由国内外久负盛名的北京
[illegible]写

学习能力与应试训练指导丛书

傅以伟 主编

跳出题海

高中数学

（修订本）

中国三峡出版社

责任编辑：牛　力　王寿彭

初中数学	7.90元	高中数学	9.90元
初中物理	7.90元	高中物理	9.90元
初中化学	7.10元	高中化学	9.10元
初中语文	7.50元	高中语文	8.50元
初中英语	7.60元	高中英语	8.60元

ISBN 7-80099-154-7/G・43
定价：9.90元（高中全一套共46.00元）

★学习能力与应试训练指导丛书★

（修订本）

跳出题海

高中数学

北京四中　傅以伟　主编

中国三峡出版社

1996·4

图书在版编目(CIP)数据

跳出题海:学习能力与应试训练指导:高中数学/傅以伟主编.-修订版.-北京:中国三峡出版社,1996.4

ISBN 7-80099-154-7

Ⅰ.跳… Ⅱ.傅… Ⅲ.①中学-课程-教学参考资料②教学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 05560 号

书　　名	跳出题海(高中数学)（修订版） ——学习能力与应试训练指导丛书
著　　者	北京四中　傅以伟主编
责任编辑	牛　力　王寿彭
出版单位	中国三峡出版社
印刷单位	山东肥城印刷厂
经　　销	各地新华书店
开　　本	787×1092 毫米 1/32
印　　数	10000
字　　数	233 千字
印　　张	10.6
版　　次	1996 年 4 月第 1 版
印　　次	1996 年 4 月山东第 1 次印刷
书　　号	ISBN7—80099—154—7/G·43
定　　价	9.90 元(高中全一套共 46 元)

修　订　说　明(高中)

《跳出题海》丛书自1994年8月面市以来，受到了广大读者的好评，全国各地的中学学生、教师和学生家长纷纷来信致函。用过此书的学生普遍反映学习方法、应试能力和学习成绩得到了显著提高；而无此书的学生迫切要求购买，许多发行单位均告销售已罄，要求进货。

值此，我们没有马上开机印书，而是抱着对广大读者极端负责的态度和严谨的治学精神，在广泛征求发行部门、教学部门和读者意见的基础上，和作者通力合作，对全书按最新教学大纲要求和应试特点，进行了认真细致的修改。

此丛书修订本，对原书中的差错、不够准确和典型性较差的内容予以删除，对基点、重点、难点的比重进行了更加合理的调整，并适当增加了新的内容。从而使全书更具适用性、典型性、指导性和启发性。

我们将此修订本奉献给读者，愿她伴随每一位高中同学，进一步改进学习方法，增强学习能力，提高学习成绩，愉快地渡过高中阶段，顺利地升入理想学校。

出　版　者

1996.4

前 言

为使广大同学能更好地掌握数学基础知识，数学思想、方法和提高解题能力，我们根据国家教委颁发的《高中数学教学大纲》的要求，结合多年教学实践和体会，撰写了这本书。

为使学生有利于学习和复习，本书将高中数学分成四个部分：代数、平面三角、立体几何和平面解析几何。每部分又按统编教材的相应章节顺序展开，只是把平面三角部分由统编教材的《代数》中抽出来单独编为第二部分，目的是为了有利于复习。这样便兼顾了同步学习与综合复习。

每一章，都设了如下几个栏目：

1.知识要点剖析。概括说明本章知识要点及之间的联系，以便系统掌握；

2.方法与能力辅导。其中尽可能地揭示出重要的数学思想：如函数和方程的思想，数形结合的思想，分类讨论的思想以及化归（转化）思想；数学中常见的方法：如配方法、换元法、待定系数法等等。并通过典型例题的分析给以体现，以提高同学们对于数学规律的认识，从而变被动学习为主动学习。

3.方法与能力训练。给同学提供一些经过精心挑选的习题，力图使同学们通过对这些题目的解决，对上述思想、方法能有所体会，进而有益于分析问题和解决问题能力的提高。

4.对上述训练题给出了参考答案或提示，作为对解题结果正确与否的鉴别依据。

参与编写本书的有北京四中高级教师傅以伟、田佣、赵康、王汉华、谷丹、王玲华、王庚志、肖国友以及雷明等。

编者　　1996.3.

目　录

第一部分 高中代数

这一部分共分五章：集合与函数、不等式、数列和极限、复数、排列组合和二项式定理，约占高中数学全部内容的40%。

其中的函数为主线。函数与方程的思想，数形结合的思想，是研究函数、不等式及数列的重要思想方法。复数的引入，彻底解决了一元二次方程问题，复数理论给今后数学和物理理论的学习提供了重要的工具。排列组合和二项式定理，对于我们掌握分类讨论思想起着重要的作用，同时也是将来学习概率的基础。

在学习和复习代数的过程中，要充分体会代数中常见的数学方法，如配方法、待定系数法、换元法，数学归纳法、构造法等等，学习代数也是提高运算能力的重要途径。

第一章　集合与函数

一、知识要点剖析

本章共有 19 个知识点：集合，子集，交集，并集，补集，映射，函数，幂函数及其图象，函数的单调性，函数的奇偶性，一一映射，逆映射，反函数，互为反函数的函数图象间的关系，指数函数，对数函数，换底公式，简单的指数方程，简单的对数方程。

本章的教材结构如表 1-1 所示：

各知识点的具体剖析如下：

(一)集合

1. 集合　集合是一个不定义的原始概念，只能做描述性的说明，即每一组对象的全体形成一个集合，集合里的每一个对象叫做这个集合的元素。

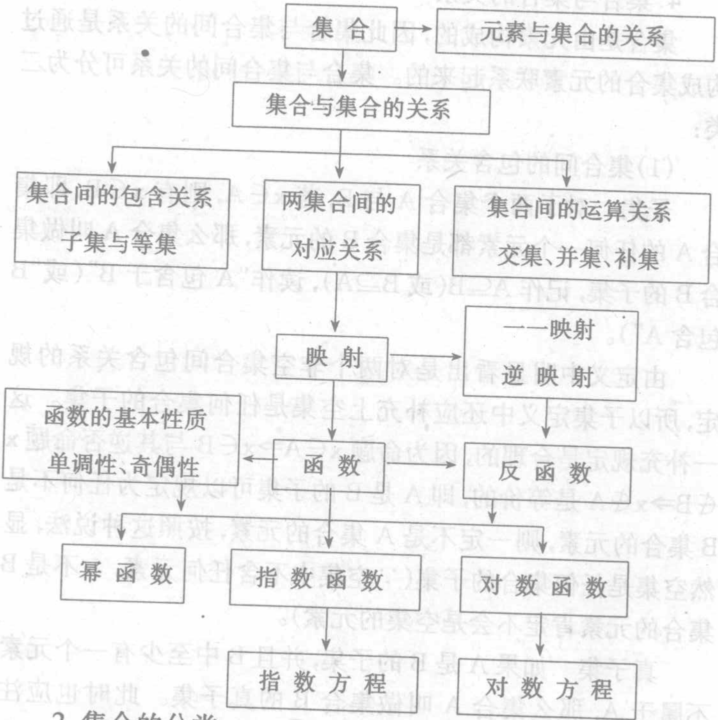
在这里应该注意构成集合的元素必须具备下面三个属性，即元素的确定性，互异性和无序性。

(1)确定性　对于给定的元素 x 与集合 A，或者 x 是 A 中的元素，或者 x 不是 A 中的元素，二者有且仅有一种情况成立。

(2)互异性　集合中的元素是互异的，相同的元素在一个集合内只算做一个。

(3)无序性　集合里的元素没有先后顺序，如集合{a, b, c}与集合{b, c, a}是同一个集合。

表 1-1



2. 集合的分类

(1)有限集　含有有限个元素的集合叫做有限集，如：集合{a, b, c}等。

(2)无限集　含有无限个元素的集合叫做无限集，如：集合{到一个角的两边等距的点}，自然数集N等。

(3)空集　不含任何元素的集合叫做空集。

3. 元素与集合的关系

元素与集合间是从属关系，即对于一个元素x与某集合A之间的关系为 $x \in A$ 或 $x \notin A$。

4. 集合与集合的关系

集合是由元素构成的，因此集合与集合间的关系是通过构成集合的元素联系起来的。集合与集合间的关系可分为三类：

(1)集合间的包含关系

子集　对于两个集合 A 与 B，若 $x\in A$，则有 $x\in B$，即集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A")。

由定义中明显看出是对两个非空集合间包含关系的规定，所以子集定义中还应补充上空集是任何集合的子集。这一补充规定是合理的，因为命题 $x\in A\Rightarrow x\in B$ 与其逆否命题 $x\notin B\Rightarrow x\notin A$ 是等价的，即 A 是 B 的子集可以规定为任何不是 B 集合的元素，则一定不是 A 集合的元素，按照这种说法，显然空集是任何集合的子集($\because$空集中不含任何元素，$\therefore$不是 B 集合的元素肯定不会是空集的元素)。

真子集　如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集。此时也应注意，空集是任何非空集合的真子集。

集合的相等　对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个集合相等，记作 $A=B$。对于集合的相等也可以理解为两个集合中的元素完全相同，这样对于相等的意思就更直观了。

(2)集合间的运算关系

交集　由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

直接从定义出发容易得到下面常用的结论：$A\cap B=B\cap A$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$(A\cap B)\subseteq A$；$(A\cap B)\subseteq B$。

并集　由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。

直接从定义出发容易得到下面常用的结论：$A\cup B=B\cup A$；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$；$(A\cup B)\supseteq A$；$(A\cup B)\supseteq B$；$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$。

补集　若全集为 I，集合 A 是 I 的子集，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作 $\bar{A}$，即 $\bar{A}=\{x\mid x\in I$，且 $x\notin A\}$。

直接从定义出发容易得到下面常用的结论：$A\cup\bar{A}=I$；$A\cap\bar{A}=\varnothing$；$\bar{\bar{A}}=A$。

(3)集合间的对应关系

根据集合间元素的对应关系，建立了映射，一一映射，逆映射等概念，放在下一个问题中剖析。

(二)映射

1.映射　已知 A，B 两个集合，如果按照某种法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$。

对映射的概念要着重理解以下两点：

(1)集合 A 中的任何一个元素在集合 B 中都有象，即集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都有象，而并不要求集合 B 中的每一个元素在集合 A 中都有原象。

(2)集合 A 中的任何一个元素在集合 B 中的象都是唯一

的，因此映射有时也叫做单值对应。

2. 一一映射　如果由集合A到集合B的映射$f:A\to B$满足下列两个条件：集合B的每一个元素在集合A中都有原象；集合A中不同的元素在集合B中有不同的象，我们就称这个映射$f:A\to B$为一一映射。

实质上，构成一一映射的两个集合间的元素是一对一的对应关系。

3. 逆映射　如果$f:A\to B$是从集合A到集合B的一一映射，则有$a\in A$时，$a\xrightarrow{f}b=f(a)$，且$b\in B$。若建立一个映射$g:B\to A$，使得$b\in B$时，$b\xrightarrow{g}a=g(b)$，且$a\in A$，则把映射$g:B\to A$叫做映射$f:A\to B$的逆映射。

实质上构成一一映射的两个集合间的元素是一对一的对应关系，显然这种元素间的对应关系决定了两个映射，一个是$f:A\to B$，一个是$g:B\to A$，这两个映射互为逆映射。

(三)函数

1. 函数

对于映射$f:A\to B$来说，如果满足下面两个条件：

a. 集合A、B是非空数集；

b. 集合B中的每一个元素在集合A中都有原象。

我们就说映射$f:A\to B$决定了一个函数$y=f(x)$，$x\in A$，$y\in B$。

上述函数的定义与传统的用变量来定义函数的概念实质上是一致的，但是它体现了现代数学观点。

确定一个函数的关键是确定函数的定义域集合D与对应法则f，D与f相同的两个函数一定是同一个函数，例如：$y=f(x)$，$x\in D$与$u=f(t)$，$t\in D$是同一个函数。

2.复合函数

若函数 $u=\varphi(x)$，其定义域是 D，值域是 N，又有函数 $y=f(u)$，它的定义域是 N，这样 y 就通过变量 u 构成了 x 的函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，称 y 为 x 的复合函数，u 叫做中间变量。例如函数 $y=\log_2(2x-1)$ 是由函数 $y=\log_2 u$ 与函数 $u=2x-1, x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 复合而成。

有了复合函数的概念为我们研究复合函数的性质提供了方便的条件，例如研究函数 $y=\log_2(2x-1)$ 的单调性可以通过函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=2x-1(x>\frac{1}{2})$ 的单调性来确定。

3.反函数

如果构成函数 $y=f(x)$ 的映射是一一映射，则这个映射存在逆映射，由这个逆映射确定的函数就叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$。

$$\begin{tikzcd}
\text{映射} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{存在}"] \arrow[d] & \text{逆映射} \arrow[d] \\
\text{函数 } y=f(x) & \text{函数 } y=f^{-1}(x)
\end{tikzcd}$$

函数 $f(x)$ 与函数 $f^{-1}(x)$ 互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称。

4.函数的基本性质

(1)函数的单调性　已知函数 $y=f(x)$，对于区间 (a,b) 上任意的 x_1,x_2，若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调增函数，区间 (a,b) 是函数的单调增区间；若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调减函数，区间 (a,b) 是函数的单调减区间。

单调增函数在图象上的反映是：自变量由小到大变化时，

函数值也由小到大变化，表示函数图象的曲线即从左到右逐渐增高。

单调减函数在图象上的反映是：自变量由小到大变化时，函数值反而由大到小变化，即表示函数图象的曲线从左到右逐渐降低。

(2)函数的奇偶性　已知函数 $y=f(x)$，$x\in D$。若对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；若对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是偶函数。

函数按奇偶性可分为四类，即奇函数，偶函数，既是奇函数又是偶函数，既非奇函数又非偶函数。

函数奇偶性在其图象上的反映是：奇函数的图象关于原点是对称图形，偶函数的图象关于 y 轴是对称的图形。

(3)函数的周期性(此处略，放在三角函数一章内容中研究)

5. 函数图形的变换

(1)平移变换

函数 $y=f(x+m)$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向平行移动得到，若 $m>0$，则向左平移 m 个单位；若 $m<0$，则向右平移 $|m|$ 个单位，这样的平移称作横向平移。

函数 $y=f(x)+m$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向平行移动得到，若 $m>0$，则向上平移 m 个单位；若 $m<0$，则向下平移 $|m|$ 个单位，这样的平移称作纵向平移。

(2)对称变换

函数 $y=f(-x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴是对称图形，所以函数 $y=f(-x)$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象绕 y 轴翻转 180°得到，这样的变换称作 y 轴对称变换。

函数 $y=-f(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴是对称

图形，所以函数 $y=-f(x)$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象绕 x 轴翻转 180° 得到，这样的变换称作 x 轴对称变换。

(3)翻折变换

函数 $y=f(|x|)$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴及其右侧部分保持不动，y 轴左侧部分去掉，而代之以原来 y 轴右侧的图象绕 y 轴翻折 180° 而得到，这样的变换称作 y 轴翻折变换。

函数 $y=|f(x)|$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴及其上方部分保持不动，而把 x 轴下方部分绕 x 轴向上翻折 180° 得到，这样的变换称作 x 轴翻折变换。

(4)伸缩变换

函数 $y=f(ax)$ $(a>0)$ 的图象上的每一点是把函数 $y=f(x)$ 图象上的点保持纵坐标不变，而横坐标变为原来的 $\frac{1}{a}$ 得到。当 $a>1$ 时，把 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向从左右两边向 y 轴压缩到原来的 $\frac{1}{a}$ 倍；当 $0<a<1$ 时，y 轴左右两侧的图象向外拉伸到原来的 $\frac{1}{a}$ 倍，这样的变换称为横向伸缩变换。

函数 $y=af(x)$ $(a>0)$ 的图象上的每一点是把函数 $y=f(x)$ 图象上的点保持横坐标不变，而纵坐标变为原来的 a 倍得到。当 $a>1$ 时，保持 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴上的点不动，而把 x 轴上下两侧的图象向外拉伸到原来的 a 倍；当 $0<a<1$ 时，把 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向从上下两边向 x 轴压缩到原来的 a 倍。这样的变换叫做纵向伸缩变换。

6.幂函数

(1)幂函数的定义　函数 $y=x^\alpha$（α 为常量，$\alpha\in R$）叫做幂函数。中学阶段只研究 α 为有理数的情况，并经常记为 $y=x^n$

$(n\in Q)$。

(2)幂函数的基本性质　$\because n\in Q$，$\therefore n$ 可表示为 $\frac{q}{p}$，其中 $p\in N, q\in Z$，且 $p, |q|$ 互质，以下就 p、q 的不同情况分别研究幂函数的性质。

a. p、q 都是奇数

若 $q>0$，则函数 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 的定义域和值域均为实数集 R；函数为奇函数；函数在其定义域上为单调增函数；函数图象过定点(0,0)，(1,1)。

若 $q<0$，函数的定义域和值域均为非零实数集；函数为奇函数；函数在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上分别为单调减函数；函数图象过定点(1,1)。

b. p 为奇数，q 为偶数

若 $q>0$，则函数定义域为实数集 R，值域为非负实数集 $\overline{R^-}$；函数为偶函数；函数在区间$(-\infty,0]$上为单调减函数，在区间$[0,+\infty)$上为单调增函数；函数图象过定点(0,0)，(1,1)。

若 $q<0$，则函数的定义域为非零实数集，值域为正实数集 R^+；函数为偶函数；函数在区间$(-\infty,0)$上为单调增函数，在区间$(0,+\infty)$上为单调减函数；函数图象过定点(1,1)。

c. p 为偶数，q 为奇数

若 $q>0$，函数的定义域和值域均为非负实数集$\overline{R^-}$；函数是非奇非偶函数；在定义域$[0,+\infty)$上是单调增函数；函数图象过定点(0,0)，(1,1)。

若 $q<0$，函数的定义域和值域均为正实数集 R^+；函数是非奇非偶函数；函数在定义域$(0,+\infty)$上是单调减函数；函数的图象过定点(1,1)。