



普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

上册

第三版

◎ 主编 费祥历 元 健 马铭福



中国石油大学出版社

普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

(第三版)

上册

费祥历 亓 健 马铭福 主编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/费祥历等主编.—3版.—东营:中国
石油大学出版社,2008.4
ISBN 978-7-5636-2562-8

I. 高… II. 费… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033531 号

(第三版)

上册

书 名:高等数学(第三版 上册)
作 者:费祥历 仵 健 马铭福

责任编辑:宋秀勇 刘 清(电话 0546—8392139)
封面设计:九天设计

出版者:中国石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)
网 址:<http://www.uppbook.com.cn>
电子信箱:yibian8392139@163.com
印刷者:沂南县汇丰印刷有限公司
发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0546—8392563)
开 本:170×225 印张:24.75 字数:479千字
版 次:2008年1月第3版第1次印刷
定 价:27.00元

序

高校非数学系“高等数学”，是一门份量很重的基础课程。因此，坊间所见这方面的教材很多，可谓汗牛充栋，这些教材，大都由有经验的教师执笔，平实可用，不过部分由于教学大纲的规范，难免多少给人一种“千人一面”的感觉，欲求那种体现个性、富有特色，给人耳目一新之感的作品，也不可多得。

我觉得，在这为数不多的、读后能给人突出印象的作品中，费祥历等3位老师主编的《高等数学》（石油大学出版社）是其中之一。

其一个突出的特点和优点体现在其选读部分，有的内容本身超出教学大纲范围，但与“正文”有密切联系且有重要的应用或理论意义，如从函数迭代联系到混沌概念。本书将其归入“选读”，可以有余地作较充分的展开，又如在一些特定领域中的应用，足以使学生加深对本课程的意义和作用的理解，而在正文中占据较多篇幅又有喧宾夺主之嫌，归入“选读”实是一种两全其美的安排。例如，导数是本课程最基本的内容之一，本课程教材在讲述这个内容时，大多附着若干在物理、几何等领域的应用例子，但为适应进度，也不能太展开深入。本书则除此以外，还在“选读”中较深入地讲述了导数概念在经济分析和管理决策等方面的应用。因而使学习者对导数这个概念和工具的意义获得更切实的认识，这无疑有助于培养学生学习的兴趣和增强其学习的动力。其他例子书中还有很多，在此不一一列举了。

我觉得，通过“选读”这种形式的安排，提供给学习者一些重要的阅读资料，而又与正文加以分别，是一种在写作教材时有用的模式，当然，选材要适当，紧扣正文而不游离于其外，在叙述上要做到深入浅出，有可读性。这要求作者有一定的水平、知识和功力。我感到本书作者在这个形式的运用上做得很成功。

本书的另一个重要特色是对于数学史给予相当的重视，介绍了不少数学上彪炳史册的先贤的业绩，足以激发人们的敬仰和思考。在课堂教学中，部分由于时间关系，这部分内容多被忽略，一般教本中也很少涉及这一方面，致使学习者对数学中的一些重大成果的源流，有关的人、事、时间、地点等大都不甚了了，结果使学习者对这门学科看上去成为一些公式、概念、定理的堆积，缺乏一种灵性，因而也难于激发人们的兴趣和思考。这在相当程度上会影响教学效果和学生科学素质的养成，因此不能说是一个小问题。

这反映了我们基础课教学中的一种偏向，即过于偏重“形而下”即工具理性的一面。其后果是使学生在学习中易于过分抱一种功利主义的态度：学习时为

应付考试,毕业后在工作中一时用不上则很快就丢了.为纠正这一点,恐怕需要对学科的“形而上”方面给予一定的注意,适当突出其培养科学精神和人文素质的一面.如何做到这一点,需要教师以至广大社会做多方面和长时间的努力.本书作者的工作,是朝这个方向的一个有益的探索.

本书在习题安排上也显示出一定的特色.其一是体现在“复习题”这一部分及其内容的选择.它帮助学习者把有关的重要概念清理一遍,加深理解一些未曾切实掌握及容易被忽视或引致误解的内容,对巩固学习成果很有益处.

本书在习题数量和难易程度的安排上也比较恰当.要学好高等数学这门课程,不做较大量的习题,包括一定数量的有一定难度的习题,是不行的.习题的质量如何,应是评估一本教材的水平的一个重要参考点,为了教学上的省便而尽量选一些直套公式而浅近的习题,省事固然省事了,但学习者未得到严格的训练,受害在将来.我在几十年的数学教学中观察到的一事实是:凡是在数学课程中真正学得扎实,以至在日后工作中有建树的学生,多是对作习题、作难题有爱好者.习题编得好,有助于吸引学生朝着这个方向努力,一定程度上决定了最终的教学效果,所以也不是一个小问题.

读了本书,引发自己回顾以往在教学生涯中思考以至困惑过的一些问题,因此拉拉杂杂写下了一些感想,除了表示对作者的工作成果的钦佩和推荐外,也希望就教于同行的教师和专家学者.

中国科学院院士 陈希孺

2004年1月

第三版前言

本书的第二版出版于2004年,已经过近四年的教学实践。教材建设是一个持续不断地改进和完善的过程,本次对第二版进行了较大幅度的修订。

在本版的修订中,改正了第二版中的某些疏漏,保持第二版的基本的内容体系和编写指导思想,吸收了大量教学研究与改革的优秀教学成果。对部分章节做了重新编写,增加了微积分在实际问题中的更多的应用例子,根据后继课程的教学需要,增加了二重广义积分的概念和广义积分在概率论中的应用的例子。

在本版的修订中,长期从事高等数学教学工作的张丹青、吕炜、闫统江、纪凤辉、吴大焕、侯英敏、左文杰、李峰杰、陈永刚、李小平、排新颖、孙新国、智红燕、牛其华、于娟、孙建国、吴淑君、吕川、王静、吴瑞华、赵旭波、吕巍然、孙清滢、何苏阳、金贵荣、崔俭春、刘新海、陈华、张爱琴、胡哲、王媛媛、张会娜等教师与编者一起进行了认真地讨论,提出了许多建设性的意见。

本书第三版的修订得到了山东省高等学校教学改革立项项目和中国石油大学(华东)“十一五”规划教材的立项支持。同时,也得到了中国石油大学(华东)教务处和数学与计算科学学院的大力支持。

本书由费祥历、亓健、马铭福主编,第1、6章和绪论以及各章后的选读由费祥历编写;第2、3章由马铭福编写;第4、5章由亓健编写。

在修订中,编者参阅了大量的中外优秀教材,在此且不做一一列举,编者表示诚挚的谢意。

新版中存在的问题敬请专家和同行批评指正。

编 者

2007年12月

第二版前言

本书的第一版在 2000 年出版以来,已经过四年的教学实践. 根据新形势下教材改革的精神和作者近几年对中外一些优秀教材的比较研究,进行了全面修订.

本次修订中,保持第一版的基本内容体系和编写指导思想. 补充了微积分在当代科学、工程、管理及其他领域中应用的实例,进一步凸现了微积分在解决实际问题中的重要性. 增补了与工学、管理类有关专业对数学较高要求相适应的一定数量的例题和练习题. 增加了第十二章,主要内容是用多元函数微积分及无穷级数的理论给出微分方程的一些其他的解法. 在修订中,充分注意到与中学数学教材的相衔接.

中国科学院陈希孺院士审阅了本书的第一版,并为本版写了序. 石油大学数学与计算科学学院的广大教师提出了许多修改意见和建议,长期工作在高等数学教学第一线的张广禄、徐振贤、亓健、吕巍然、张丹青、杨立敏、吕炜、孙清滢、金贵荣、何苏阳、丁永臻、崔俭春、白占兵、刘新海、张爱芹、吴大焕、陈华、侯英敏与编者一起进行了认真讨论,提出了许多建设性的意见. 在修订中参阅了大量的文献和优秀教学成果,数学与计算科学院及教务处对教材建设一贯予以热情支持. 在此一并表示诚挚的谢意.

本版修订得到石油大学“十五”教材规划的立项支持,由费祥历、马铭福完成. 新版中存在的问题,敬请广大专家、同行和读者批评指正.

编 者

2004 年 8 月

第一版前言

本书的编写依据是教育部颁发的高等学校工科本科基础课程《高等数学课程教学基本要求》和石油大学新教学计划关于管理和工科本科各专业《高等数学教学大纲》。在编写过程中参考了大量的国内外同类教材、教学参考书及教学研究成果,吸收了石油大学应用数学系高等数学课程组全体老师长期积累的丰富教学经验,充分考虑了教学的便利和改革的需要。

全书分上、下册和一个附册。上册包括一元函数微积分学,常微分方程与差分方程初步。下册包括向量代数与空间解析几何,多元函数微积分学,无穷级数理论。上、下册是课堂讲授的主体内容。附册是数学实验,内容相对独立,主要目的是使学生学会使用数学软件 Mathematica,用此软件的数值计算、画图、符号演算、动画等功能加深对高等数学思想方法的理解。附册主要用于学生课外上机实验。上、下册的章节编号与附册章节编号独立。

本书从内容安排上,把微分方程放在上册,其目的是与“大学物理”等后继课程的教学需要相一致。把空间解析几何放在下册,与多元函数微积分学形成一个整体,便于学习多元函数微积分过程中参考。每章后的复习题是对该章内容的问题式小结及复习提纲,总练习是对该章内容学习情况的综合性检测。各节后的练习题分成 A、B 两部分,A 部分题用于预习及课堂练习,课外练习可以 B 部分题为主,带 * 号的内容可根据需要选讲。每章后的选读内容是本书的重要补充,其中数学在经济学中的应用部分内容基本上能满足经济类专业对高等数学在经济学中的应用方面的教学要求。数学家小传是对与该章有关的重要数学家的介绍,目的是弘扬数学先辈们追求真理的精神,也涉及数学概念的发展史,从中寻求科学发展的规律。

在编写指导思想,概念、性质、公式等知识点相对集中,叙述较为精练,书中有大量的几何直观图形表示。应用题的选择既照顾到数学在物理、力学、几何等学科中的传统应用,同时增加了大量的数学在经济、人口、生物、金融、环保等方面的现代应用,期望学生所学知识更接近于当代科技发展。

全书由多年从事高等数学教学工作的费祥历、刘奋、马铭福主编。上、下册中的绪论,第一、六、十章及各章后的选读由费祥历编写;第四、五、九和十一章由刘

奋编写;第二、三、七和八章由马铭福编写;程相国编写了附录 I. 附册由费祥历、同小军、白占兵、王清河编写。

在编写过程中张广禄教授、徐振贤教授、王子亭教授、元健副教授、吕巍然副教授提出了许多宝贵建议,教务处、应用数学系、石油大学出版社对本书的出版给予了大力支持,借此表示衷心感谢。

限于作者水平,也由于教学改革是一个持久的动态过程,教材中不妥之处在所难免,敬请读者提出意见及建议以利改进。

2000年5月

编者

目 录

绪论	1
0.1 数学的发展概况	1
0.2 高等数学的基本内容和思想方法	2
0.3 学习高等数学过程中应该注意的一些问题	6
第1章 函数与极限	7
1.1 函数的概念及其初等性质	7
1.1.1 集合	7
1.1.2 常量 变量 函数	10
1.1.3 函数的初等性质	14
1.1.4 函数的初等运算	17
1.1.5 基本初等函数与初等函数	20
1.1.6 函数关系的建立	26
习题 1.1	29
1.2 数列极限	31
1.2.1 数列的概念	31
1.2.2 数列极限的概念	32
1.2.3 收敛数列的性质	35
1.2.4 数列收敛的判别法	37
习题 1.2	40
1.3 函数极限	41
1.3.1 函数极限的概念	41
1.3.2 函数极限的性质	47
1.3.3 收敛判别法与两个重要极限	49
习题 1.3	53
1.4 无穷小与无穷大	54
1.4.1 无穷小及其性质	54
1.4.2 无穷小阶的比较	56
1.4.3 无穷大及其性质	58
习题 1.4	60
1.5 函数的连续性	61
1.5.1 函数的连续与间断	61

1.5.2 连续函数的运算	64
* 1.5.3 函数的一致连续性	66
习题 1.5	67
1.6 闭区间上连续函数的性质	68
习题 1.6	71
复习题一	72
总习题一	72
选读 经济学中常用函数	74
数学家小传	76
第2章 一元函数的导数与微分	79
2.1 导数的概念	79
2.1.1 导数概念的实例	79
2.1.2 导数定义	81
2.1.3 导数意义的解释	82
2.1.4 导函数、函数求导举例	83
2.1.5 可导与连续的关系 可导的充分必要条件	84
习题 2.1	87
2.2 导数的计算	88
2.2.1 导数的四则运算	89
2.2.2 反函数的导数	90
2.2.3 复合函数的求导法则	91
2.2.4 初等函数的求导	93
习题 2.2	95
2.3 高阶导数	96
2.3.1 高阶导数的概念	96
2.3.2 高阶导数的计算	97
2.3.3 高阶导数的运算法则	98
习题 2.3	100
2.4 几种类型函数的求导方法	100
2.4.1 隐函数的求导法	100
2.4.2 对数求导法	102
2.4.3 参数方程所确定的函数的导数	104
2.4.4 相关变化率	106
习题 2.4	107
2.5 函数的微分与线性逼近	108
2.5.1 微分的概念	108

2.5.2 微分的几何意义	110
2.5.3 微分的计算	111
2.5.4 函数的一阶线性逼近	113
习题 2.5	116
复习题二	116
总习题二	117
选读 导数在经济分析中的应用(I): 边际与弹性	119
数学家小传	121
第3章 微分中值定理与导数的应用	123
3.1 微分中值定理	123
3.1.1 费尔马引理	123
3.1.2 罗尔中值定理	124
3.1.3 拉格朗日中值定理	125
3.1.4 柯西中值定理	128
习题 3.1	129
3.2 洛必达法则	130
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的洛必达法则	130
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则	132
3.2.3 其他类型的未定式	133
习题 3.2	136
3.3 泰勒公式与函数的高阶多项式逼近	136
3.3.1 泰勒公式	136
3.3.2 函数的高阶多项式逼近	139
习题 3.3	142
3.4 函数的单调性与凸性	142
3.4.1 函数的单调性的判别法	142
3.4.2 函数凸性的判别法	146
习题 3.4	149
3.5 函数的极值与最值的求法	149
3.5.1 函数极值的判别法	149
3.5.2 函数的最值的计算	153
习题 3.5	155
3.6 弧微分 曲率 函数作图	156
3.6.1 弧微分	156
3.6.2 曲率及其计算	157

3.6.3 函数的终极态模型和曲线的渐近线	160
3.6.4 函数图形的描绘	163
习题 3.6	165
复习题三	166
总习题三	166
选读 导数在经济分析中的应用(II):管理与决策	168
数学家小传	171
第4章 不定积分	173
4.1 不定积分的概念和性质	173
4.1.1 原函数的概念	174
4.1.2 不定积分的概念	174
4.1.3 不定积分的性质	176
4.1.4 基本积分公式	177
习题 4.1	180
4.2 换元积分法	181
4.2.1 第一类换元法	181
4.2.2 第二类换元法	187
习题 4.2	192
4.3 分部积分法	194
习题 4.3	198
4.4 几种特殊类型函数的积分	199
4.4.1 有理函数的积分	199
4.4.2 三角函数有理式的积分	202
4.4.3 简单无理函数的积分	205
4.4.4 积分表的使用	206
习题 4.4	207
复习题四	208
总习题四	209
选读 函数迭代与混沌	211
第5章 定积分及其应用	215
5.1 定积分的概念和性质	215
5.1.1 几个例子	215
5.1.2 定积分的定义	218
5.1.3 定积分的性质	220
习题 5.1	223
5.2 牛顿-莱布尼兹公式	224

5.2.1 积分上限函数	225
5.2.2 牛顿-莱布尼兹公式	227
习题 5.2	229
5.3 定积分的计算	231
5.3.1 定积分的换元积分法	231
5.3.2 定积分的分部积分法	236
* 5.3.3 定积分的近似算法	239
习题 5.3	242
5.4 广义积分	244
5.4.1 积分区间为无穷区间的广义积分	244
5.4.2 无界函数的广义积分	247
* 5.4.3 广义积分的判别法	249
* 5.4.4 Γ 函数	251
习题 5.4	253
5.5 定积分在几何上的应用	254
5.5.1 建立定积分模型的微元法	254
5.5.2 平面图形的面积	256
5.5.3 体积	260
5.5.4 平面曲线的弧长	265
* 5.5.5 旋转体的侧面积	268
习题 5.5	269
5.6 定积分在物理上的应用	270
5.6.1 变力作功	270
5.6.2 水压力	273
5.6.3 引力	275
5.6.4 函数的平均值	276
习题 5.6	277
复习题五	277
总习题五	279
选读 积分学在经济分析中的应用:总量与贴现	282
数学家小传	284
第 6 章 微分方程与差分方程初步	286
6.1 微分方程的基本概念	286
习题 6.1	290
6.2 一阶微分方程	291
6.2.1 可分离变量方程	291

6.2.2 齐次方程	292
6.2.3 一阶线性微分方程	295
6.2.4 伯努里方程	298
* 6.2.5 黎卡提方程与初值问题解的存在唯一性	299
习题 6.2	300
6.3 可降阶的二阶微分方程	302
6.3.1 $y''=f(x)$ 型方程	302
6.3.2 $y''=f(x, y')$ 型方程	303
6.3.3 $y''=f(y, y')$ 型方程	305
习题 6.3	306
6.4 二阶线性微分方程	307
6.4.1 二阶线性微分方程解的性质与通解的结构	307
* 6.4.2 二阶线性非齐次方程的常数变易法	309
6.4.3 二阶常系数线性齐次方程的解法	310
6.4.4 二阶常系数线性非齐次方程的解法	312
习题 6.4	316
6.5 微分方程的应用举例	317
习题 6.5	328
6.6 简单差分方程及其应用	328
6.6.1 差分方程的一般概念	329
6.6.2 一阶和二阶常系数线性差分方程的解法	330
6.6.3 差分方程的应用	334
习题 6.6	337
复习题六	338
总习题六	338
选读 文物年代的鉴定	340
数学家小传	341
附录 I 高等数学常用数学名词英文注释	343
附录 II 几种常用的曲线	347
附录 III 积分表	350
习题答案	358

绪 论

从小学到高中,我们花了近四分之一的时间学习数学,在大学还要学高等数学.为什么要用这么多时间去学习既抽象又难懂的数学呢?我们将要学习的高等数学研究什么样的问题,与初等数学有何不同之处?在学习中需要注意哪些事项?在深入学习高等数学之前,我们首先对数学的发展历程做一个简单的回顾,对高等数学的概貌有一个总体了解,根据教学经验谈一些学习高等数学的思想方法,相信会对学好这门课程有些帮助.

0.1 数学的发展概况

数学的发展过程与生产实践的需要是密切相关的.根据不同时期数学所具有的不同特点,数学的发展大致可分为五个阶段:

数学的萌芽时期(远古时代—公元前6世纪).人类在与大自然的斗争及漫长的劳动过程中,由于记录收获物品的数量、比较货物交换多少的需要而结绳计数或屈指数数,逐步形成整数的概念,建立了简单的运算,产生了几何上的一些简单知识.这一时期的数学知识是零碎的,没有命题的证明和演绎推理.

常量数学时期(公元前6世纪—17世纪上半叶).随着劳动技能的提高、智慧的增加和知识的积累,数学从具体、实用的阶段逐步形成了能解决大量实际问题的比较系统的知识体系及比较抽象的、有独立的演绎系统的学科.中算的《九章算术》与西算的《几何原本》是这一时期产生的影响深远的代表作.现在中学数学的主要内容本质上是这一时期的产物.

变量数学时期(公元17世纪上半叶—19世纪20年代).欧洲资本主义的蓬勃发展,机械化大工业生产,航海、军事、天文研究等促使欧洲数学进入一个繁荣时期,产生了笛卡尔的解析几何,牛顿、莱布尼兹的微积分,围绕微积分的理论及应用发展起来了一大批数学分支.数学研究的对象和方法发生了根本的改观.恩格斯说“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的最高胜利了”.

近代数学时期(19世纪20年代—20世纪40年代).数学进入了迅猛发展的历史阶段.微积分的基础的严格化、近世代数的问世、数学公理化、非欧几何的诞生、集合论的创立,都是典型成就.空前的创造精神和严格化思想是这一时期数学发展的主要特点.高等数学及复变函数论、线性代数、概率统计等现行理、工科

大学生必修的这些数学课程基本上形成并严格化于 17 世纪中叶至 20 世纪上半叶.

现代数学时期(20 世纪 40 年代—现在). 原子能的发现、空间技术的发展、电子计算机的发明、生命科学的复兴以及经济理论的成功应用都与数学的发展息息相关,也极大地促进了数学的发展. 拓扑学、泛函分析、模糊数学、控制论、分形几何学、混沌理论等一批新兴数学分支产生、发展并得到广泛应用. 这些理论已经进入本科高年级及研究生的学位课程中. 数学分支间的相互渗透、数学与其他学科的相互渗透、电子计算机与数学的结合是当代数学的三个特点.

中国的科学技术与传统数学在 14 世纪前一直处于世界领先地位. 但是由于封建专制、八股取士、清代自雍正起实行闭关锁国政策等社会原因,以及中国数学重实用而轻理论,没有形成严密的演绎体系,缺乏记录公式的简洁符号,过分依赖于算具等自身的弱点,中国数学逐渐脱离了世界数学的主流. 在 16 世纪以后西方数学迅速赶上并超过中国. 虽然在 17 世纪徐光启与意大利传教士利玛窦就已经把欧几里德的《几何原本》前 6 卷等一些数学著作翻译引入了中国,后来 19 世纪下半叶由李善兰和华蘅芳把《几何原本》的后 9 卷,以及一批近代西方数学,如代数学、微积分、概率论、三角学等也作了翻译介绍,并创造了大批至今还在使用的数学名词,如点、直线、直角、微分、积分、函数等,但是这些数学知识传播不广,没有使中国数学落后的局面有多大改变. 清末民初一大批学子出国留学,他们回国后开创了中国数学研究的新局面. 现在,中国数学在某些领域已处在世界数学的前沿,但是在整体上仍处在相对落后的地位.

数学的发展历史告诉我们,数学是与国家科学技术、生产力的发展密不可分的,今日数学之应用更是无处不在. 日常生活、军事安全、经济运行等方方面面都离不开数学,以计算机应用为特征的当代科学技术本质上是一种数学技术.

作为一门课程的高等数学,其主要目的是:为其他课程提供必要的数学知识,培养学生的抽象思维、逻辑推理、科学计算、空间想象以及分析问题和解决问题等方面的能力,在这些能力的培养方面,数学的作用是其他学科无法替代的;进行文化素质教育,数学既是物质文明的推进剂,也是精神文明的组成部分. 在学习过程中,对人们的真理观、道德观、审美意识、辩证思维品质都有潜在的巨大影响. 数学家追求真理、自甘寂寞、乐于奉献、不畏艰难的勇气和情操会激励我们去克服前进中的各种困难.

0.2 高等数学的基本内容和思想方法

高等数学的基本内容包括四个部分:微积分学是高等数学的核心,研究函数的连续性以及导数、微分、积分的