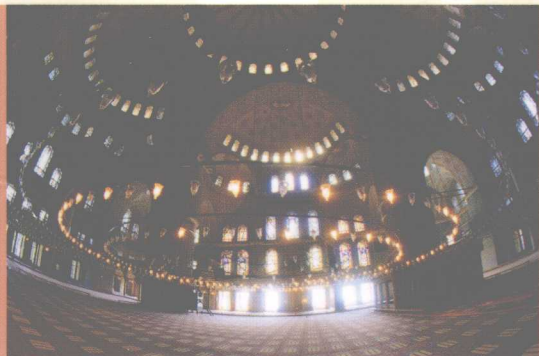




普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学文化

顾 沛



高等教育出版社

内容提要

本书是南开大学“数学文化”课教材,是在十轮教学实践的基础上修改而成的,贴近教学实际,以学生为本,以读者为本。

本书从数学问题、数学典故、数学观点三个角度展开,以比较浅显的知识为载体,讲授数学的思想、精神、方法,使各专业的学生都能有所收获;初步了解数学与人类社会发展的关系;体会数学的科学价值、应用价值、人文价值;开阔视野,加强对数学的宏观认识和整体把握;受到优秀文化的熏陶,领会数学的理性精神,从而提高自身的文化素养。

本书不过多地追求系统性和完整性,注重知识性、趣味性和思想性的统一,以及科学素质教育与人文素质教育的有机融合。同时,在南开大学“数学文化”精品课程网(<http://math.nankai.edu.cn/jpkc/sxwh/>)上有可供下载的全程教学录像、教学课件及其他相关素材。

本书可作为高等学校数学文化类课程的教材,也可作为大学生的课外读物,以及中小学教师的参考书。作为“闲书”,本书也是开卷有益的。

图书在版编目(CIP)数据

数学文化 / 顾沛. —北京: 高等教育出版社, 2008.6

ISBN 978-7-04-023890-7

I. 数… II. 顾… III. 数学-文化-高等学校-教材
IV. O1-O5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 061455 号

策划编辑 李艳馥 责任编辑 兰莹莹 封面设计 王凌波 责任绘图 吴文信
版式设计 马敬茹 责任校对 胡晓琪 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 16.5
字 数 300 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008 年 6 月第 1 版
印 次 2008 年 6 月第 1 次印刷
定 价 20.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23890-00

前言

本书的前身是南开大学“数学文化”课的讲义。该课从2001年2月起在南开大学讲授,至今已讲授十轮,并于2007年被评为国家精品课程。《数学文化》讲义的胶印版先后有两个版本,在长期的教学实践中经多次修改、增删,现在整理成这本教材。本教材贴近教学实际,以学生为本,以读者为本。

南开大学的“数学文化”课,是面向全校所有专业的公共选修课,是文化素质教育类型的课程,共34课时。它不是以数学的知识系统为线索进行教学,而是以比较浅显的知识为载体,讲授数学的思想、精神、方法,旨在提高大学生的数学素质、文化素质和思想素质。该课程不过多地追求系统性和完整性,而比较讲究知识性、趣味性和思想性的统一,比较讲究科学素质教育与人文素质教育的有机融合。

通过“数学文化”课的学习,学生可以初步了解数学与人类社会发展的关系;体会数学的科学价值、应用价值和人文价值;开阔视野,加强对数学的宏观认识和整体把握;受到优秀文化的熏陶,领会数学的理性精神,从而提高自身的文化素养。

本教材的选材原则是:第一,以数学史、数学问题、数学知识、数学观点为载体,介绍数学思想、数学方法、数学精神,探讨数学与人文的交叉;第二,不过深涉及数学理论,以能够讲清数学思想为标准,使各专业的学生都能有所收获;第三,开阔眼界,纵横兼顾,中外兼顾,对于数学的历史、现状和未来,以及数学与人文的各种关系都有所涉及。

本教材经多年的教学实践不断探索,逐渐形成了现在的特色:在第一章“概述”的基础上,从数学问题、数学典故和数学观点三个角度展开对数学文化的阐述;每一节的内容相对独立,便于教师选材;每一节的长度虽然不完全一样,但教师根据自己的风格和需要略作增删,每一节就是一次课(两个课时)的容量。不同的院校可以根据学生和教师的特点,根据课时的多少,灵活地选择教学内容。

本书的结构主要来自南开大学的教学实践,带有试验和探讨的性质。教材中各节没有严格的顺序,教师可以自行改变。为了方便改换顺序,很少量的内容会在两节中各自提及,略有重复。

本书的“附录”,给出了教学实践中效果较好的几个趣味数学问题的讲解,这也是教材的有机组成部分。它们作为课堂教学的调剂,不但能提高教学的趣味性,而且能提高教学的知识性和思想性。

在南开大学目前的教学实践中,第〇章再加上对课程和教学方法的介绍、对学生的要求和关于考核评分方式的说明,是第一次课的内容;第一章的几节,每次课都安排10~20分钟的时间,逐次递进地讨论“附录”中的“抓三堆”游戏,进行师生互动,引起学生的兴趣;后面的各节,每次安排一位学生进行课堂演讲,大约15分钟。南开大学“数学文化”精品课程网上,有2006年和2007年两轮讲课的全程录像,欢迎大家浏览并指正,网址是 <http://math.nankai.edu.cn/jpkc/sxwh/>。

“数学文化”课与一般数学课的重大区别是,特别重视学生数学思想、精神的提升。教师在教学中,不但要向学生传授数学知识,更要让学生体会数学知识中蕴涵的数学文化,了解“数学方式的理性思维”,提高学生的数学素养。

“数学文化”课提倡采用启发式教学、讨论式教学的教学方法;对于“哥尼斯堡七桥问题”、“对称”的观点”等节的部分内容,则还可以采用研究性教学、探索式教学的方法。

“数学文化”课强调教学中的师生互动,努力用各种方式营造生动活泼的课堂氛围。课堂讨论及课堂演讲应成为经常采用的教学方式。“数学文化”课还注意课内外相结合,注意开展课外活动,为大学生文化素质教育助力。

本教材力图做到贴近教学实际。一方面,教材的语言尽量采用课堂教学的语言;另一方面,教材中凡是提及“请读者考虑”的地方,都是教师在教学中可以作启发式发问的地方,也都是可以组织师生互动的地方。

对于已经开设“高等数学”必修课的高等院校,如果开设数学文化类型的选修课,可以用本书作教材。对于有些没有开设“高等数学”必修课的外语、中文、教育、旅游、艺术等专业,也可以考虑以本书为基础开设“数学文化”课作为数学必修课。

本书还可以作为大学生的课外读物和中小学教师的参考书,对于拓宽视野、提高数学素养有一定帮助。其他读者把本书置诸案头,也会开卷有益的。

使用本教材开设“数学文化”课的教师,可以获赠与本课程配套的PowerPoint教学课件;南开大学“数学文化”课程网上也有全套教学课件,可供下载。

本书的出版,首先要感谢南开大学“国家大学生文化素质教育基地”,正是在该基地的督促和指导下,“数学文化”课才得以开设和发展;还要感谢高等教育出版社数学分社的李艳馥社长,如果没有她的支持和帮助,本书的出版会推迟几年。

在南开大学“数学文化”课的教学过程中,作者参考了国内外大量的书籍,所以本教材中的许多材料也取自那些书籍。特别是我国学者李文林、齐民友、张顺燕、张奠宙、方延明、张景中、张楚廷、杨世明、周明儒、郑毓信、王宪昌等先生的著作,给本书提供了丰富的营养,在此对他们表示衷心的感谢。本书的“经济学

是否需要公理化框架”、“数理统计的观点”、“数学机械化的观点”、“海岸线长度的问题”四节,分别在张效成、王兆军、李军、张伦四位教师教学实践的基础上加工而成,他们都是南开大学“数学文化”课程组的成员,对该课程的建设做出了重大贡献,在此对他们表示衷心的感谢。还要感谢本书的责任编辑兰莹莹同志,她的有效工作为本书增色不少。

教好这样一门课及写好这样一本教材,作者深感难度很大。由于作者水平有限,书中一定有不少错漏,真心希望读者批评指正。

顾 沛

2008年3月于南开大学

第〇章 关于“数学文化”课	1
第一章 概述	8
第一节 数学是什么	8
第二节 数学发展简史	16
第三节 数学的魅力	26
第四节 数学的语言及数学的应用	37
第二章 若干数学问题中的数学文化	45
第一节 黄金分割	45
第二节 哥尼斯堡七桥问题	59
第三节 有限与无限的问题	72
第四节 经济学是否需要公理化框架	83
第五节 海岸线的长度问题	95
第三章 若干数学典故中的数学文化	110
第一节 历史上的三次数学危机(1)	110
第二节 历史上的三次数学危机(2)	122
第三节 韩信点兵与中国剩余定理	133
第四节 “田忌赛马”与运筹学	143
第五节 阿波罗尼奥斯与圆锥曲线论	158
第六节 希尔伯特和他的 23 个问题	169
第四章 若干数学观点中的数学文化	177
第一节 “对称”的观点	177
第二节 “类比”的观点	189
第三节 “数理统计”的观点	198
第四节 “数学机械化”的观点	210
第五节 “相容性、独立性和完全性”的观点	222
附录 趣味游戏	232
附录 I “抓三堆”游戏	232
附录 II “找次品”游戏	245
附录 III “填骨牌”游戏	249

第〇章

关于“数学文化”课

“第〇章”中包含以下几个内容：“数学文化”一词的使用；“数学文化”课的内涵；重视数学素养，提高数学素养；如何学习“数学文化”课。

一、“数学文化”一词的使用

对许多人来说，“数学文化”一词可能是陌生的，这个词的使用频率近年来大大增加，说明它是有生命力的，说明许多人更愿意从文化这一角度来关注数学，更愿意强调数学的文化价值。事实上，数学是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力之一。数学与人类文明、与人类文化有着密切的关系。

中华人民共和国教育部 2003 年颁布的《普通高中数学课程标准》（实验）中，有四个地方用较大的篇幅谈到数学文化，并且在二级标题中使用“数学文化”一词。这表明“数学文化”一词已在官方文件中正式使用。

2002 年，在北京国际数学家大会期间，陈省身先生为“中国少年数学论坛”活动题词“数学好玩”，鼓励青少年喜爱数学、学好数学。“中国少年数学论坛”会场的大幅标语中，就使用了“数学文化”一词。2003 年 4 月，天津高校举办“数学文化展示月”活动，“数学文化”一词成为大学生活动的一个主题词。此后，有更多的高校举办以“数学文化”为主题的活动。十多年来我国还出版了《数学与文化》、《数学文化导论》、《数学文化》、《数学文化学》等一大批专门论述数学文化的书籍，“数学文化”一词成为若干书名的主题词。

在“数学文化”一词被日益广泛地使用时，“物理文化”、“化学文化”这样类似的词汇，并没有得到广泛地使用。这表明，数学科学，的确在本质上有不同于物理科学、化学科学等自然科学的地方。数学科学研究的对象，并不是某种具体的物质和具体的物质运动形态，而是从众多的物质运动形态中抽象出来的事物，是人脑的产物。数学，具有超越具体科学和普遍适用的特征，具有公共基础的地位。

二、“数学文化”课的内涵

关于“数学文化”一词的内涵，不同的学者从不同的角度有不同的说法，目前尚没有一个公认的说法。

本书源于“数学文化”课,所以只从课程的角度,谈谈课程名称“数学文化”一词的含义。

“文化”一词,词典上常常有“狭义”与“广义”两种说法。“狭义”的说法,不同的词典有所不同;“广义”的说法,各个词典的意思大致相同:“文化”是人类社会历史实践过程中所创造的物质财富和精神财富的总和、积淀。例如,“中华文化”、“校园文化”、“佛教文化”中的“文化”,都是用的该词广义的说法。

“数学文化”中的“文化”,也是指广义的“文化”。

“数学文化”一词的内涵,简单说,是指数学的思想、精神、方法、观点,以及它们的形成和发展;广泛些说,除上述内涵以外,还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分、数学与社会的联系、数学与各种文化的关系,等等。

也可以说,“数学文化”课的宗旨,是提高学生的数学素养。

一个人的学历教育,从小学一年级到大学一年级,一般要学十三年的数学课程,只有语文课能与之相比;但许多人并未因为学的时间长而掌握数学的精髓。相反,大多数学生对数学的思想、精神了解得比较肤浅,数学素养较差;甚至误以为学数学就是为了会做题、能应付考试,不知道“数学方式的理性思维”的重大价值,不了解数学在生产、生活实践中的重要作用,不理解数学文化与诸多文化的交汇。

实际上,学生大学毕业后走入社会,如果不是在与数学相关的领域工作,他们学过的具体的数学定理、公式和解题方法可能大多用不上,以至很快就忘记了。但不管从事什么工作,从数学课程学习中获得的数学素养,数学的思维方法和看问题的着眼点等,倒会随时随地发生作用,使人们在实践中终身受益。

数学素养也称数学素质,它与数学知识及解题相比,反而是教师在教学中有所忽视,学生在学习中所欠缺的。

三、重视数学素养,提高数学素养

这里提及的“数学素养”,具体内容到底是什么?各用人单位对于“数学素养”是否重视、认可?下面从三个层次有详有略地展开。

1. 关于“数学”的定位和认识

本书第一章中还会涉及这一话题,这里只介绍几句话,这是几句简短、精炼并有一定深度的话。对于这几句话中表述的关于“数学”的认识,也是“数学文化”课的重要指导思想。

目,先介绍两句耐人寻味的简短的话:

一个人不识字可以生活,但是若不识数,就很难生活了;

一个国家科学的进步,可以用它消耗的数学来度量.

前一句比较通俗,却颇为深刻;后一句比较高雅,又非常精彩!

再介绍对数学定位的三点认识:数学不仅是一种重要的“工具”或“方法”,也是一种思维模式,即“数学方式的理性思维”;数学不仅是一门科学,也是一种文化,即“数学文化”;数学不仅是一些知识,也是一种素质,即“数学素质”.

最后介绍关于“数学训练”的一句话:

在提高一个人的推理能力、抽象能力、分析能力和创新能力方面,数学训练的作用,是其他训练难以替代的.

读者如果对上面的某一段话有体会,愿意查阅其他书籍和资料,就此写一篇读书报告,定会有所收获.

2. 关于“数学素养”的通俗说法和专业说法

“数学素养”的通俗说法是,“把所学的数学知识都排除或忘掉后,剩下的东西”.例如,从数学角度看问题的出发点;有条理地思维,严密地思考、求证;简洁、清晰、准确地表达;在解决问题时、总结工作时,逻辑推理的意识和能力;对所从事的工作,合理地量化和简化,周到地运筹帷幄.

下面介绍关于“数学素养”的专业说法.之所以说这是“专业说法”,是因为它摘自教育部高等学校“数学与统计学教学指导委员会”的项目结题报告“数学学科专业发展战略研究报告”.需要指出的是,该文件中所说“数学素养”,针对的是数学学科专业的学生;数学学科专业包括“数学与应用数学专业”和“信息与计算科学专业”.其他专业的学生,可以把这种说法作为参考.该文件中分如下五点来叙述“数学素养”:第一,主动探寻并善于抓住数学问题的背景和本质的素养;第二,熟练地用准确、简明、规范的数学语言表达自己数学思想的素养;第三,具有良好的科学态度和创新精神,合理地提出新思想、新概念、新方法的素养;第四,对各种问题以“数学方式”的理性思维,从多角度探寻解决问题的方法的素养;第五,善于对现实世界中的现象和过程进行合理的简化和量化,建立数学模型的素养.

3. 用人单位对“数学素养”的重视

华东师范大学的张奠宙先生很早就讲过这样一个例子:一位中学毕业生在上海和平饭店做电工,从空调机效果的不同,他发现地下室到10楼的一根电线与众不同,现需要测知其电阻.在别人因为距离长而感到困难的时候,他想到对地下室到10楼的三根电线统一处理.在10楼处将电线两两相接,在地下室分三次测量,然后用解三元一次方程组(*)的办法,计算出需要的结果(图0.1).

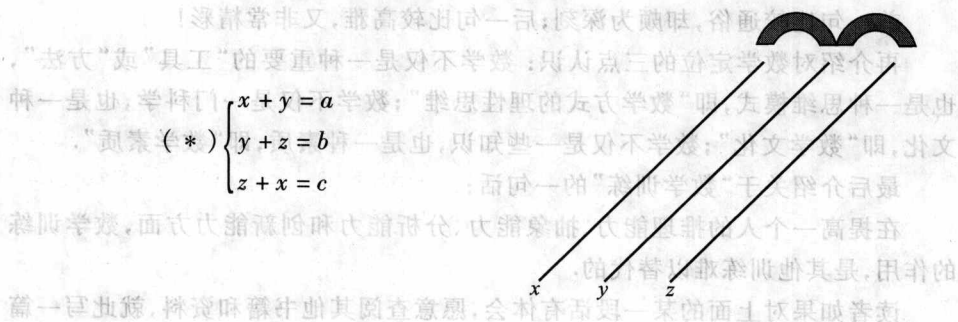


图 0.1

这位电工解决问题的方法,并不完全是曾经做过类似的数学题的方法,而是得益于他的数学素养.后来又有几次类似的情况,他也因此很快受到上级的赏识和重视.

下面介绍的是某外企招考员工的一道题.

有三个筐,一个筐里装着柑子,一个筐里装着苹果,一个筐里混装着柑子和苹果,装完后封好.然后做“柑子”、“苹果”、“混装”三个标签,分别贴到上述三个筐上.由于马虎,结果全都贴错了.

请想一个办法,只许从某一个筐中拿出一个水果,就能够纠正所有的标签.

这道题并不难,但是也卡住了某些求职者,从而区分出求职者数学素养的不同.(答案见“第〇章”的最后)

下面是微软公司招考员工的一道面试题.应试者是经过几道关卡才到达这道面试题一关的.多数人在这里败下阵来,也有少数人通过了这关,从而也区分出他们能力的高下.

这道题的题目如下.

一个屋子里有 50 个人,每个人领着一条狗,而这些狗中有一部分病狗.

假定有如下条件: a. 狗的病不会传染,也不会不治而愈; b. 狗的主人不能直接看出自己的狗是否有病,只能靠看别人的狗和推理,来发现自己的狗是否有病; c. 一旦主人发现自己的狗是一只病狗,就会在当天开枪打死这条狗; d. 狗只能由他的主人开枪打死.

如果他们在一起,第一天没有枪声,第二天没有枪声,……,第十天发出了一片枪声,问有几条狗被打死?

当时参加面试的人都很奇怪,这道题跟微软公司有什么关系?是不是“脑筋急转弯”啊?面试官明确告诉他们,不是“脑筋急转弯”.其实,该题考查的就是求职者的数学素养.可见,数学素养是被很多用人单位看重的.

读者如果有兴趣,不妨想一想如何解决该问题.这当然不是一道来自现实的

题目.我们前面说过,数学研究的对象是“人脑的产物”,这道题也是人编出来的.

如果读者对该题毫无思路,下面给两点提示.可以先看第一点;如果仍然百思不得其解,则再看第二点.

第一点提示:从“第一天没有枪声”可以推出“病狗不止一条”.推理如下:用反证法,假设病狗只有一条,那么病狗的主人将看到其余的49条狗都不是病狗.而题目中明确说“这些狗中有一部分病狗”,所以只可能自己的狗是病狗.题目中又说,“一旦主人发现自己的狗是一只病狗,就会在当天开枪打死这条狗”,但“第一天没有枪声”,矛盾,因此病狗不止一条.

由此读者是否能感觉到逻辑推理的力量和数学素养的价值呢?

下面是第二点提示,它只有五个字:数学归纳法.

读者现在是否能够经过思考,得到这道题的解答?(答案见“第〇章”的最后)

由这样几个例子我们看出,数学素养是重要的,用人单位对于求职者的“数学素养”是重视的.

4. 着力提高数学素养

数学素养不是与生俱来的,而是在学习和实践中培养的.在数学学习中,不但要注重掌握数学定理、数学公式及具体的解题方法,更要着力提高自己的数学素养.

四、如何学习“数学文化”课

1. 内容和预备知识

从本教材的章节目录,读者容易看到本课程的大致内容;需要说明的是,在这些章节标题下,课程尽量不涉及过深的数学理论,而是以较浅显的知识为载体,讲授数学的思想、精神、方法、观点等.

学习本课程、阅读本教材需要的预备知识,主要是中等数学的知识.如果学过一点微积分则更好.

2. “数学文化”课与其他数学课的区别

一般的数学课,是以讲授数学的理论知识及其应用为主要目的.“数学文化”课虽然要以知识为载体,却并不以传授数学理论知识为主要目的,而是以教授数学思想为主,以提升学生的数学素养为主.至于作为载体的知识,则通俗易懂,能说明问题即可.

一般的数学课,是以数学的知识系统为线索来组织材料进行教学.“数学文化”课则是从数学问题、数学典故、数学观点等角度切入,并以它们为线索来组织材料,进行教学.例如,有限与无限的问题,历史上三次数学危机的典故,“对称”的观点,等等.

出 3. 从课程中得到的收获

可能得到的收获有：了解数学的历史，拓宽对数学的认识，引起对数学的兴趣，感悟数学的思想，提高数学素养，学会以数学方式的理性思维观察世界的方法。

同时，选修“数学文化”课会大大开阔视野。学生既可以把多年来学习的数学知识上升到观点、精神、方法、思想的层次上，又从文化和哲学的角度反观数学发展中的规律；既学习了历史上的重大数学事件，又学习了科学家、数学家的情感、品德和价值观；既了解到社会进步对数学的推动作用，又了解到数学发展对社会文明的推动作用。

4. 读书报告

建议学生在上课的同时自选主题阅读课外书籍并撰写读书报告。读书报告的选题可以围绕数学的思想、方法，数学与所学专业的联系，数学史中的重大事件等。

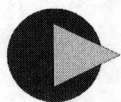
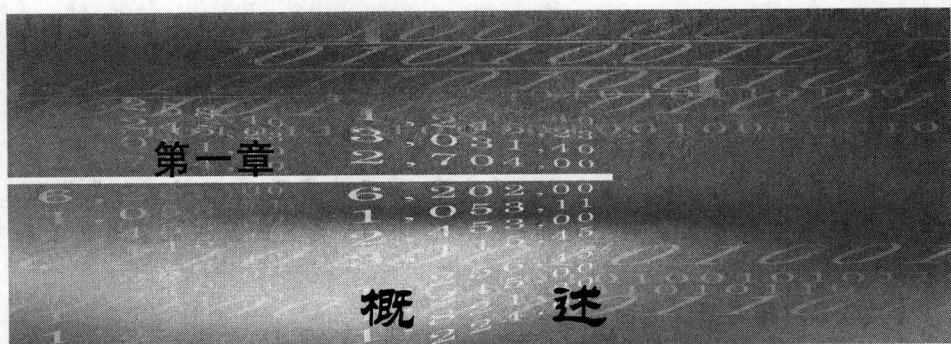
下面是一些参考选题：

关于数学抽象，牛顿力学与微积分，数的产生与发展，非欧几何的模型，谈谈“类比法”，谈谈“反证法”，数学与哲学的关系，数学与经济学的关系，数学与社会学的关系，数学与生物学的关系，数学与物理学的关系，数学与化学的关系，数学与史学的关系，数学与文学的关系，数学与医学的关系，数学与思维的关系，谈谈逻辑思维与形象思维，谈谈“直觉思维”，函数概念发展史，空间概念发展史，曲线概念发展史，关于“数学悖论”，从金融现象看“混沌”，以历史观看数学，计算机与数学，数学对天文学的推动，素数王国，数学中无穷思想的发展，博弈论在经济中的应用，三角学的产生与发展，数学猜想，中国的数学文化史，数学中的美，音乐中的数学，图画中的数学，非欧几何与近代物理，数学的价值，有序与无序，“圆”中的数学文化，二项式定理的由来，浅谈数学语言的特点，关于数学的严谨性，关于数学的真理性，数学与密码学，解析几何的产生与形数结合的思想，微积分与极限思想，古希腊与古代中国数学文化的比较，0的产生与其中的数学文化，拓扑学的产生，二进制与计算机，计算的复杂性，广告中的数据与可靠性，商标设计与几何图形，艺术中的数学，无限与悖论，电视与图像压缩，CT扫描中的数学，一拉东变换，军事与数学，金融中的数学，麦克斯韦方程中的数学文化，系统的可靠性，互联网技术中的数学方法，邮票中的国际数学家大会等。

5. 课堂演讲

除了读书报告，课程还提倡学生上台演讲，上台演讲可以促使大家更充分地查阅资料，更深入地钻研探讨，更认真地组织材料，同时把读书报告写成较高水平的演讲稿。上台演讲也可以锻炼当众说话的胆量和口头表达的能力。

“数学文化”课毕竟还是一个新生事物，虽然它能为学生的素质“养成”提供



第一节 数学是什么

关于“数学是什么”的问题，是一个看起来容易回答，其实却不容易回答的问题。说它容易回答，是因为谁都学过数学，所以似乎谁都知道“数学是什么”；说它不容易回答，是因为要把“数学是什么”说清楚，说透彻，就不那么容易了，甚至可以说，相当困难了。

在“数学文化”这门课程中，我们不在“透彻”的层面上回答这一问题，仅从下面三个角度，介绍和阐述这一问题，以使读者对数学有一个概况的了解。

一、数学的“定义”

关于数学的“定义”，至今还没有一种为所有数学家达成共识的说法。

我国长期沿用的是恩格斯关于数学的“定义”。恩格斯说：数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门科学。（据东北师范大学校长史宁中教授近来考证，恩格斯的原意中不含“现实世界中的”意思，应该改正为“数学是研究数量关系与空间形式的一门科学”。）

随着时间的推移，数学有了很大的发展，诸如事物结构、数理逻辑等，都成为数学的研究对象，这些似乎已不能被包含在上述定义中。因此，人们开始寻找数学的新“定义”。但是，要给数学下个定义，并不那么容易。转了一圈后，又回到恩格斯当年的定义上来，只不过对“数量关系”和“空间形式”赋予了更广泛的含义。

我们来看看此外的各种说法。

1. 古今数学家的说法

古今数学家关于“数学”有多种说法，我们挑选几个说法介绍如下。

美国数学家柯朗（Richard Courant, 1888—1972）（《数学是什么》）说：“数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望，它的基础是逻辑和直觉，分析和推理，共性和个性。”

法国数学家博雷尔(E. Borel, 1871—1956)说:“数学是我们确切知道我们在说什么,并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。”

英国数学家罗素(Bertrand A. W. Russell, 1872—1970)说,“数学是所有形如 p 蕴含 q 的命题的类”,而最前面的命题 p 是否对,却无法判断.因此“数学是我们永远不知道我们在说什么,也不知道我们说的是否对的一门学科”.

有意思的是,博雷尔与罗素的说法几乎是针锋相对的,但它们却从不同的侧面反映了数学的本质.

2. 方延明搜集的15种“定义”

南京大学的方延明教授在《数学文化导论》一书中,搜集了数学的15种“定义”,并且都以“ $\times \times$ 说”的形式呈现.这15种“定义”分别是:1)哲学说;2)符号说;3)科学说;4)工具说;5)逻辑说;6)创新说;7)直觉说;8)集合说;9)结构说(关系说);10)模型说;11)活动说;12)精神说;13)审美说;14)艺术说;15)万物皆数说.这15种定义都有它的道理,也都有片面性,但可使我们从各个角度考察、理解数学.

这里对数学的“哲学说”作稍微详细一点的解释,其他的定义均只作一句话的解释.

“哲学说”的意思是说数学是一种哲学.哲学说来自古希腊,代表人物有亚里士多德、欧几里得等人.亚里士多德曾说:“新的思想家把数学和哲学看做是相同的.”确实,古希腊的许多数学家同时也是哲学家.

欧几里得(Euclid of Alexandria,约公元前300年)的几何《原本》中说:点是没有部分的那种东西;线是没有宽度的长度.这种表述就带有一些哲学的味道.

牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)在《自然哲学之数学原理》的序言中 also 说,他是把这本书“作为哲学的数学原理的著作”,“在哲学范围内尽量把数学问题呈现出来”.这也可以看作数学的“哲学说”.

的确,哲学是研究最广泛的事物,数学也是研究最广泛的事物,这是它们的共同点.但是,数学与哲学的研究对象不同,研究方法也不同.两者虽有相似之处,但数学不是哲学的一部分,哲学也不是数学的一部分.

有人总结的“哲学从一门学科中的退出,意味着这门学科的建立;而数学进入一门学科,就意味着这门学科的成熟”倒是对数学与哲学的真知灼见.

“符号说”的意思,是说数学是一种高级语言,是符号的世界.

“科学说”的意思,是说数学是精密的科学,“数学是科学的皇后”.

“工具说”的意思,是说“数学是其他所有知识工具的源泉”.

“逻辑说”的意思,是说数学推理依靠逻辑,“数学为其证明所具有的逻辑性而骄傲”.

“创新说”的意思,是说数学是一种创新,如发现无理数,提出微积分,创立非欧几何。

“直觉说”的意思,是说数学的基础是人的直觉,数学主要是由那些直觉能力强的人们推进的。

“集合说”的意思,是说数学各个分支的内容都可以用集合论的语言表述。

“结构说”(关系说)的意思,是强调数学语言、符号的结构方面及联系方面,“数学是一种关系学”。

“模型说”的意思,是说数学就是研究各种形式的模型,如微积分是物体运动的模型,概率论是偶然与必然现象的模型,欧氏几何是现实空间的模型,非欧几何是非欧空间的模型。

“活动说”的意思,是说“数学是人类最重要的活动之一”。

“精神说”的意思,是说“数学不仅是一种技巧,更是一种精神,特别是理性的精神”。

“审美说”的意思,是说“数学家无论是选择题材还是判断能否成功的标准,主要是美学的原则”。

“艺术说”的意思,是说“数学是一门艺术”。

“万物皆数说”的意思,是说数的规律是世界的根本规律,一切都可以归结为整数与整数比。

3. 方延明及徐利治关于数学的“定义”

方延明教授本人关于数学的“定义”是:数学是研究现实世界中数与形之间各种形式模型的结构的一门科学。

数学家徐利治关于数学的“定义”是:数学是“实在世界的最一般的量与空间形式的科学,同时又作为实在世界中最具有特殊性、实践性及多样性的量与空间形式的科学”。

现在,我国多数数学家对数学“定义”的认识,又回到恩格斯的表述:数学是研究(现实世界中的)数量关系与空间形式的一门科学。

【思考题】请读者在学习“数学文化”课的过程中,始终带着这样的问题——在学完“数学文化”课后,给出一个自己关于“数学”的定义。

二、数学的特点

对于数学的特点,不同的研究者有不同的归纳和表述。比较普遍的说法是,数学有以下三个特点:抽象性、精确性和应用的广泛性。

1. 抽象性

抽象是所有各门科学都具有的性质,没有抽象就没有科学。那么,为什么专门把“抽象性”说成是数学的特点呢?数学的抽象到底与其他学科的抽象有什么不同呢?