有些题目给出多种解法. 这可以用于学生课后复习.

四、补充与提高. 通过课外题的解答对所学知识与解题方法进行补充. 所举例题大多具有综合性. 这会使学生对所学知识做到融会贯通，提高学生综合运用所学知识解决疑难问题的能力. 特别是对那些有志考研的学生更会大有裨益.

五、同步练习与测试. 每章后提供两套测试题，供学生自查之用. 每套题建议用两个小时做

完. 书中提供了详细解答.

书后两个附录共提供了六套期末测试题，上册三套，下册三套. 每册前两套为数学一的内容，最后一套为数学二的内容.

《高等数学学习指南》除供在校本科生使用外，还可供考研者使用，也可供从事高等数学教学工作的同事们参考. 本书的出版得到了东北大学出版社的大力支持，在此表示诚挚的谢意.

本书系《高等数学学习指南》的下册，主编为沙秋夫，姜本源和宋介珠，副主编为李海燕，王艳玲和潘宇，参与编写人员还有王学理、金英善和黄胜绢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免会有不足之处，读者及同行的批评指教正是我们所衷心期待的.

作　者

2008 年 1 月 8 日

目　录

上册

第八章　多元函数微分法及其应用

一、内容提要

(一) 主要定义

1. 二元函数的极限

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的附近有定义(点 P_0 可除外)，点 P_0 的任一个邻域内都有使 z 有定义的点 $P(x, y)$ 异于 P_0，当点 P 以任意方式趋近于 P_0 时，函数 $f(x, y)$ 相应地趋于一个确定的常数 A，则称 A 为 $f(x, y)$ 当 $x \to x_0$，$y \to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A.$$

2. 二元函数在一点连续

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义，如果有

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处连续.

3. 偏导数

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \text{ 或} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x, y_0)-f(x_0, y_0)}{x-x_0}$$

存在，则称此极限为 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处对 x 的偏导数，称极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \text{ 或} \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0, y)-f(x_0, y_0)}{y-y_0}$$

为 $f(x, y)$ 在 P_0 处对 y 的偏导数. 分别记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \ f_x(x_0, y_0) \text{ 与 } \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \ f_y(x_0, y_0) \text{ 等}.$$

4. 全微分

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho).$$

其中 A，B 不依赖于 Δx，Δy，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称 $z = f(x, y)$ 在点(x, y) 处可微. 此时表达式

$$A\Delta x + B\Delta y,$$

叫做 $z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 处的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y \text{ 或 } \mathrm{d}z = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y.$$

可以证明

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

5. 方向导数

设 $z = f(x, y)$ 在包含 $P(x, y)$，$P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 的邻域内有定义，$\boldsymbol{l} = (\Delta x, \Delta y)$，则 $f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho},$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

类似地可以定义空间上的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\rho},$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

6. 梯度(gradient)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域内有连续的一阶偏导数，则向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

称为 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度，记作 $\mathbf{grad} f(x, y)$，即

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

注 $\mathbf{grad} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$

(二) 常用结论

1. 可微与可偏导的关系

函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微，则必可偏导，即 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 存在，反之不真. 特别地，即使 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 存在，函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处也不一定连续，当然也不一定可微.

2. 多元复合函数求导法则

(1) 如果 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 在点 (x, y) 处有偏导数，$z=f(u, v)$ 在点 (u, v) 处有连续偏导数，则 $z=f[u(x, y), v(x, y)]$ 在点 $P(x, y)$ 处也有关于 x 或 y 的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

在相应的条件下，还有下列求导公式：

(2) 若 $z=f(u, v, w)$，$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$，$w=w(x, y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

(3) 若 $z=f(u, x, y)$，$u=u(x, y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(4) 若 $z=f(u, v, w)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$，$w=w(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

3. 隐函数的求导公式

(1) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的隐函数. 且二元函数 $F(x, y)$ 有连续的偏导数，$F_y(x, y)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

(2) 设 $z=z(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的隐函数，三元函数 $F(x, y, z)$ 有连续的偏导数，且 $F_z(x, y, z)\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

(3) 方向导数的计算公式

函数 $z=f(x,y)$(或 $u=f(x,y,z)$)在其可微点处沿任何方向 l 的方向导数都存在，且有下列计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

$$\left(\text{空间为}\quad \frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right).$$

其中 α, β 为 l 与 x 轴和 y 轴正向的夹角(α, β, γ 为方向 l 的方向角).

4. $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处全微分存在.

5. 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 连续，则二者相等.

6. $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内连续，且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. 记 $u(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$，则

$u(P_0)>0$, $f_{xx}(P_0)<0$ 时取极大值；

$u(P_0)>0$, $f_{xx}(P_0)>0$ 时取极小值；

$u(P_0)<0$ 时不取极值；

$u(P_0)=0$ 时不能断定.

7. 可微函数 $z=f(x,y)$ 在可微函数 $\varphi(x,y)=0$ 条件下取极值的必要条件是

令
$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$
满足

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

8. 曲线

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程和法平面方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

9. 曲面 $F(x, y, z)=0$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程和法线方程分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0;$$

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}.$$

10. 全微分的几何意义

曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处切平面上 z 坐标的增量就是全微分.

注 切平面

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0),$$

记

$$\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0,$$

则全微分

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0, y_0)\Delta x+f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

11. 由两空间曲面决定的空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases}F(x, y, z)=0,\\ G(x, y, z)=0\end{cases}$$

的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}.$$

12. 记 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$, α, β 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向角，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{e}.$$

13. 设 u, v 都是 x, y, z 的函数，u, v 具有各连续偏导数，f 可导，则有

(1) $\mathbf{grad}(u+cv)=\mathbf{grad}u+c\,\mathbf{grad}v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv)=v\,\mathbf{grad}u+u\,\mathbf{grad}v$;

(3) $\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{1}{v^2}(v\,\mathbf{grad}u-u\,\mathbf{grad}v)\quad(v\neq0)$;

(4) $\mathbf{grad}f(u)=f'(u)\mathbf{grad}u$.

二、典型例题

(一) 求导运算

1. 分段函数

【例 8-1】 设 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

试讨论 $f(x, y)$ 在点(0, 0)处的连续性，偏导数存在性及函数的可微性.

【解】 $\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$<\frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.$$

故 $f(x, y)$ 在(0, 0)处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0.$$

类似地 $f_y(0,0)=0$.

由于 $f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$. 若 $f(x, y)$ 在(0, 0)处可微分，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=0$. 必有 $\Delta z=o(\rho)$，但当 $\Delta x=\Delta y$ 时，$\Delta z=\dfrac{1}{2}$. 矛盾，故 $f(x, y)$ 在(0, 0)处不可微.

【例 8-2】 试讨论 $f(x, y)$ 在(0, 0)处的连续性与偏导数存在性，已知

$$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ 1+x-y, & x<0,\ y\geqslant 0;\\ 1+x+y, & x<0,\ y\leqslant 0;\\ 1-x+y, & x\geqslant 0,\ y\leqslant 0.\end{cases}$$

【解】 显然 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1=f(0,0)$，故 $f(x, y)$ 在(0, 0)处连续.

$$f(x,0)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0,\\ 1+x, & x<0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{1-x-1}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{1+x-1}{x}=1.$$

故 $f_x(0, 0)$ 不存在. 类似可知 $f_y(0, 0)$ 也不存在.

【例 8-3】 设

$$f(x, y)=\begin{cases}xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

试求 $f_{xy}(0, 0)$ 和 $f_{yx}(0, 0)$.

【解】 容易求得

$$f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0.$$

当 $y\neq 0$ 时

$$f_x(0, y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=-y,$$

$$f_{xy}(0, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1;$$

当 $x\neq 0$ 时

$$f_y(x, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=x.$$

类似于 $f_{xy}(0, 0)$ 的求法, 得 $f_{yx}=(0, 0)=1$.

2. 复合函数

【例 8-4】 $z=f(x^2-y^2, xy)$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, 已知 $f(u, v)$ 二阶偏导数连续.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xf_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x]+f_2'+y[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot x]$$

$$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+2x(f_{11}''\cdot 2x+f_{12}''\cdot y)+y(f_{21}''\cdot 2x+f_{22}''\cdot y)$$

$$=2f_1'+4x^2f_{11}''+4xyf_{12}''+y^2f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f_1'-2y[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x]+x[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot x]$$

$$= -2f_1' + 4y^2 f_{11}'' - 4xyf_{12}'' + x^2 f_{22}''.$$

【例 8-5】 设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$，$f$ 与 g 都具有连续二阶偏导数. 求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

【解】
$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} + g\left(\frac{y}{x}\right) + xg'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$
$$= f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$
$$= -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x\left[\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right] + y\left[-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$
$$= \frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= 0.$$

【例 8-6】 设 $w = f(u)$ 二阶可导，且
$$u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$
求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$.

【解】 令 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$，于是 $u = \ln r$，则
$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(u)\frac{1}{r}\frac{x-a}{r}$$
$$= f'(u)(x-a)r^{-2},$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(u)\frac{(x-a)^2}{r^4} + \frac{f'(u)}{r^2} - \frac{2(x-a)^2}{r^4}f'(u).$$

由对称性，有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f''(u)\frac{(y-b)^2}{r^4} + \frac{f'(u)}{r^2} - \frac{2(y-b)^2}{r^4}f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f''(u)\frac{(z-c)^2}{r^4} + \frac{f'(u)}{r^2} - \frac{2(z-c)^2}{r^4}f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$= \frac{f''(u)[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^4} + \frac{3f'(u)}{r^2} - \frac{2[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^4}f'(u)$$

$$= \frac{f''(u)}{r^2} + \frac{3f'(u)}{r^2} - \frac{2f'(u)}{r^2} = \frac{f''(u)+f'(u)}{r^2}.$$

3. 隐函数

【例 8-7】 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定，且 $F(u, v)$ 具有连续偏导数，则

$$z = xy + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

【证】 令 $u = x + \frac{z}{y}$，$v = y + \frac{z}{x}$. 则

$$F(u, v) = 0,$$

$$Fu \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Fv \cdot \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x - z}{x^2}\right) = 0.$$

解出
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zFv - x^2Fu}{xFu + yFv}\cdot\frac{y}{x}.$$

类似地有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zFu - y^2Fv}{xFu + yFv}\cdot\frac{x}{y},$$

于是

$$xy + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= xy + x\cdot\frac{zFv - x^2Fu}{xFu + yFv}\cdot\frac{y}{x} + y\cdot\frac{zFu - y^2Fv}{xFu + yFv}\cdot\frac{x}{y}$$

$$= xy + \frac{yzFv - x^2yFu + xzFu - y^2xFv}{xFu + yFv}$$

$$= xy + \frac{z(yFv + xFu) - xy(xFu + yFv)}{xFu + yFv} = z.$$

【例 8-8】 设 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 0$，当 $x = 1$，$y = -2$，$z = 1$ 时，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$的值.

【解】 将所给方程两边对 x 及 y 分别求偏导数，得

$$\begin{cases} 2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} + y - \frac{\partial z}{\partial x} = 0, & ① \\ 4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} + x - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. & ② \end{cases}$$

以 $x = 1$，$y = -2$，$z = 1$ 代入式①，②，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{7}{5}.$$

式①及②再对 x 及 y 求偏导数得

$$\begin{cases} 2 + 6z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 6\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, & ③ \\ 6z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 1 - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, & ④ \\ 4 + 6z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. & ⑤ \end{cases}$$

再将 $x = 1$，$y = -2$，$z = 1$，$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{7}{5}$ 代入式③，④及⑤解出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{5},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{5},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{394}{125}.$$

【例 8-9】 $z = x^2 + y^2$ 中 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 确定，求 $\frac{dz}{dx}$.

【解】 令 $F(x \cdot y) = x^2 - xy + y^2 - 1$，

则
$$F_x = 2x - y,\ F_y = -x + 2y,$$

故
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{2x - y}{x - 2y}.$$

将 $z = x^2 + y^2$ 两边对 x 求导数，得

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx},$$